

леса;  $f_i = 4 \cdot A_e / (A_e^2 - B_e^2)$  – геометрический коэффициент;  $Eu = p_a / (\rho \cdot V_{окр}^2)$  – критерий подобия Эйлера;  $p_a$  – давление масловоздушной смеси во впадинах конического колеса;  $V_{окр} = \omega \cdot r_e$  – окружная скорость зубчатого колеса.

Для проверки адекватности принятых допущений при выводе зависимости (4) проведено сравнение результатов расчета по этой зависимости с экспериментальными данными [15]. Сравнение проведено в виде графиков зависимостей безразмерных коэффициентов от числа Рейнольдса ( $Re = \rho \cdot \omega r_e^2 / \mu$ ), приведенных на рисунке. Сравнительный анализ результатов расчета и эксперимента показывает хорошую их корреляцию (погрешность не превышает 10%).

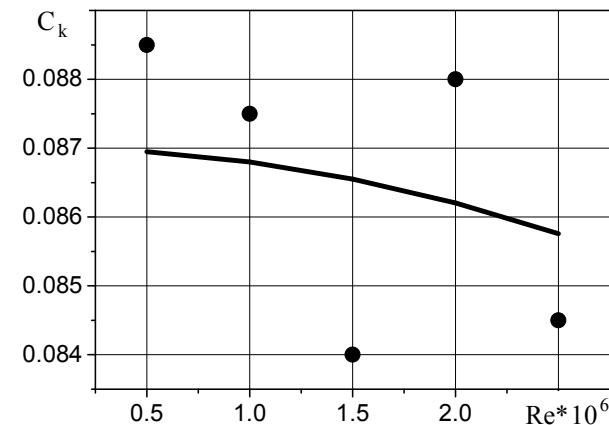


Рисунок – Зависимость безразмерного момента аэродинамического сопротивления от числа Рейнольдса:  
● – результаты экспериментального исследования [15];  
— – результаты расчета по зависимости (4)

**Выводы.** Полученная аналитическая зависимость, дающая возможность с минимальными затратами вычислительных усилий количественно оценивать аэродинамические потери высокоскоростных конических зубчатых передач. Результаты сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных позволяют рекомендовать полученную зависимость для оценки потерь энергии при эксплуатации конических зубчатых передач на стадии проектирования.

**Список литературы:** 1. Handschuh R.F. Preliminary comparison of experimental and analytical efficiency results of high-speed helical gear trains / R.F. Handschuh, C.J. Kilmain // DETC'03: ASME 2003 Design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference. – 2003. – Vol.4B. – P.949-955. 2. Heingartner P. Determination power losses in the helical gear mesh / P. Heingartner, D. Mba // Gear technology. – 2005. – P.32-37. 3. Dawson P.H. High speed gear windage // GEC Review. – 1988. – №4(3). – P.164-167. 4. Dawson P.H. Windage loss in larger high-speed gears / Proc. Inst. Mech. Eng. – 1984. Part A: Power and process engineering. №198(1). – P.51-59. 5. Diab Y. Simulations and experimental investigations on windage losses in high-speed gears / Y. Diab, F. Ville, P. Velex, M. Wendling // VDI – Berichte. – 2005. – №1904. – P.1435-1450. 6. Diab Y. Windage losses in high speed gears – Preliminary experimental and theoretical results / Y. Diab, F. Ville, C. Chagnenet, P. Velex // ASME Journal of mechanical design. – 2004. – №126(5). – P.903-908. 7. Petty-Johnson T.T. An experimental investigation of spur gear efficiency / T.T. Petty-Johnson, A. Kahraman, N.E. Anderson, D.R. Chase // ASME Journal of mechanical design. – №130. – 2008. – 062601. – 10p. 8. Seetharaman S. An investigation of load-independent power losses of gear systems: PhD Dissertation / S. Seetharaman. – The Ohio State University, 2009. 9. Lord A.A. An experimental investigation of geometric and oil flow effects on gear windage and meshing losses: Ph.D. thesis / A.A. Lord. – University of Wales, Swansea, 1998. 10. Winfree D.D. Reducing gear windage losses from high speed gears / D.D. Winfree // Proceedings of DETC'00, ASME power transmission and gearing conference, Baltimore, Maryland, Sept. 10-13, 2000. P.747-756. 11. Johnson G. Experimental investigation into windage power loss from a shrouded spiral bevel gear / G. Johnson, K. Simmons, C. Foord // Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo 2007: Power for land, sea and air, Montreal, Canada, Paper.2007. – №GT2007-27885. 12. Al-Shibl K. Modelling gear windage power loss from an enclosed spur gears / K. Al-Shibl, K. Simmons, C.N. Eastwick // Proc. Inst. Mech. Eng. – 2007. – Part A, №221(3). – P.331-341. 13. Chaari F. Windage power loss in spur gear sets / F. Chaari, M. Ben Romdhane, W. Haddar, T. Fakhfakh, M. Haddar // WSEAS TRANSACTIONS on Applied and theoretical mechanics. – 2012. – №2. – P.159-168. 14. Farrall M. Computational investigation of the airflow through a shrouded bevel gear // Proceedings of ASME

Turbo Expo 2005. Reno-Tahoe, Nevada, 6-9 Jun., 2005. – Paper №GT2005-68879. 15. Rapley S. The Application of CFD to model windage power loss from a spiral bevel gear / S. Rapley, C. Eastwick, K. Simmons // Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo 2007: Power for land, sea and air, Montreal, Canada, 2007. – Paper №GT2007-27879. 16. Ставицкий В.В. Исследование аэродинамических потерь энергии в высокоскоростных прямоугольных цилиндрических передачах. / В.В. Ставицкий, П.Л. Носко. // Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков: ХПИ, 2010. – №27. – С.167-173.

Поступила (received) 11.03.2014

УДК 621.89

Г.П. ТАРИКОВ, д.т.н., профессор кафедры ДМ, П и СМ БелГУТ, Гомель, Беларусь;  
В.Н. ПАРХОМЕНКО, старший преподаватель кафедры СХМ ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь;  
В.В. КОМРАКОВ, к.т.н., доцент кафедры ИТ ГГТУ им. П.О. Сухого

### РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ С ТОЧЕЧНЫМ КОНТАКТОМ

В работе рассмотрено решение пространственной контактной задачи с учетом температуры применительно к зубчатому зацеплению. Выведены формулы для определения контактных напряжений возникающих на площадке контакта. Приведен числовой пример решения задачи.

**Ключевые слова:** контактная задача, площадка контакта, шестерня, колесо, термоупругость, точечный контакт, контактное напряжение

**Введение. Актуальность задачи.** В процессе работы зубчатой передачи (системы шестерня-колесо) зубья нагреваются, что влияет на распределение контактных давлений по площадке контакта. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения применительно к деталям машин и механизмов до сих пор является актуальной [5]. Большое количество работ посвящено изучению данного вопроса [4]. В работах [2, 3] данная задача исследуется с учетом тепловых явлений, т.е. решается пространственная контактная задача термоупругости.

**Цель работы.** Целью работы является решение пространственной контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче с точечным контактом.

**Постановка задачи.** Рассматривается термоупругая задача о контакте зубьев (шестерни и колеса) с начальным контактом в точке. При этом задаются радиусами кривизны контактирующих тел в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рисунок 1).

В работе [1] получено двумерное интегральное уравнение контактной задачи термоупругости первого рода

$$\delta \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{2\pi} \iint_R^1 p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \frac{(\eta_1 + \mu_2)}{2\pi} \iint_R^1 \theta_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1)$$

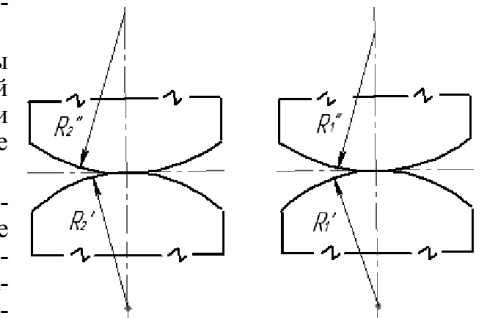


Рисунок 1 – Схема контакта поверхностей вращения с параллельными осями при внешнем соприкосновении

Введем обозначение

$$F(x_1, x_2) = (\vartheta_1 + \vartheta_2)P(x_1, x_2) - (\eta_1 + \eta_2)\theta_0(x_1, x_2). \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет такой вид:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} F(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (3)$$

Из теории потенциала известно, что решение уравнения (3) должно обращаться в нуль на границе элемента E.

$$E_0: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

где  $a, b$  ( $a \geq b$ ) – полуоси эллипса.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее этому условию имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = C \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (4)$$

Условие равновесия

$$P = \iint_{\Omega} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5)$$

где  $P$  – нормальная сила, прижимающая упругие тела.

На основании (2) и (4) имеем

$$C \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} = (\vartheta_1 + \vartheta_2)P(x_1, x_2) - (\eta_1 + \eta_2)\theta_0(x_1, x_2).$$

Отсюда находим

$$P(x_1, x_2) = \frac{C}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \theta_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (6)$$

Подставляя (6) в условие равновесия (5), получаем

$$C = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi ab} [(\vartheta_1 + \vartheta_2)P - (\eta_1 + \eta_2)D], \quad (7)$$

где

$$D = \iint_{\Omega} \theta_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (8)$$

На основании (6) и (7) окончательно имеем

$$P(x_1, x_2) = \frac{3}{2\pi ab} (P - \gamma D) \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma \theta_0(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (9)$$

Формула (9) определяет распределение давления по эллиптической площадке контакта. Здесь  $\gamma = (\eta_1 + \eta_2) / (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ .

Исследуем влияние температуры на величину контактного давления и размеры области контакта. В основу исследования положим интегральное уравнение (1). Решение этого уравнения дается формулой (9). Для дальнейшего необходимо конкретизировать вид функции  $\theta_0(x_1, x_2)$ , входящей в формулу (9).

В работе [3] показано, что функцию  $\theta_0(x_1, x_2)$  целесообразно принять в таком виде:

$$Q_0(x_1, x_2) = Q_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (10)$$

где  $Q_0$  – температура в центре площадки контакта.

Подставляя (10) в (9), находим

$$P(x_1, x_2) = \frac{3}{2} \left( P_c - \frac{1}{2} \gamma \theta_0 \right) \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma \theta_0 \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (11)$$

Давление в центре области контакта

$$P_{\max} = \frac{3}{2} P_c + \frac{1}{4} \gamma \theta_0. \quad (12)$$

Рассмотрим вопрос об определении размеров площадки контакта. Для этого подставим формулы (4), (7) в уравнение (3). После вычисления интеграла по области  $\Omega$  приходим к соотношению

$$2\pi \left[ \delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} \right] = P_0 (I_0 - I_1 x_1^2 - I_2 x_2^2), \quad (13)$$

где

$$P_0 = \frac{3(v_1 + v_2)}{2\pi ab} (P - \gamma D). \quad (14)$$

Из (13) находим

$$\delta = \frac{1}{2} P_0 b K(e); \quad \frac{1}{R_1} = \frac{P_0}{\pi} I_1; \quad \frac{1}{R_{21}} = \frac{P_0}{\pi} I_2. \quad (15)$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{K(e) - E(e)}{\frac{1}{1-e^2} E(e) - K(e)}. \quad (16)$$

Из формулы (16) можно определить эксцентриситет  $e$  эллипса  $E_0$ . Эта формула имеет точно такой же вид, как и при рассмотрении контактной задачи без учета температуры. Следовательно, температура зубьев не влияет на величину  $e$ .

Учитывая (14) и (15), получаем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{3(v_1 + v_2)}{2\pi e^2 a^3} (P - \gamma D) [K(e) - E(e)]. \quad (17)$$

Если в формулу (8) подставить выражение (7), то будем иметь

$$D = \frac{1}{2} 2\pi ab \theta_0. \quad (18)$$

Из (17) с учетом (18) получаем уравнение для определения параметра  $\varepsilon$

$$\varepsilon^3 + \omega \varepsilon^2 = 1, \quad (19)$$

где

$$a = \varepsilon a_0; a = \frac{1}{R_1} = [(v_1 + v_2) P R_1]^{1/3} \alpha_a; (20) \quad \omega = \frac{3}{4} (\eta_1 + \eta_2) \frac{R_1 \theta_0}{a_0 e^2} (1 - e^2)^{1/2} [K(e) - E(e)]. (21)$$

Величину  $\alpha_a$  можно найти по (13). Здесь  $a$  – большая полуось эллипса  $E_0$ .  
Величину полуоси  $b$  можно найти по первой формуле (20), а полуось  $b$  из соотношения

$$b = a(1 - e^2)^{1/2}.$$

Эксцентриситет граничного эллипса  $E_0$  можно найти из (16). Распределение давления на площадке контакта дается формулой (11), а величину  $P_{\max}$  можно определить по (12).

На рисунке 2 представлен график зависимости параметра  $\varepsilon$  от величины  $\omega$ .

Из этого графика следует, что  $\varepsilon \leq 1$ . Таким образом величина  $a$  с учетом температуры меньше, чем без учета температуры.

**Пример.** Значения расчетных контактных напряжений одинаковы для шестерни и колеса. Поэтому расчеты на прочность выполняют для того из колес пары, у которого меньшее допустимое напряжение (чаще это бывает колесо, а не шестерня). Полученные выше формулы используют для проверочного расчета, когда все необходимые размеры и другие параметры зубчатой передачи известны.

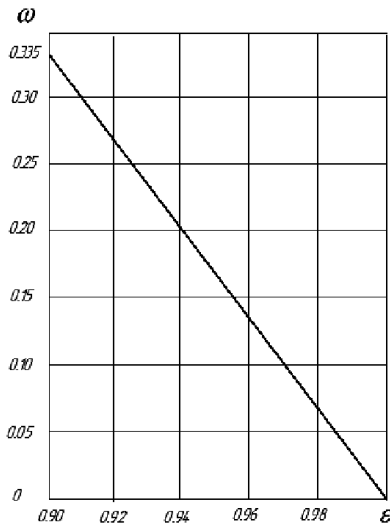


Рисунок 2 – График зависимости параметра  $\varepsilon$  от величины  $\omega$

Принимаем:

$$\rho_1 = 30 \text{ мм}; \rho_2 = 60 \text{ мм}; R = 70 \text{ мм},$$

где  $\rho_1, \rho_2$  – радиусы кривизны боковых профилей выпуклых зубьев;  $R$  – радиусы кривизны образующей боковой поверхности зуба шестерни,

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \mu = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu = 0,28,$$

где  $E$  – модуль продольной упругости (модуль Юнга);  $\mu$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Полагаем, что распределение температуры по площадке контакта подчиняется закону (20),

$$\alpha = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}; \theta_0 = 200^\circ\text{C}; \nu = 0,28;$$

$$\eta_1 + \eta_2 = 2(1 + \nu)\alpha = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}; R_2 / R_1 = 0,286.$$

По формуле (18) определяем эксцентриситет  $e^2 = 0,811$ . По второй формуле (20) находим величину  $a_0 = 3,43 \text{ мм}$ . Далее определяем безразмерный параметр  $\omega$  по формуле (21)

$$\omega = \frac{3}{4} \cdot 3,33 \cdot 10^{-5} \frac{70 \cdot 200}{3,43 \cdot 0,811} (1 - 0,811)^{1/2} (-1,171 + 2,281) = 0,0607.$$

Решая кубическое уравнение (19), находим  $\varepsilon = 0,982$ .

Большая полуось эллиптической площадки контакта

$$a = \varepsilon a_0 = 0,982 \cdot 3,43 = 3,37 \text{ мм};$$

меньшая полуось

$$b = a(1 - e^2)^{1/2} = 3,37(1 - 0,811)^{1/2} = 1,47 \text{ мм}.$$

Наибольшее давление на площадке контакта находим по формуле (12)

$$P_{\max}^T = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{1}{4} \theta_0 \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right) = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{\theta_0 \mu \alpha}{4} \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 3,37 \cdot 1,47 \cdot 10^{-6}} + \frac{200,81 \cdot 10^{10} \cdot 1,3 \cdot 10^{-5} (1 + 0,28)}{4(1 - 0,28)} = (4,82 \cdot 10^9 + 9,36 \cdot 10^7) \text{ Па} = 4,91 \cdot 10^9 \text{ Па} = 4910 \text{ МПа}.$$

Давление в любой точке площадки контакта  $\Omega_2$  с учетом температуры определяется формулой (11).

Имеем

$$\frac{3}{2} \left( P_c - \frac{1}{2} \gamma \theta_0 \right) = 4,82 \cdot 10^9 - 3 \cdot 9,36 \cdot 10^7 = 4,53 \cdot 10^9 \text{ Па} = 4,53 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Следовательно

$$P^T(x_1, x_2) = 4536 \left( 1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right)^{1/2} + 374 \left( 1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega_1. (22)$$

Здесь  $P^T$  – давление на площадке контакта с учетом температуры;  $x_1, x_2$  в формуле (22) отсчитываются в мм. Давление  $P^T(x_1, x_2)$  в (22) выражается в МПа.

Полагая в формуле (22)  $x_2 = 0$ , получим

$$P^T(x_1, 0) = 4536 \left( 1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} \right)^{1/2} + 374 \left( 1 - \frac{x_1^2}{3,37^2} \right), |x_1| \leq 3,37 \text{ мм};$$

$$P^T(0, x_2) = 4536 \left( 1 - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right)^{1/2} + 374 \left( 1 - \frac{x_2^2}{1,47^2} \right), |x_2| \leq 1,47 \text{ мм}.$$

По этим формулам можно вычислять давление в точках, расположенных на осях координат. В этих формулах давление  $P^T$  выражается в МПа.

**Выводы.** Решена пространственная термоупругая контактная задача применительно к зубчатой передаче с первоначально точечным контактом. Получены формулы для определения контактных напряжений на площадке контакта. Дан числовой пример решения конкретной задачи.

**Список литературы:** 1. Таригов Г.П. К решению контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче / Г.П. Таригов, В.Н. Пархоменко // Вестник ГТТУ им. П.О. Сухого. – 2013. – №4. – С.43-49. 2. Бородачев Н.М. О решении пространственной температурной задачи теории упругости в перемещениях / Н.М. Бородачев, В.В. Астахин // Проблемы прочности. – 2005. – №3. – С. 86-95. 3. Бородачев Н.М. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения / Н.М. Бородачев, Г.П. Таригов // Трение и износ. – 2003. – Т.24. – №2. – С.153-160. 4. Бородачев Н.М. О задаче Герца с учетом тепловыделения / Н.М. Бородачев, Г.П. Таригов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т.47. – №2. – С.35-43. 5. Иванов М.Н. Детали машин / М.Н. Иванов. – М.: Высшая школа, 1991. – 383с. 6. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М. Наука, 1970. – 939с.

Поступила (received) 11.03.2014