

Из (30) видно, что явные равенства понижают число независимых переменных проектирования с 5 до 3. Равенство $u_1=u_2$ приводит к дублированию каналов передачи механической мощности от двигателей. Приведем решение задачи (30) для следующих данных: $U_{1ввх}=U_{1ввх}=30$; $k_1=k_2=k_3=k_4=3$; $u_{1н}=3$ и $u_{1в}=5$; $u_{3н}=4$ и $u_{3в}=4$; $u_{4н}=3$ и $u_{4в}=6$. Получено следующее решение: $u_1=u_2=5$; $u_3=4$; $u_4=4$; $u_p=3$. Заметим, что решить задачу (30) можно без ограничений. Тогда получим такие значения: $u_1=u_2=6,626$; $u_3=3,166$; $u_4=2,861$; $u_p=2,165$. При этом значение целевой функции будет меньше, чем в случае наличия ограничений. Уменьшение составит около 6%. Однако, полученные числа передаточных отношений не соответствуют возможным значениям (те которые можно реализовать). Поэтому их следует заменить на ближайшие из диапазона возможных значений.

Рассмотрение методики построения и минимизации целевой функции $\overline{M}_{\Sigma H} = \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, \dots, u_5, k_1, k_2, k_3, k_4)$ применительно к кинематической схеме двухпоточного четырехступенчатого планетарного механизма типа $4 \times \overline{AI}$ позволяет применить соотношения (15) и (16) для кинематической схемы двухпоточного многоступенчатого планетарного механизма типа $n \times \overline{AI}$. Для этого надо поступить следующим образом. Во-первых, заменить первую ступень механизма, приведенного на рисунке 1, кинематической цепью, составленной из многоступенчатого механизма типа $n_1 \times \overline{AI}$. Во-вторых, подобное сделать со второй ступенью. В результате получим кинематическую цепь второго потока, образованную многоступенчатым механизмом типа $n_2 \times \overline{AI}$. В-третьих, вместо четвертой ступени механизма, показанного на рисунке 1, задаем многоступенчатый механизм типа $n_4 \times \overline{AI}$. В итоге, получим кинематическую схему двухпоточного многоступенчатого планетарного механизма типа $n \times \overline{AI}$, где $n=n_1+n_2+n_4+1$. В сумму для определения параметра n вошла 1, которая указывает на один суммирующий дифференциал.

Выводы:

1. Разработана методика построения целевой функции оптимизации массы двухпоточного многоступенчатого планетарного механизма типа $n \times \overline{AI}$ при расчете на контактную прочность.
2. Показаны условия, когда выражение для целевой функции совпадает с аналогичной формулой, которая приведена в работах В.Н. Кудрявцева.
3. Исследованы свойства решения задачи минимизации целевой функции в зависимости от типа задаваемых ограничений. Приведены ограничения, при которых размерность задачи может быть понижена.
4. Приведена математическая постановка минимизации целевой функции, которая легко может быть реализована в таких программах как MathCAD, Maple и MATLAB.
5. Разработанная методика может быть применена для более сложных структур многопоточных многоступенчатых механизмов, образованных как планетарными ступенями, так и рядными.

Список литературы: 1. Пластмассовые зубчатые колеса в механизмах приборов. Расчет и конструирование. Справочник и научное издание / В.Е. Старжинский, Б.П. Тимофеев, Е.В. Шалобаев, А.Т. Кудинов. Под общ. ред. В.Е. Старжинского и Е.В. Шалобаева. – Санкт-Петербург-Гомель: ИММС НАН Б, 1998. – 538с. 2. Проектирование планетарных механизмов, оптимальных по динамическим характеристикам: Учеб. пособие по курсов. и дипл. проектированию / В.А. Ткаченко, В.Т. Абрамов, М.Д. Коровкин. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1983. – 110с. 3. Планетарные механизмы (оптимальное проектирование) / В.А. Ткаченко. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 446с. 4. Старжинский В.Е., Шало-

баев Е.В., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И. Оптимизация двухпоточного зубчатого механизма по критерию минимизации объема редуктора // Вісник Національного технічного університету "ХПИ". – 2011. – Вип.28. – С.150-162. 5. Истомин С.И. Проектирование мелкомодульных передач приборов с применением ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1985. – 176с. 6. Планетарные передачи. Справочник. Под ред. докторов техн. наук В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. – Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-е), 1977. – 536с. 7. Курсовое проектирование деталей машин / В.Н. Кудрявцев, Ю.А. Державец, И.И. Арефьев и др.; Под общ. ред. В.Н. Кудрявцева: Учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей вузов. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-е, 1984. – 400с. 8. Шехов А.В. Алгоритмы решения задач оптимизации конструкций многоступенчатых механизмов // Вісник Національного технічного університету "ХПИ". – 2011. – Вип.28. – С.171-180.

Поступила (received) 20.03.2014

УДК 539.3: 621.897

С.В. ШИЛЬКО, к.т.н., доц., заведующий лабораторией ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель;
В.Е. СТАРЖИНСКИЙ, д.т.н., доц., главный научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси;
Е.М. ПЕТРОКОВЕЦ, научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси;
С.Л. ГАВРИЛЕНКО, научный сотрудник ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Разработана методика анализа деформативности и прочности элементов конструкций сложной формы с учетом вязкоупругости материала. Для получения реологических констант выполнена идентификация вязкоупругой модели Прони по результатам механических испытаний стандартных образцов на релаксацию при сжатии. Рассмотрены примеры расчета зубчатого колеса и силфона из полиамида.

Ключевые слова: полимерные композиты, деформативность, прочность, вязкоупругость, модель Прони, метод конечных элементов, зубчатое колесо, силфон.

Введение. Реономные свойства полимерных материалов, которые проявляются в виде ползучести и релаксации, оказывают значительное влияние на деформативность и прочность элементов конструкций, изготавливаемых на их основе [1]. С одной стороны, деформации ползучести снижают формостабильность и ухудшают эксплуатационные характеристики изделий, являясь, например, источником кинематической погрешности полимерных зубчатых передач. Вместе с тем, вязкоупругие эффекты играют положительную роль, способствуя демпфированию колебаний и, а также, в ряде случаев, благоприятному перераспределению напряжений и повышению несущей способности в результате "приспособления" конструкции к внешним нагрузкам.

В этой связи необходимым этапом прочностного расчета полимерных конструкций является описание реологических свойств применяемых материалов с последующим анализом напряженно-деформированного состояния конструкции в вязкоупругой постановке. Нужно заметить, что аналитические решения теории вязкоупругости [2-5] пригодны лишь для тел канонической формы. Это затрудняет их использование в расчете полимерных изделий, зачастую имеющих весьма сложную конфигурацию. С другой стороны, метод конечных элементов, широко применяемый для решения прикладных задач в упругой и упруго-пластической постановке, в настоящее время редко используется для моделирования вязкоупругого поведения реальных конструкций и деталей машин.

© С.В. Шилько, В.Е. Старжинский, Е.М. Петроковец, С.Л. Гавриленко, 2014

Цель настоящего исследования – разработка методики прочностного расчета полимерных элементов конструкций сложной геометрической формы с учетом вязкоупругости материала.

Метод исследования. К настоящему времени для описания процессов ползучести и релаксации полимерных материалов отечественными и зарубежными исследователями предложен ряд вязкоупругих моделей [2-5]. С учетом того, что в распространенных программных продуктах конечноэлементного анализа, например, ANSYS, используется модель линейной вязкоупругости Прони, для определения реологических констант материала по результатам стандартных механических испытаний запишем определяющие соотношения указанной модели [6]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (1)$$

Здесь

$$G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\xi/\lambda_i^G}; \quad K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\xi/\lambda_i^K}; \quad G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i = \mu; \quad K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i = K,$$

где G, K – модули сдвига и объемной деформации соответственно; t – время.

С учетом соотношений для упругих констант, приведенных, в частности, в работе [2]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

а также упрощающего предположения о постоянстве коэффициента Пуассона материала $\nu = \text{const}$, имеем следующие зависимости [7]:

$$ER_E(t - \tau) = 2(1 + \nu)G'_\tau(t - \tau); \quad K'_\tau(t - \tau) = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} G'_\tau(t - \tau).$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon(t) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t) \right] - \frac{E}{1 + \nu} \int_0^t R_E(t - \tau) \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon(\tau) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(\tau) \right] d\tau.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени в опыте на релаксацию при сжатии цилиндрического образца:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left(1 - \frac{2(1 + \nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right),$$

где S_0 – площадь поперечного сечения образца. К примеру, для определения вязкоупругих параметров полимерного материала Полиамид-6 на машине Instron 5567 были проведены механические испытания стандартных цилиндрических образцов на релаксацию при сжатии. Полученные зависимости приведенного усилия от времени для различных уровней деформации ε при модуле Юнга материала $E=1650$ МПа представлены на рисунке 1. Можно заметить, что для данного материала достаточно быстро происходит стабилизация усилия сжатия, что позволяет сократить время испытаний (в данном случае до 3 часов), т.е. получить необходимые данные из опыта на кратковременную релаксацию.

Для квадратичного отклонения (невязки) Δ записывалось выражение:

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \left(P_{прив}^i - 1 + \frac{2(1 + \nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right)^2.$$

В дальнейшем для вычисления параметров модели Прони использовалась силовая характеристика при деформации $\varepsilon=0,043$ в виде 4-х пар значений времени и приведенной силы (таблица).

Минимизируя невязку, находим константы G_∞, G_1, λ_1 в зависимости от модуля Юнга в предположении известного коэффициента Пуассона (далее принято $\nu=0,4$).

Результаты идентификации. При идентификации модели Прони ($n_G=1$) для материала Полиамид-6 при $E=1650$ МПа, $\nu=0,4$ были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно:

$$K(\xi) = 1783,8 + 962,3 \times e^{-\xi/4,3}; \quad G(\xi) = 382,8 + 206,5 \times e^{-\xi/4,3}.$$

Здесь $K_\infty=1783,8$ МПа, $K_1=962,3$ МПа, $\tau_1^K = 4,3$ мин, $G_\infty=382,8$ МПа, $G_1=206,5$ МПа, $\tau_1^G = 4,3$ мин.

В соответствии с описанием программы ANSYS [6] вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1$, $K_0 = K_\infty + K_1$, $\alpha_1^G = G_1/G_0$, $\alpha_1^K = K_1/K_0$, принимающие следующие значения для имеющихся экспериментальных данных: $G_0 = 589,3$ МПа, $K_0 = 2750$ МПа, $\alpha_1^G = 0,345$, $\alpha_1^K = 0,345$. К ним следует добавить упругие параметры: $E=1650$ МПа, $\nu=0,4$.

Результаты решения прикладных задач. В качестве примеров были выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния зубчатого колеса и сильфона из вышеописанного вязкоупругого полимерного материала (рисунок 2).

Пример 1: Прямозубое зубчатое колесо. Для анализа вязкоупругих эффектов при работе цилиндрической металлополимерной зубчатой

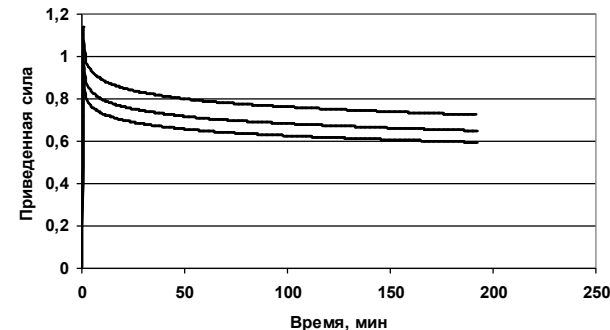


Рисунок 1 – Зависимость приведенного усилия ($P(t)/(E\varepsilon_0 S_0)$) от времени: нижняя кривая соответствует $\varepsilon=0,051$, средняя – $\varepsilon=0,043$, верхняя – $\varepsilon=0,034$ (расхождение не превышает 20%)

Таблица – Значения приведенной силы для 4-х моментов времени

t_i , мин	2,6	16,1	50,1	111,6
$P/(E\varepsilon_0 S_0), E=1650$ МПа	0,86	0,77	0,72	0,68

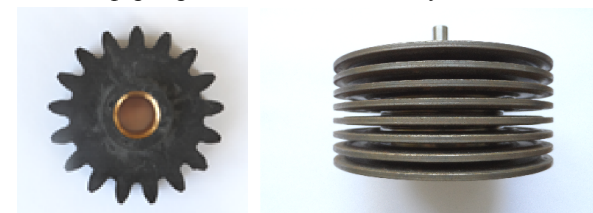


Рисунок 2 – Геометрически сложные элементы конструкций в виде зубчатого колеса (а) и сильфона (б)

передачи с модулем зацепления $m=3,5$ мм, рассматривали сопряжение одичного зуба полимерного колеса и жесткого кругового цилиндра эквивалентного радиуса $R=2,3$ мм, моделирующего металлическую шестерню.

Усилие $F=10$ Н/см прикладывалось к цилиндру по нормали к эвольвентному профилю зуба (координаты профиля приведены в работах [1, 8]). Данные для расчета включали также ранее определенные характеристики материала колеса

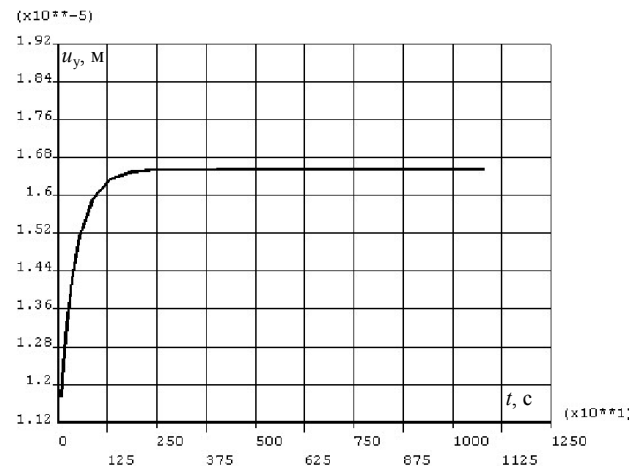


Рисунок 3 – Зависимость перемещений по оси y от времени

(полиамид-6): модуль Юнга $E=1650$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,4$, коэффициент трения $f=0,3$; реологические константы $\alpha_1^G=0,35$, $\tau_1^G=4,3$ мин.

Результаты расчета перемещений во времени показаны на рисунке 3. Можно заметить, что реономные свойства полимерного материала проявляются в начальный период времени, когда происходит основной прирост вязкоупругих перемещений.

Пример 2: Сильфон. Рассчитывались компоненты вязкоупругого напряженно-деформированного состояния эластичной конструкции в виде сильфона, нагруженного вертикальной силой, равномерно распределенной по окружности внутреннего контура (на рисунках 4, 5 показаны распределения эквивалентных напряжений и вертикальных перемещений (осадки) правой части осевого сечения).

Так как в расчете задавались вязкоупругие характеристики материала Полиамид-6, зависимость осевых перемещений сильфона во времени (рисунок 6) аналогична таковой для зубчатого колеса (рисунок 3), но по абсолютной величине расчетные перемещения сильфона во много раз больше, что обусловлено значительными изгибными деформациями его гофров.

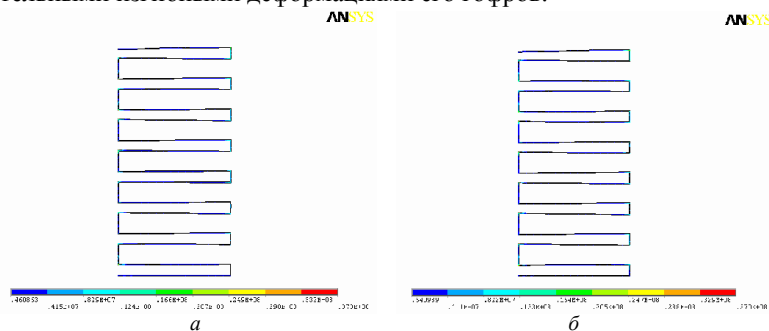


Рисунок 4 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: начальная (а) и конечная итерация (б)

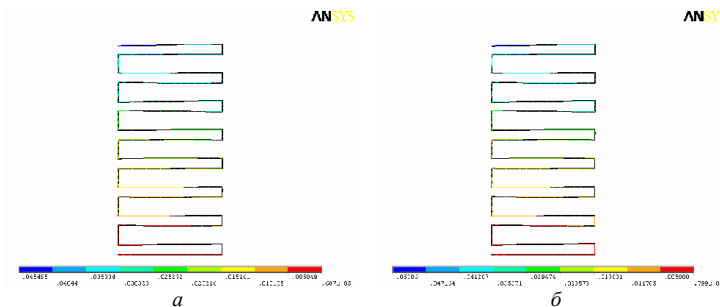


Рисунок 5 – Перемещения по оси y : начальный момент времени нагружения (а) и конечная итерация (б)

Заклучение. Разработана методика прогнозирования деформаций ползучести геометрически сложных элементов конструкций и деталей машин. Реологические параметры определены исходя из методически простых экспериментов на кратковременную релаксацию. Для апробации методики выполнены расчеты вязкоупругих перемещений прямозубчатого цилиндрического зубчатого колеса и сильфона.

Установлено, что зависимости перемещений от времени имеют выраженный нелинейный характер, когда основное накопление вязкоупругих деформаций конструкционных полимерных материалов реализуется в начальный период времени.

Список литературы: 1. Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Шилько С.В. и др. Элементы привода приборов. Расчет, конструирование, технологии. – Минск: Беларуская навука. – 2012. – 784с. 2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация – М.: Высшая школа, 1976. – 277с. 3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340с. 4. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов – М.: Наука, 1985. – 303с. 5. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: Белгунт, 2001. – 344с. 6. ANSYS Revision 10-12. 7. Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Идентификация линейной вязкоупругой модели Прони по результатам испытаний на релаксацию при сжатии // Теор. и прикл. механика: междунар. н/т сб. – Минск, 2014. – Вып.29. – С.219-223. 8. Шилько С.В., Старжинский В.Е., Петроковец Е.М., Черноус Д.А. Двухуровневый метод расчета трибосопряжений из дисперсно-армированных композитов. Часть 2 // Трение и износ. – 2014. – Т.35, №1. – С.52-61.

Поступила (received) 16.03.2014