

**Список литературы:** 1. Гавриленко В.А. Зубчатые передачи в машиностроении. – М.: Машгиз, 1962. – 532с. 2. Скляров А.Е. Исследование цилиндрических передач с круговыми зубьями: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.02. – Ворошиловград, 1973. – 167с. 3. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. Изд-во "Наука", М. 1968. – 584с. 4. Вулгаков Э.В. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. – М.: Машиностроение. 1974. – 264с. 5. Грибанов В.М., Малый Д.В., Фесенко Т.Н., Хмеловский Т.Г. Сравнительный анализ зубчатых цилиндрических передач Новикова с арочным зубом // Вестник Национального технического университета "ХПИ". – 2001. – Вып.13. – С.43-51. 6. Шишов В.П., Носко П.Л., Ревякина О.А. Цилиндрические передачи с арочными зубьями (теория, анализ, синтез): Монография. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В.Даля, 2004. – 336с. 7. Шишов В.П., Филь П.В., Ревякина О.А., Мухоматов А.А. Геометро-кинематические показатели цилиндрических зубчатых передач с арочными зубьями // Ресурсосберегающие технологии производства и обработки давлением материалов в машиностроении. Сб. научн. работ. – Луганск: Изд. ВНУ, 2001. – С.193-200. 8. Шишов В.П., Носко П.Л., Ткач П.Н., Филь П.В. Високонвантажени циліндричні передачі з двоопукло-ввігнутими зубьями. – Луганськ: СНУ ім. В.Даля, 2005. 9. Shishov V., Tkach P., Chalaya E., Juravlyova T. Internal geometry of active surfaces of teeth of cylindrical gear arch mixed gearing // TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture. – Vol.13, №3. – 2013. – P.203-208. 10. Раишевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420с.

Надійшла (received) 04.03.2014

УДК 621.833

**Н.Л. УТУТОВ**, д.т.н., профессор каф. "ДВС и машиноведение"  
ВНУ им. В. Даля, Луганск;

**Н.В. ПЛЯСУЛЯ**, ассистент каф. "Прикладная математика" ВНУ им. В.Даля

### ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАЦЕПЛЯЮЩИХСЯ ЗУБЬЕВ В КРУГОВИНТОВОЙ ГЛОБОИДНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ

В статье приведена математическая модель относительных движений в зубчатой глобоидно-цилиндрической круговинтовой передаче с двумя линиями зацепления. Проведен анализ коэффициента скольжения в горловом сечении глобоидно-цилиндрической зубчатой круговинтовой передачи и на границе торцевых плоскостей глобоидного колеса.

**Ключевые слова:** зубчатая передача, угловая скорость, относительная скорость, вращение, верчение.

**Введение.** В зацеплении круговинтовых зубьев глобоидно-цилиндрической зубчатой передачи одновременно происходят сложные движения: перекатывание, скольжение, верчение поверхностей зубьев одного колеса относительно зубьев другого колеса.

Уравнения поверхностей зубьев ведущего и ведомого колес представим в системах  $O_1X_{11}Y_{11}Z_{11}$  и  $O_2X_{22}Y_{22}Z_{22}$  координат соответственно.

Уравнения поверхностей головки зуба ведущего колеса в системе координат  $O_1X_{11}Y_{11}Z_{11}$ :

$$\begin{aligned} x_{11} &= (r_1 + R_1 \cos \lambda_{11}) \sin(\varphi_{11} + \varphi_1) + R_1 \cos(\varphi_{11} + \varphi_1) \sin \lambda_{11} \cos \beta_1; \\ y_{11} &= (r_1 + R_1 \cos \lambda_{11}) \cos(\varphi_{11} + \varphi_1) - R_1 \cos(\varphi_{11} + \varphi_1) \sin \lambda_{11} \cos \beta_1; \\ z_{11} &= p\varphi_1 \operatorname{ctg} \gamma - R_1 \sin \lambda_{11} \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r_1$  – радиус начальной окружности глобоида,

$$r_1 = r_{10}(1 + u - u \cos \varphi_2^*); \quad (2)$$

$r_{10}$  – радиус начальной окружности глобоида в его средней (горловой части);  $\varphi_2^*$  – угол обхвата глобоидным колесом цилиндрического колеса;  $u$  – передаточное

© М.Л. Утутов, Н.В. Плясуля, 2014

число передачи;  $\gamma$  – угол подъема линии зуба на глобоидном колесе;  $P$  – винтовой параметр;  $R_1$  – радиус кривизны профиля зуба головки зуба;  $\lambda_{11}$  – угол поворота радиусов профилирующей окружности;  $\varphi_1$  – угол поворота ведущего колеса;  $\beta_1$  – угол наклона линий зубьев и оси вращения ведущего колеса.

Уравнение поверхностей ножки зубьев ведущего колеса:

$$\begin{aligned} x_{12} &= (r_1 + R_2 \cos \lambda_{12}) \sin(\varphi_{11} + \varphi_1 - \xi_1) + R_2 \cos(\varphi_{11} + \varphi_1 - \xi_1) \sin \lambda_{12} \cos \beta_1; \\ y_{12} &= (r_1 + R_2 \cos \lambda_{12}) \cos(\varphi_{11} + \varphi_1 - \xi_1) - R_2 \cos(\varphi_{11} + \varphi_1 - \xi_1) \sin \lambda_{12} \cos \beta_1; \\ z_{12} &= p(\varphi_1 \operatorname{ctg} \gamma - \xi_1) - R_2 \sin \lambda_{12} \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $R_2$  – радиус кривизны профиля ножки зуба в ведущего колеса;  $\lambda_{12}$  – независимая переменная, угол поворота радиусов профилирующих окружностей;  $\xi_1$  – угол, определяющий положение профильности зуба относительно головки этого же зуба;  $\varphi_{11}$  – угол, определяющий положение торцевого сечения головки зуба с торцевой плоскостью ведущего колеса.

Уравнение поверхностей головки зуба ведомого колеса в системе  $O_2X_{22}Y_{22}Z_{22}$ :

$$\begin{aligned} x_{21} &= (r_2 + R_1 \cos \lambda_{21}) \sin(\varphi_{22} + \varphi_2) + R_1 \cos(\varphi_{22} + \varphi_2) \sin \lambda_{21} \cos \beta_2; \\ y_{21} &= (r_2 + R_1 \cos \lambda_{21}) \cos(\varphi_{22} + \varphi_2) - R_1 \cos(\varphi_{22} + \varphi_2) \sin \lambda_{21} \cos \beta_2; \\ z_{21} &= p\varphi_1 \operatorname{tg} \gamma - R_1 \sin \lambda_{21} \sin \gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r_2$  – делительный диаметр ведомого колеса;  $\lambda_{21}$  – независимая переменная;  $\varphi_{12}$  – угол, определяющий положение торцевого сечения головки зуба с торцевой плоскостью ведомого колеса.

Уравнения поверхностей ножек зубьев ведомого колеса:

$$\begin{aligned} x_{22} &= (r_2 + R_2 \cos \lambda_{22}) \sin(\varphi_{22} + \varphi_2 - \xi_2) + R_2 \cos(\varphi_{22} + \varphi_2 - \xi_2) \sin \lambda_{22} \cos \beta_2; \\ y_{22} &= (r_2 + R_2 \cos \lambda_{22}) \cos(\varphi_{22} + \varphi_2 - \xi_2) - R_2 \cos(\varphi_{22} + \varphi_2 - \xi_2) \sin \lambda_{22} \cos \beta_2; \\ z_{22} &= p(\varphi_1 \operatorname{tg} \gamma - \xi_2) - R_2 \sin \lambda_{22} \sin \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_{22}$  – независимая переменная;  $\xi_2$  – угол, определяющий положение профиля ножки зуба колеса относительно головки зуба этого колеса.

**Основное содержание.** Относительные перекатывания зубьев друг по другу рассмотрим как состоящие из двух элементарных движений перекатываний, когда касательные к контактными линиям на их поверхностях не совпадают между собой.

Угловые скорости перекатывания зубьев по направлению касательной к контактными линиям на зубьях головок ведущего и ножек ведомого колес соответственно:

$$w_{n1Гкач} = \frac{V_{K1Г}}{\rho_{\lambda 11}} = \frac{w_1 K_{L11} \sqrt{K_{VK1Г}}}{K_{E11} \sqrt{K_{E11} K_{G11} - K_{F11}^2}}; w_{n2Hкач} = \frac{V_{K2H}}{\rho_{\lambda 22}} = \frac{w_2 K_{L22} \sqrt{K_{VK2H}}}{K_{E22} \sqrt{K_{E22} K_{G22} - K_{F22}^2}}, \quad (6)$$

где  $V_{K1Г}$  и  $V_{K2H}$  – скорости перекатывания точки контакта по головке зуба ведущего и ножке зуба ведомого колес соответственно;  $\rho_{\lambda 11}$  и  $\rho_{\lambda 22}$  – радиусы кривизн поверхностей зубьев головки ведущего и ножки ведомого колес соответственно.

Аналогично (6) получим выражения угловых скоростей перекатывания точек контакта по направлению касательной к контактными линиям на зубьях ножек ведущего и головок ведомого колес соответственно:

$$w_{n1Hкач} = \frac{V_{K1H}}{\rho_{\lambda 12}} = \frac{w_1 K_{L12} \sqrt{K_{VK1H}}}{K_{E12} \sqrt{K_{E12} K_{G12} - K_{F12}^2}}; w_{n2Гкач} = \frac{V_{K2Г}}{\rho_{\lambda 21}} = \frac{w_2 K_{L21} \sqrt{K_{VK2Г}}}{K_{E21} \sqrt{K_{E21} K_{G21} - K_{F21}^2}}, \quad (7)$$

где  $V_{K1H}$  и  $V_{K2Г}$  – скорости перекачивания точки контакта по ножке зуба ведущего и головки зуба ведомого колеса соответственно.

Углы между направлением вектора относительной скорости и касательными к контактными линиям на зубьях ведущего и ведомого колес:

для головок зубьев ведущего глобоидного колеса:

$$\cos \delta_{1Г} = \cos \alpha_{C1} \cos \alpha_{K1Г} + \cos \beta_{C1} \cos \beta_{K1Г} + \cos \gamma_{C1} \cos \gamma_{K1Г}; \quad (8)$$

аналогично для ножек зубьев ведущего колеса:

$$\cos \delta_{1H} = \cos \alpha_{C2} \cos \alpha_{K1H} + \cos \beta_{C2} \cos \beta_{K1H} + \cos \gamma_{C2} \cos \gamma_{K1H}. \quad (9)$$

Аналогично (8) и (9) получим для головки зубьев ведомого колеса:

$$\cos \delta_{2Г} = \cos \alpha_{C1} \cos \alpha_{K2Г} + \cos \beta_{C1} \cos \beta_{K2Г} + \cos \gamma_{C1} \cos \gamma_{K2Г}; \quad (10)$$

для ножек зубьев ведомого колеса:

$$\cos \delta_{2H} = \cos \alpha_{C2} \cos \alpha_{K2H} + \cos \beta_{C2} \cos \beta_{K2H} + \cos \gamma_{C2} \cos \gamma_{K2H}. \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_{C1}, \alpha_{C2}, \beta_{C1}, \beta_{C2}, \gamma_{C1}, \gamma_{C2}$  – углы между контактной линией и координатами точки контакта;  $\alpha_{K1Г}, \beta_{K1Г}, \gamma_{K1Г}, \alpha_{K1H}, \beta_{K1H}, \gamma_{K1H}$  – углы, направляющих косинусов вектора скорости движения точного зацепления на головках и ножках зубьев ведущего колеса;  $\alpha_{K2Г}, \beta_{K2Г}, \gamma_{K2Г}, \alpha_{K2H}, \beta_{K2H}$  – углы, направляющих косинусов вектора скорости движения точки зацепления на ножках и головках зубьев ведомого колеса.

Угловая скорость относительного перекачивания поверхностей зубьев ведущего и ведомого колес по общей касательной плоскости, считающейся неподвижной: на головках зубьев ведущего колеса:

$$w_{1Гкач} = \frac{w_{1Гкач}}{\cos \delta_{1Г}}; \quad (12)$$

на ножках зубьев ведущего колеса:

$$w_{1Hкач} = \frac{w_{1Hкач}}{\cos \delta_{1H}}; \quad (13)$$

на головках зубьев ведомого колеса:

$$w_{2Гкач} = \frac{w_{2Гкач}}{\cos \delta_{2Г}}; \quad (14)$$

на ножках зубьев ведомого колеса:

$$w_{2Hкач} = \frac{w_{2Hкач}}{\cos \delta_{2H}}. \quad (15)$$

Угловые скорости перекачивания по направлению перпендикулярному касательным к контактными линиям на поверхностях зубьев ведущего и ведомого колес: на головках зубьев ведущего колеса:

$$w_{K1Гкач} = w_{1Гкач} \sin \delta_{1Г}; \quad (16)$$

на ножках зубьев ведущего колеса:

$$w_{K1Hкач} = w_{1Hкач} \sin \delta_{1H}; \quad (17)$$

на головках зубьев ведомого колеса

$$w_{K2Гкач} = w_{2Гкач} \sin \delta_{2Г}; \quad (18)$$

на ножках зубьев ведомого колеса

$$w_{K2Hкач} = w_{2Hкач} \sin \delta_{2H}. \quad (19)$$

Только относительное перекачивание, представляющее собой сумму движений перекачивания: для головок зубьев ведущего и ножек зубьев ведомого колес:

$$\Omega_{кач1} = w_{1Гкач} + w_{2Hкач}; \quad (20)$$

для ножек зубьев ведущего и головок зубьев ведомого колес:

$$\Omega_{кач2} = w_{1Hкач} + w_{2Гкач} = K_{\Omega K2}. \quad (21)$$

Векторы  $\Omega_{кач1}$  и  $\Omega_{кач2}$  направлены по линии пересечения касательной плоскости с плоскостью  $Q$ , проходящей через общую нормаль и вектор относительной угловой скорости вращения  $\Omega_{отн}$ .

Нормаль к плоскости  $Q$  совпадает с вектором линейной относительной скорости точки, находящейся в зацеплении направляющие косинусы которой известны.

Относительная скорость вращения зубчатых колес (рисунок 1):

для головки зубьев ведущего колеса и ножек зубьев ведомого:

$$\Omega_{1отн} = \frac{\Omega_{кач1}}{\sin \gamma_{11}^v}; \quad (22)$$

для ножек зубьев ведущего колеса и головок зубьев ведомого:

$$\Omega_{2отн} = \frac{\Omega_{кач2}}{\sin \gamma_{12}^v}, \quad (23)$$

где  $\gamma_{11}^v$  и  $\gamma_{12}^v$  – углы направляющих косинусов нормали к поверхностям зубьев ведущего колеса на головках и ножках соответственно.

Из выражения (22) и (23) следует, что направления вектора угловой относительной скорости вращения в круговинтовой глобоидно-цилиндрической зубчатой передаче параллельно оси вращения ведомого колеса.

Вектор угловой относительной скорости вращения направлен по нормали и сопряженным поверхностям. Абсолютная величина угловой скорости вращения равна проекции относительной скорости вращения на нормаль в глобоидно-цилиндрической зубчатой круговинтовой зубчатой передаче (рисунок 2).

Угловая скорость вращения:

для головок зубьев ведущего и ножек зубьев ведомого круговинтовых колес в глобоидно-

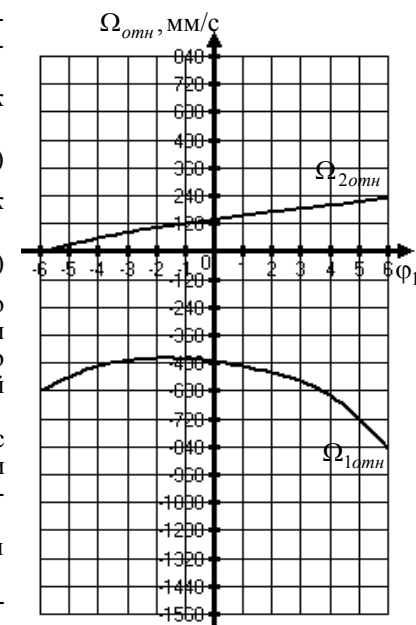


Рисунок 1 – Относительная скорость вращения зубчатых колес

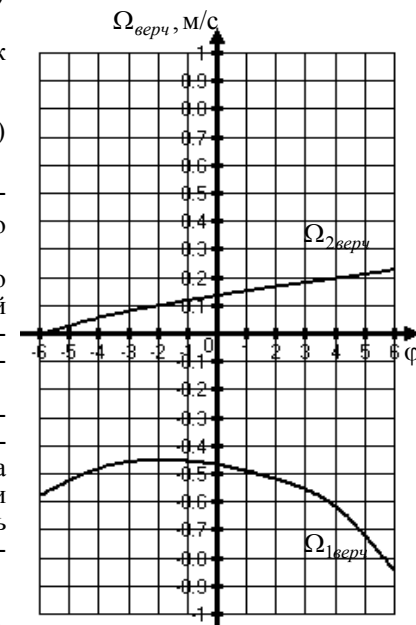


Рисунок 2 – Угловая относительная скорость вращения

цилиндрической зубчатой передаче:

$$\Omega_{1\text{верч}} = \Omega_{1\text{отн}} \cos \gamma_{11}^v, \quad (24)$$

для ножек зубьев ведущего колеса и головок ведомого:

$$\Omega_{2\text{верч}} = \Omega_{2\text{отн}} \cos \gamma_{12}^v. \quad (25)$$

При наличии относительного скольжения центр вращения находится на линии, перпендикулярной к вектору относительной скорости скольжения в проходящей через точку контакта на определенном расстоянии для головок зубьев ведущего колеса и ножек зубьев ведомого.

Одной из причин износа поверхностей зубьев является скольжение:

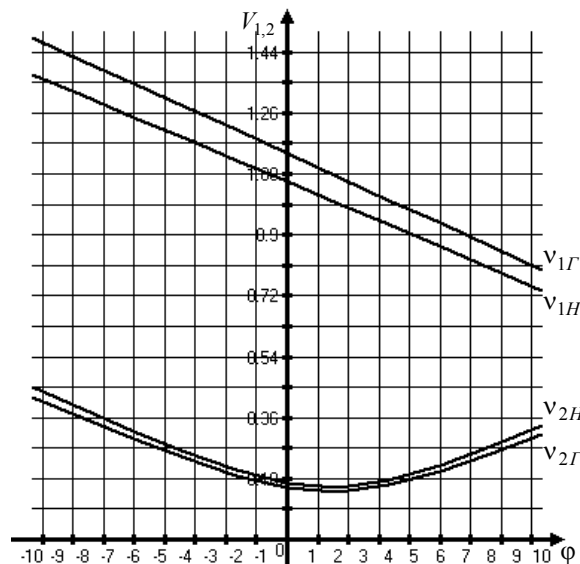


Рисунок 3 – Коэффициент скольжения зубьев

$$v = \frac{V_c}{V_{1,2}}, \quad (26)$$

где  $V_c$  – скорость скольжения,  $V_{1,2}$  – скорость точки профиля, находящейся в контакте.

**Выводы.** Анализ зависимости (26) показывает, что коэффициент скольжения имеет минимальное значение в горловом сечении глобоидно-цилиндрической зубчатой круговинтовой передачи, и максимальное – на границе торцевых плоскостей глобоидного колеса.

Из рисунка 3 следует, что коэффициент скольжения зубьев на головках и ножках отличается незначительно для одного зуба.

При контактировании головки зуба ведомого колеса с ножкой зуба ведущего колеса коэффициент скольжения значительно выше, чем при контактировании головки зуба ведущего колеса с ножкой ведомого колеса, где он очень близок.

Следовательно, контакт головки зуба ведомого колеса с ножкой зуба ведущего колеса менее благоприятный. Поэтому следует ожидать первоначальный износ их до приработки выше, чем на головках ведущего колеса с ножками ведомого.

**Список литературы:** 1. Дусев И.И. Кривизна нормальных сечений зубьев пространственных зацеплений // Тр. Новочеркасского политехн. ин-та – Новочеркасск, 1963. – Т.149. – С.113-119. 2. Краснощеков Н.Н., Федякин Р.В., Чесноков В.А. Теория зацепления Новикова. – М.: Наука, 1976. – 173с. 3. Крылов Н.Н. Глобоидное зацепление с точечным контактом // Зубчатые передачи с зацеплением Новикова. Сборник статей. Выпуск II. – М.: ВРМА им. Н.Е. Жуковского, 1962. 4. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 5. Павленко А.В., Федякин Р.В., Чесноков В.А. Зубчатые передачи с зацеплением Новикова. – Киев, Техніка, 1978. – 144с. 6. Трубников В.А. Исследование геометрии и нагрузочной способности винтовой передачи с элементами глобоидности. Автореф. дисс. ... канд.техн.наук. – Л., 1972. – 20с. 7. Утутов Н.Л., Коробка Н.В. Уравнения поверхностей зубьев глобоидно-цилиндрической зубчатой передачи Новикова // Вестник Восточноукр. нац. ун-та им. В. Даля. – Луганск, 2012. – №13(184), ч.1 – С.103-107.

Поступила (received) 25.02.2014

А.Л. ФИЛИПЕНКОВ, д.т.н., профессор БГТУ "Военмех", С.-Петербург, Россия

## АНАЛИЗ ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ С ЦИРКУЛЯЮЩЕЙ МОЩНОСТИ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

Рассмотрены структурные и кинематические схемы двухступенчатых планетарных передач, составленные из механизмов известных типов. Особое внимание уделено анализу двухступенчатых передач с циркулирующей мощностью в замкнутом контуре и определению их коэффициента полезного действия.

**Ключевые слова:** планетарная передача, коэффициент полезного действия.

**Постановка проблемы.** Известные преимущества планетарных передач обусловили их широкое применение в различных отраслях техники. Накопленный опыт проектирования и расчета основных типов представлен в известных справочниках и методических рекомендациях ГОССТАНДАРТА [1-5 и др.]. Вместе с тем, в течение двух последних десятилетий справочная литература, посвященная планетарным передачам, не издавалась. Этот недостаток недостаточно восполнялся статьями в научно-технических сборниках и журналах. Предпринимаемые в настоящее время попытки изыскать пути повышения несущей способности и КПД планетарных передач в ряде статей не опираются на достоверные теоретические принципы и результаты экспериментальных исследований. В основание предлагаемых конструкций планетарных передач закладываются варианты кинематических схем с недопустимо высокой циркулирующей мощностью в замкнутом контуре [6], дается ошибочная трактовка понятия многопоточности и вводится необоснованная новая терминология.

В данной статье ставится задача синтеза и анализа всех возможных структурных и кинематических схем двухступенчатых планетарных передач. Особое внимание уделяется вопросам выбора рациональных вариантов кинематических схем и методики расчета КПД замкнутых передач с циркулирующей мощностью.

**Классификация и кинематические формулы планетарных передач.** Многоступенчатые планетарные передачи составляют из механизмов, основные типы которых классифицированы в рекомендациях ГОССТАНДАРТА [4], рисунок 1. Для обозначения основных звеньев использованы символы  $a$ ,  $b$ , водила –  $h$ , а для венцов сателлитов –  $g$  и  $f$ .

Для расчета кинематики планетарных передач используют символ угловой скорости  $\omega$  с добавлением индекса звена. Передаточное отношение между звеньями обозначается буквой  $i$  с добавлением двух индексов, соответствующих обозначениям вращающихся звеньев. Верхний индекс соответствует обозначению звена, относительно которого рассматривается движение двух других звеньев. В общем случае для планетарного механизма с основными звеньями  $A$ ,  $B$  и  $C$ , соответственно, с угловыми скоростями  $\omega_A$ ,  $\omega_B$  и  $\omega_C$  установлена следующая система условных обозначений передаточных отношений

$$\begin{aligned} i_{AC}^B &= (\omega_A - \omega_B) / (\omega_C - \omega_B) = \omega_A / \omega_C, \text{ если } \omega_B = 0; \\ i_{AB}^C &= (\omega_A - \omega_C) / (\omega_B - \omega_C) = \omega_A / \omega_B, \text{ если } \omega_C = 0; \\ i_{BC}^A &= (\omega_B - \omega_A) / (\omega_C - \omega_A) = \omega_B / \omega_C, \text{ если } \omega_A = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Передаточные отношения планетарной передачи связаны между собой тождественными равенствами

$$i_{AB}^C = 1 - i_{AC}^B; \quad i_{AB}^C = 1 / i_{BA}^C. \quad (2)$$