

шому випадку западина залишається частково заповненою. Досліджено залежність  $Re_a^*$  від геометричних параметрів зубчастого колеса та глибини занурення останнього в оливу ванну. Виявлено, що кількість оливи в западинах залежить не лише від частоти обертання колеса, але й від площі торцевого перетину западини, що визначається геометричними параметрами колеса та величиною торцевих зазорів. При зменшенні торцевих зазорів за критичні значення  $\delta_{1,2} \leq \delta_{1,2}^{kp}$  ( $y_{1,2} \leq 1$ ) визначальною стає площа торцевого зазору. Критичне значення торцевого зазору запропоновано розраховувати так:  $\delta_i^{kp} = (A_i^2 - B_i^2) / (2 \cdot B_i)$ . При перевищенні критичних значень зміна торцевого зазору не впливає на втрати потужності внаслідок аерогідродинамічного опору.

### Висновки.

1. Запропоновано прості аналітичні вирази, які надають можливість з мінімальними витратами обчислювальних зусиль визначати енергетичну ефективність високошвидкісних зубчастих передач.
2. Виявлено природу аерогідродинамічного опору обертанню зубчастих коліс: а) основним фактором є сили Кориоліса; б) нелінійність впливу на втрати потужності ширини зубчастого вінця обумовлена протиріччю зростанням сили Кориоліса та зменшенням щільності оливоповітряної суміші між зубцями при збільшенні ширини зубчастого вінця.
3. Отримано залежності, що визначають межі: а) впливу торцевих зазорів на втрати потужності внаслідок аерогідродинамічного опору; б) застосування змащування зануренням; с) розрідженості суміші в просторі між зубцями.
4. Отримані залежності стали основою інженерних методів аналізу енергоефективності високошвидкісних зубчастих передач, які дозволяють оптимізувати їх геометричні параметри за умови максимального ККД.

**Список літератури:** 1. Heingartner P. Determination power losses in the helical gear mesh / P. Heingartner, D. Mba // Gear technology. – 2005. – P. 32-37. 2. Anderson N.E. Effect of geometry and operating conditions on spur gear system power loss / N.E. Anderson, S.H. Loewenthal // ASME Journal of mechanical design. – 1981. – Vol. 103. – P. 151-159. 3. Anderson N.E. Design of spur gears for improved efficiency / N.E. Anderson, S.H. Loewenthal // ASME Journal of mechanical design, № 104. – 1982. – P. 767-774. 4. Dawson P.H. High speed gear windage. // GEC Review. – 1988. – № 4(3). – P. 164-167. 5. Dawson P.H. Windage loss in larger high-speed gears. / Proc. Inst. Mech. Eng. – 1984. Part A: Power and process engineering, № 198(1). – P. 51-59. 6. Barnes J.P. Non-dimensional characterization of gear geometry / Mesh loss and windage. Fall AGMA/ASME Meeting, San Diego, CA. – 1997. 97FTM11, p. 12. 7. Lord A.A. An experimental investigation of geometric and oil flow effects on gear windage and meshing losses: Ph.D. thesis / A.A. Lord. – University of Wales, Swansea, 1998. 8. Mizutani H. Power loss of long addendum spur gears with large chamfer on tooth tip-ends / H. Mizutani // Fourth World congress on gearing and power transmission, Paris, France, 1999. 9. Diab Y. Windage losses in high speed gears – Preliminary experimental and theoretical results. / Y. Diab, F. Ville, C. Chagnenet, P. Velex // ASME Journal of mechanical design. – 2004. – № 126(5). – P. 903-908. 10. Diab Y. Simulations and experimental investigations on windage losses in high-speed gears. / Y. Diab, F. Ville, P. Velex, M. Wendling // VDI-Berichte. – 2005. – № 1904. – P. 143-145. 11. Seetharaman S. An investigation of load-independent power losses of gear systems: PhD Dissertation / S. Seetharaman. – The Ohio State University, 2009. 12. Handschuh R.F. Preliminary comparison of experimental and analytical efficiency results of high-speed helical gear trains / R.F. Handschuh, C.J. Kilmain // DETC'03: ASME 2003 Design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference. – 2003. – Vol. 4B. – P. 949-955. 13. Terekhov A.S. Basic problems of heat calculation of gear reducers / A.S. Terekhov // JSME International conference on motion and power transmissions, Hiroshima, Japan, 1991. – P. 490-495. 14. Lauster E. Zum Wärmehaushalt mechanischer Schaltgetriebe für Nutzfahrzeuge / E. Lauster, M. Boos // VDI – Berichte. – 1983. – № 488. – P. 45-55. 15. Boness R.J. Churning losses of discs and gear running partially submerged in oil. // Proceedings of the ASME international power transmission and gearing conference, Chicago. – 1989. – Vol. 1. – P. 355-359. 16. Chagnenet C. A Model for the prediction of churning losses in geared transmissions – preliminary results. / C. Chagnenet, P. Velex // ASME Journal of mechanical design. – 2007. – № 129. – P. 128-133. 17. Stavitsky V. Load-independent power losses of gear systems: a review / Stavitsky V., Nosko P., Fil P., Karpov O., Velichko M. // TEKA. Commission of motorization and power industry in agriculture. – 2010. – Vol. XB, P. 205-259.

Поступила (received) 31.03.2015

**П.М. ТКАЧ**, к.т.н., доц., старший науковий співробітник відділу міцності зварних конструкцій ІЕЗ ім. Є.О. Патона НАН України, Київ

## ВИЗНАЧЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ПРОФІЛЮВАННЯ ВИХІДНИХ КОНТУРІВ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРЯМОЗУБИХ ПЕРЕДАЧ КРИВИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У статті розглянуто можливість застосування еліпсу, параболи та гіперболи для утворення профілю вихідного контуру. Визначено граничні параметри профільного кута і коефіцієнта висоти профілю, за яких застосування зазначених кривих є можливим. Розроблено рекомендації з вибору параметрів вихідного контуру таких передач, встановлено зв'язок між ними. Запропоновано загальний алгоритм вибору параметрів. Перевірено можливість застосування гіперболічного вихідного контуру замість традиційного та вихідного контуру для авіаційних зубчастих коліс. З використанням результатів даної роботи можна проводити подальші дослідження геометрії таких передач.

**Ключові слова:** вихідний контур, прямий зуб, профільний кут, зубчаста рейка.

**Вступ. Актуальність завдання.** Якісні показники зубчастих приводів, що входять до складу більшості сучасних машин, дуже суттєво впливають на технічний рівень та показники самих машин. Річні обсяги виробництва машинобудівної галузі передових країн світу постійно зростають. Про це свідчать і постійно зростаючі обсяги виготовлення зубчастих коліс [1]. Через це завдання підвищення якості передач зачепленням набуває особливої актуальності.

**Аналіз літератури.** Досить розповсюдженим способом удосконалення передач є вибір для них раціональних геометричних параметрів. Такий спосіб знайшов своє відображення у наукових працях багатьох вітчизняних та зарубіжних учених, починаючи з синтезу евольвентного зачеплення [2] і закінчуючи працями останніх років, наприклад [3-5], де геометрія вихідного контуру синтезується безпосередньо за критеріями працездатності [6] або за лінією зачеплення та забезпечує опукло-ввігнутий контакт.

У цих працях автори розглядають робочу та перехідну ділянки вихідного контуру окремо, причому для вибору їх параметрів приймаються до уваги різні критерії працездатності. Параметри робочого профілю вибирають за контактною міцністю, перехідної ділянки – за згинальною міцністю. Таких підхід є цілком логічним, але запаси за даними критеріями можуть істотно відрізнитися одне від одного, особливо для евольвентних передач.

Новий підхід до утворення профілю вихідного контуру запропоновано в роботі [7]. Він полягає у одночасному визначенні форми обох ділянок профілю, як розв'язок єдиної задачі. Для реалізації такого підходу мають перспективи гладкі криві, що дозволять описати обидві ділянки вихідного контуру однією функцією.

Вибір їх раціональних параметрів дозволить зрівняти або наблизити значення запасів за контактною і згинальною міцністю. Прикладом таких кривих можуть бути криві другого порядку. Найпоширеніша з них крива, що застосовувалася для профілювання вихідного контуру, – це коло. Воно описує вихідний контур передач Новікова [8] та конхoidalних передач, які відомі давно та досліджуються дотепер [9, 10]. Однак в обох випадках коло застосовується для профілювання лише робочої ділянки вихідного контуру, і для таких вихідних контурів потрібна окрема перехідна крива.

© П.М. Ткач, 2015

Крім кола із кривих другого порядку для утворення зубців застосовано еліпс. Наприклад, його використано для профілювання зубців шестірни та колеса в нормальному перерізі при створенні еліптичного зачеплення із точковим контактом, що представлено в роботі [11]. При цьому еліпсом описано як робочу, так і перехідну ділянки. Однак можливість профілювання еліпсом вихідного контуру для передач із лінійчатим контактом розглянута не була. Еліптичний вихідний контур (ЭЛ-72) запропоновано у роботі [12]. Там він застосовувався як профіль різця для утворення кінцевих кругових зубців, але за твердженням авторів його розглянуто "чисто геометрично, лише як приклад зачеплення".

У останні роки було розроблено новий високопродуктивний спосіб виготовлення зубців коліс довільного профілю [13]. Даний спосіб окрім суто технологічних переваг забезпечує також більшу економічну ефективність [14]. Останнє має вирішальне значення, якщо застосовувати цей спосіб при виготовленні нових видів зубчастих передач.

Таким чином, технологічні складності, як головну перешкоду на шляху розробки та впровадження таких передач, завдяки способу [13] подолано. Як впливає з аналізу робіт, наразі не створено математичної моделі передач, яка дозволила б функціонально зв'язати параметри профілюючої кривої (еліпса, параболи, гіперболи) з показниками працездатності (міцністю, зносостійкістю, теплостійкістю, втратами в зачепленні). Наявність такого зв'язку дозволить ефективно вирішувати як завдання аналізу якості зачеплення, так і завдання синтезу за якісними показниками геометрії різального інструменту.

**Мета статті:** створити основу для синтезу нових типів зачеплень, визначивши геометричні параметри кривих другого порядку, за яких їх використання в якості вихідних контурів буде можливим.

**Постановка завдання.** Оскільки функції кривих, що описують вихідний контур відомі, завдання зводиться до визначення для цих кривих раціональних значень параметрів, що забезпечують у передачах близькі значення запасів за контактною і згинальною міцністю. На основі математичної моделі можна виконати порівняльний аналіз таких передач із традиційними за показниками працездатності. Тому необхідно встановити зв'язки між параметрами, а також визначити область їх існування.

**1. Еліптичний профіль.** Звичним і доволі зручним для реалізації синтезу вихідного контуру [3,10] є його представлення у параметричному виді [15], тобто за допомогою параметру  $\lambda$  та функцій загального виду  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$ . Зв'яжемо ці функції з системою координат вихідного контуру  $X_k O_k Y_k$  (рисунк 1), початок якої знаходиться на початковій прямій (на рисунку 1 її позначено "n.n."). Тоді координати точок вихідного контуру будуть визначатися як  $x_k = f_1$ ,  $y_k = f_2$  (тут і в подальшому параметр  $\lambda$  будемо відкидати для скорочення записів).

Будемо розглядати верхню частину вихідного контуру, вважаючи нижню – симетричною відносно початку координат  $O_k$ .

Еліпс, частина якого утворюватиме вихідний контур, задаймо у системі координат  $X_e O_e Y_e$  (рисунк 1). Його рівняння у канонічному виді у системі координат, пов'язаній з вихідним контуром

$$(x_0 + f_1)^2/a^2 + (y_0 - f_2)^2/b^2 = 1, \quad (1)$$

де  $a, b$  – півосі еліпса;  $x_0, y_0$  – координати його центру у системі  $X_k O_k Y_k$ .

Для визначення можливості використання частин еліпсу в якості ділянок вихідного контуру треба визначити координати  $x_0$  і  $y_0$ , а також установити співвідношення між півосями і визначити їх вплив на профільний кут на початковій прямій  $\alpha_n$  та висоту профілю  $h$  (рисунк 1).

Координати центру впливають з побудови контуру, тобто

$$x_0 = a - h; \quad y_0 = 0,25\pi. \quad (2)$$

Для стандартних вихідних контурів висота  $h$  є фіксованою. Наприклад, для прямобічного вихідного контуру, згідно з ГОСТ 13755-81, висота приймається (у долях модуля)  $h_a = 1$ ,  $h_f = 1,25$ . Оскільки контур, що розглядається є нестандартним, будемо вважати його висоту  $h$  змінною величиною.

Для того, щоб частина еліпса могла бути використана для профілювання вихідного контуру, треба, щоб ця частина перетинала початкову пряму у початку координат  $O_k$ . Тобто, має виконуватися умова  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ . Підставивши ці значення до (1), з урахуванням (2) маємо співвідношення

$$b = 0,25\pi a / \sqrt{2ah - h^2}. \quad (3)$$

Щоб знаменник у (3) не дорівнював нулю, а під коренем було додатне значення, необхідно, щоб

$$h < 2a. \quad (4)$$

Очевидно, що значення більшої півосі  $a$  впливає на висоту профілю і на профільний кут на початковій прямій. Кут у будь-якій точці профілю можна визначити зі співвідношення [15]

$$\operatorname{tg} \alpha = f_2' / f_1', \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha = f_2'(f_1). \quad (5)$$

Другий спосіб визначення профільного кута в даному випадку є зручнішим, але для цього треба визначити функцію  $f_2'(f_1)$  в явному виді. Знайдемо її з рівняння (1) з урахуванням (2)

$$f_2 = 0,25\pi - (b/a) \cdot \sqrt{2a(h - f_1) - (h - f_1)^2}. \quad (6)$$

Знайдемо першу похідну (6) за  $f_1$  і одержимо

$$\operatorname{tg} \alpha = f_2' = b(a - h + f_1) / \left[ a \sqrt{2a(h - f_1) - (h - f_1)^2} \right]. \quad (7)$$

Співвідношення (7) за умови  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$  дасть значення профільного кута на початковій прямій. Визначимо його з урахуванням (3)

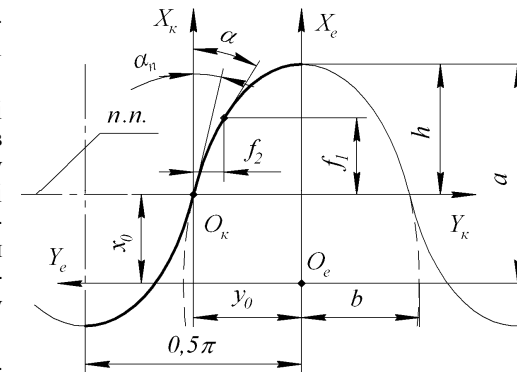


Рисунок 1 – Еліптичний вихідний контур (модуль 1мм)

$$\operatorname{tg} \alpha_n = 0,25\pi(a-h)/(2ah-h^2). \quad (8)$$

Цілком очевидно, що співвідношення (8) однозначно пов'язує величину більшої півосі  $a$  еліпса з профільним кутом на початковій прямій  $\alpha_n$  при фіксованій висоті профілю  $h$ .

Таким чином, вибір параметрів еліптичного профілю зводиться до визначення  $a$  з (8)

$$a = (4h^2 \operatorname{tg} \alpha_n - \pi h)/(8h \operatorname{tg} \alpha_n - \pi). \quad (9)$$

Як випливає з (4), значення  $a$  має задовольняти умові  $a > 0,5h$ , тобто бути додатним. Останнє можна забезпечити, якщо

$$4h^2 \operatorname{tg} \alpha_n - \pi h > 0, \text{ та } 8h \operatorname{tg} \alpha_n - \pi > 0, \quad (10)$$

або

$$4h^2 \operatorname{tg} \alpha_n - \pi h < 0, \text{ та } 8h \operatorname{tg} \alpha_n - \pi < 0, \quad (11)$$

Розв'язком (10) є інтервал

$$\operatorname{tg} \alpha_n > 0,25\pi/h. \quad (12)$$

Для (11) розв'язком буде інтервал

$$\operatorname{tg} \alpha_n < 0,125\pi/h. \quad (13)$$

Параметри, що впливають на геометрію вихідного контуру – висота  $h$  і півосі  $a, b$  – у співвідношення (1)-(13) визначаються і підставляються у долях модуля. Отже в межах кута (12) і (13) можна визначити більшу піввісь еліпса за рівнянням (9) і меншу піввісь – за рівнянням (3). Обмеження (2) при цьому вже враховано. Діапазони (12) і (13) не є остаточними і потребують подальшого уточнення. Для цього визначимо при  $h = 1,25$  мінімальне значення з (12). Воно дорівнює  $\alpha_n = 32,14^\circ$ , а при  $\alpha_n > 32,14^\circ$  більша піввісь, знайдена з (9) не задовольняє умові (4). Таким чином, інтервал (12) є неприйнятним. При тому ж  $h$ , верхнє граничне значення  $\alpha_n$  з (13) дорівнює  $\alpha_n = 17,43^\circ$ . Отже, єдиною умовою використання еліпсу в якості профілю вихідного контуру є умова (13), що має виконуватися разом з (2) і (3).

**2. Параболічний профіль.** Застосуємо такий самий підхід, як для еліптичного профілю. Розглядатимемо також верхню частину вихідного контуру, а нижня буде симетричною відносно початку координат. Задамо параболу у власній системі координат  $X_n O_n Y_n$  (рисунок 2). У ній рівняння параболі має вид

$$y_n = ax_n^2, \quad (14)$$

де  $a$  – змінна величина, що набуває від'ємних значень.

Зв'яжемо рівняння (14) з функціями  $f_1$  і  $f_2$ , що описують вихідний контур у системі координат  $X_k O_k Y_k$  (рисунок 2), початок якої знаходиться на початковій прямій (на рисунку 2 її позначено "n.n."). Тоді, урахувавши, що  $x_k = f_1$ ,  $y_k = f_2$ , знаходимо рівняння параболі у системі координат, пов'язаній з вихідним контуром

$$f_1 - y_0 = a(f_2 - x_0)^2, \quad (15)$$

де  $x_0$  і  $y_0$  – координати вершини параболі у системі  $X_k O_k Y_k$ ,

$$x_0 = 0,25\pi, \quad y_0 = h. \quad (16)$$

Як і для еліптичного вихідного контуру, величину  $h$  будемо вважати змінною. Для того, щоб за допомогою параболі можна було описати вихідний контур, треба щоб вона проходила через початок координат, точку  $O_k$ . Для цього необхідним є виконання умови  $f_1 = 0$  і  $f_2 = 0$ . Підставляючи ці значення у (15) з урахуванням (16), одержуємо

$$a = -16h/\pi^2. \quad (17)$$

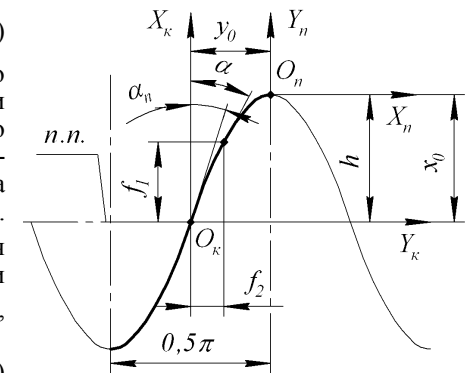


Рисунок 2 – Параболічний вихідний контур (модуль 1мм)

Оскільки висота  $h$  може бути тільки додатною, формула (17) даватиме від'ємні значення  $a$ , що є прийнятним для верхньої частини вихідного контуру.

Ключовим параметром, що впливає на показники працездатності, є профільний кут. Як було встановлено раніше, для його визначення необхідно знайти функцію  $f_2(f_1)$  у явному виді. Знайдемо її з (15) з урахуванням (16)

$$f_2 = 0,25\pi + \sqrt{(f_1 - h)/a}. \quad (18)$$

Тоді з (5) одержимо співвідношення для визначення профільного кута параболічного вихідного контуру

$$\operatorname{tg} \alpha = f_2' = 0,5/\sqrt{a(f_1 - h)}. \quad (19)$$

З (19) при  $f_1 = 0$  знайдемо кут профілю на початковій прямій

$$\operatorname{tg} \alpha_n = 0,5/\sqrt{-ah}. \quad (20)$$

Підкореневе вираження у (19) і (20) буде додатним, оскільки значення  $a$ , знайдене з (17), завжди є від'ємним. Підставимо його у (20) та одержимо

$$\operatorname{tg} \alpha_n = 0,125\pi/h. \quad (21)$$

Отже, умовою використання параболі в якості профілю вихідного контуру є співвідношення (21) разом з (16) і (17).

**3. Гіперболічний профіль.** Застосуємо для його описання підхід, аналогічний до п. 1 і 2. Також будемо розглядати лише верхню частину вихідного контуру, нижню вважатимемо симетричною відносно початку координат.

Задамо гіперболу у власній системі координат  $X_2 O_2 Y_2$  (рисунок 3). При переході до системи координат, що пов'язана з вихідним контуром  $X_k O_k Y_k$  (рисунок 3) одержимо рівняння

$$(x_0 - f_1)^2/a^2 - (f_2 - y_0)^2/b^2 = 1. \quad (22)$$

Параметри гіперболи  $a$  і  $b$  будемо вважати змінними величинами.

Як видно з рівняння (22), для гіперболи також є актуальним питання придатності до використання у якості вихідного контуру. Вирішення цього питання буде аналогічним до п.1. Тобто треба визначити координати  $x_0$  і  $y_0$ , пов'язати функціо-

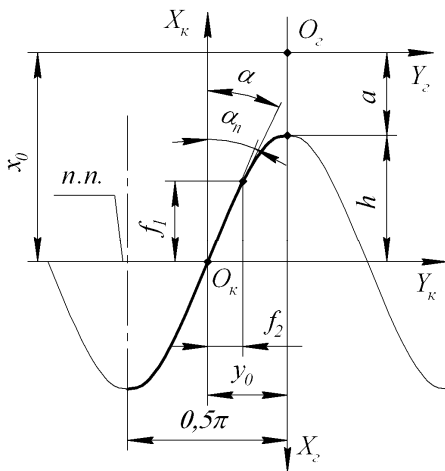


Рисунок 3 – Гіперболічний вихідний контур (модуль 1мм)

Вплив величини  $a$  на висоту профілю і на профільний кут на початковій прямій визначимо, задавши рівняння гіперболи в явному виді

$$f_2 = 0,25\pi - (b/a) \cdot \sqrt{2a(h - f_1) + (h - f_1)^2} \quad (25)$$

Перша похідна (25) за  $f_1$

$$\text{tg } \alpha = f_2' = (b/a) \cdot (a + h - f_1) / \sqrt{2a(h - f_1) + (h - f_1)^2} \quad (26)$$

Профільний кут на початковій прямій визначимо з (26) при  $f_1 = 0, f_2 = 0$

$$\text{tg } \alpha_n = 0,25\pi(a + h) / (2ah + h^2) \quad (27)$$

Визначаємо  $a$  з (27)

$$a = (\pi h - 4h^2 \text{tg } \alpha_n) / (8h \text{tg } \alpha_n - \pi) \quad (28)$$

Оскільки значення  $a$  має бути додатним, повинні виконуватися умови

$$\pi h - 4h^2 \text{tg } \alpha_n > 0 \text{ та } 8h \text{tg } \alpha_n - \pi > 0, \quad (29)$$

або

$$\pi h - 4h^2 \text{tg } \alpha_n < 0 \text{ та } 8h \text{tg } \alpha_n - \pi < 0. \quad (30)$$

Розв'язком (29) є інтервал

$$0,125\pi/h < \text{tg } \alpha_n < 0,25\pi/h, \quad (31)$$

а система (30) розв'язків не має. Отже умовами використання гіперболи для профілювання вихідного контуру є співвідношення (31) разом з (23) і (24). Параметри, що впливають на геометрію вихідного контуру –  $h, a$  і  $b$  – у ці співвідношення підставляються у долях модуля.

**Результати дослідження.** За допомогою співвідношень (2), (3) і (13) для еліпса, (16), (17) і (21) для параболи, (23), (24) і (31) для гіперболи встановлено обмеження з вибору параметрів вихідного контуру, описаного цими кривими. Узагальнення отриманих результатів представлено у таблиці.

Таблиця – Обмеження при застосуванні кривих другого порядку для профілювання вихідних контурів

Параметри	Крива другого порядку (рисунок 1, 2 і 3)		
	Еліпс	Парабола	Гіпербола
Координати центрів/вершин*	$x_0 = a - h$ $y_0 = 0,25\pi$	$x_0 = 0,25\pi$ $y_0 = h$	$x_0 = a + h$ $y_0 = 0,25\pi$
Параметри висоти профілю	$b = 0,25\pi a / \sqrt{2ah - h^2}$	$a = -16h / \pi^2$	$b = 0,25\pi a / \sqrt{2ah + h^2}$
Границі кута профілю	$\text{tg } \alpha_n < \pi / (8h)$	$\text{tg } \alpha_n = \pi / (8h)$	$\pi / (8h) < \text{tg } \alpha_n < \pi / (4h)$

\*Примітка. Значення координат ураховано при визначенні решти параметрів.

Спираючись на результати дослідження та аналізу таблиці, можна запропонувати такий алгоритм синтезу еліптичних та гіперболічних вихідних контурів.

1. Задаємо коефіцієнт висоти профілю  $h$ .  
2. Задаємо профільний кут на початковій прямій  $\alpha_n$ . Якщо його значення задовольняє умові (13), отримаємо еліптичний профіль; якщо умові (31) – гіперболічний.

3. Визначаємо (верхній знак – для еліпсу, нижній – для гіперболи)

$$a = (\pm 4h^2 \text{tg } \alpha_n \mp \pi h) / (8h \text{tg } \alpha_n - \pi) \quad (32)$$

4. Визначаємо (верхній знак – для еліпсу, нижній – для гіперболи)

$$b = 0,25\pi a / \sqrt{2ah \mp h^2} \quad (33)$$

5. З урахуванням (32) і (33) одержуємо рівняння вихідного контуру

$$f_2 = 0,25\pi - (b/a) \cdot \sqrt{2a(h - f_1) \mp (h - f_1)^2} \quad (34)$$

Верхній знак – для еліпсу, нижній – для гіперболи. Функції  $f_1$  і  $f_2$  обмежено  $0 \leq f_1 \leq h; 0 \leq f_2 \leq 0,25\pi$ .

6. Похідна (34) (верхній знак – для еліпсу, нижній – для гіперболи)

$$f_2' = (b/a) \cdot [a \mp (h - f_1)] / \sqrt{2a(h - f_1) \mp (h - f_1)^2} \quad (35)$$

Функція (34) і її похідна (35) є основою математичної моделі передач з еліптичним та гіперболічним вихідними контурами, що може бути використана у подальшому для визначення показників працездатності таких передач.

При виборі у якості профільного кута значення з (21), отримаємо параболический вихідний контур. Алгоритм буде таким.

1. Задаємо коефіцієнт висоти профілю  $h$ .

2. Обчислюємо кут профілю на початковій прямій  $\alpha_n = \arctg[\pi / (8h)]$ .

3. Визначаємо

$$a = -16h / \pi^2 \quad (36)$$

4. Рівняння вихідного контуру  $f_2 = 0,25\pi + \sqrt{(f_1 - h)/a}$ , або через (36)

$$f_2 = 0,25\pi(1 + \sqrt{1 - f_1/h}) \quad (37)$$

5. Перша похідна функції (37)  $f_2' = 0,5 / \sqrt{a(f_1 - h)}$  або через (36)

$$f_2' = 0,125\pi / \sqrt{h^2 - hf_1} \quad (38)$$

Функція (37) і її похідна (38) є основою математичної моделі передач з параболічним вихідним контуром, яку можна використовувати для визначення показників працездатності таких передач.

**Приклад.** Виконаємо синтез вихідного контуру, що має параметри відповідно до ГОСТ 13755-81.

1. Задаємо коефіцієнт висоти профілю  $h = 1,25$ .
2. Задаємо профільний кут  $\alpha_n = 20^\circ$ . Таке значення при  $h = 1,25$  відповідає гіперболі, оскільки  $\alpha_n > \arctg[\pi/(8h)] = \arctg[3,14/(8 \cdot 1,25)] = 17,43^\circ$ .

3. Визначаємо

$$a = (-4 \cdot 1,25^2 \operatorname{tg} 20^\circ + 3,14 \cdot 1,25) / (8 \cdot 1,25 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - 3,14) = 3,3 \quad (39)$$

4. Визначаємо

$$b = 0,25 \cdot 3,14 \cdot 3,3 / \sqrt{2 \cdot 3,3 \cdot 1,25 + 1,25^2} = 0,83 \quad (40)$$

5. Рівняння вихідного контуру

$$f_2 = 0,785 - 0,25 \cdot \sqrt{6,6(1,25 - f_1) + (1,25 - f_1)^2} \quad (41)$$

6. Перша похідна функції (41)

$$f_2' = 0,25 \cdot (4,55 - f_1) / \sqrt{6,6(1,25 - f_1) + (1,25 - f_1)^2} \quad (42)$$

Параметри за формулами (39)-(41) отримано у долях модуля.

Слід відзначити, що у межах  $0 \leq f_1 \leq 1$  функція (42) описує робочу ділянку вихідного контуру, а при  $1 < f_1 \leq 1,25$  – перехідну.

При  $f_1 = 1$  товщина зуба рейки, описаного гіперболою, на вершині буде дорівнювати (рисунком 4)

$$S_a = 0,5\pi - 2f_2^{\max} = 0,5 \cdot 3,14 - 2 \cdot 0,46 = 0,65,$$

де  $f_2^{\max}$  – значення функції  $f_2$  при  $f_1 = 1$ , що дорівнює

$$f_2^{\max} = 0,785 - 0,25 \cdot \sqrt{6,6(1,25 - 1) + (1,25 - 1)^2} = 0,46$$

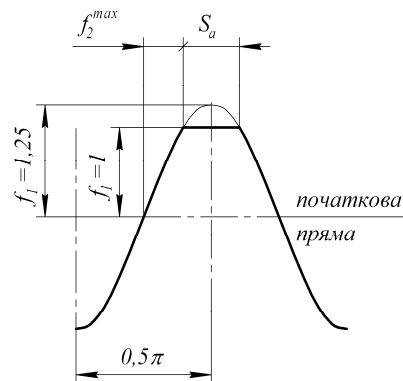


Рисунок 4 – Товщина зуба на вершині (модуль 1мм)

Отримане значення  $S_a = 0,65m$  є цілком прийнятним і свідчить про те, що загострення зубців при виготовленні не буде.

Аналогічні розрахунки для збільшених профільних кутів, що застосовуються для несиметричних зубців авіаційних зубчастих колес –  $\alpha_n = 25^\circ$  [16] і  $\alpha_n = 30,5^\circ$  [17] дають значення  $S_a = 0,55m$  і  $S_a = 0,38m$  відповідно. Це також є цілком прийнятним. Так, наприклад, автори [16] для вихідного контуру з кутом  $\alpha_n = 25^\circ$  приймають  $S_a = 0,35m$ .

**Висновки.** Розглянуто можливість застосування таких кривих другого порядку як еліпс, парабола і гіпербола при профілюванні вихідного контуру інструменту, що застосовується для виготовлення циліндричних прямозубих передач. При цьому:

1. Визначено граничні значення параметрів еліпсу, гіперболи і параболи, які уможливають застосування тих чи інших кривих у якості профілів вихідних контурів. Зокрема, для коефіцієнта висоти профілю  $h = 1,25$  при куті профілю на початковій прямій  $\alpha_n < 17,43^\circ$  профіль буде описано еліпсом, при  $\alpha_n > 17,43^\circ$  – гіперболою, а при  $\alpha_n = 17,43^\circ$  – параболою.

2. Запропоновано алгоритми синтезу зачеплень на базі вихідних контурів, окреслених кривими другого порядку – еліпсом і гіперболою (мають загальний алгоритм), а також параболою. Виконано контрольний розрахунок, який підтвердив можливість знайти альтернативу традиційним евольвентним передачам з кутом зачеплення  $20^\circ$ , а також авіаційним зубчастим передачам, що мають кут профілю зубців  $26^\circ$  і  $30,5^\circ$ .

**Список літератури:** 1. Гольдфарб В.И. Некоторые аспекты современного состояния теории и практики зубчатых передач // Сборник докладов научно-технической конференции "Теория и практика зубчатых передач и редукторостроения". – Ижевск, 2008. – С.8-15. 2. Вулгаков Э.Б. Общий случай синтеза эвольвентного зацепления // Труды Рижского института инженеров гражданской авиации. Сб. "Исследование механических передач приводов агрегатов, 1970. – Вып.148. – С. 55-68. 3. Шниоц В.П. Теоретические основы синтеза передач зацеплением // В.П. Шниоц, П.Л. Носков, П.В. Филь. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2006. – 408с. 4. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. Монография // А.И. Павлов. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. 5. Tököly P. Effect of tooth shape to size of contact stress noninvolute gearing // P. Tököly, M. Gajdoš, M. Bošanský // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ", 2009. – №19. – С.10-20. 6. Коростелев Л.В. Кинематические показатели несущей способности пространственных зацеплений // Л.В. Коростелев // Изв. вузов. Машиностроение. – 1961. – №10. – С.5-15. 7. Бабичев Д.Т. Оптимизационный синтез профиля зуба как отрезка кривой, заданной натуральным уравнением // Д.Т. Бабичев, Д.А. Бабичев // Теория и практика зубчатых передач: Сборник трудов Международного симпозиума (21–23 января, 2014 г., Россия, Ижевск). – Ижевск: изд-во ИжГТУ, 2013. – С.301-308. 8. Павленко А.В. Зубчатые передачи с зацеплением Новикова // А.В. Павленко, Р.В. Федякин, В.А. Чесноков. – Киев: "Техніка", 1978. – 144с. 9. Шабанов И.Р. О зубчатой передаче с конхоидальной линией зацепления // Надежность и качество зубчатых передач. – Ниинформатжмаш, 18-67-106, 1967. – С.1-8. 10. Скляр Ю.А. Геометрические критерии конхоидальных передач со смещением исходного контура // Ю.А. Скляр // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – №27. – С.162-167. 11. Анатолий Андросов. Зубчатые передачи с эллиптическим профилем зуба как элемент научно-технического прогресса в машиностроении // Анатолий Андросов, Геннадий Гребенюк // Журнал "САПР и графика". – 2005. – №8. http://www.sap.ru/Article.aspx?id=7812 12. Лонато Г.А. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями. Справочное пособие // Г.А. Лонато, Н.Ф. Кабатова, М.Г. Сегаль. – М.: "Машиностроение", 1977. – 423с. 13. Данильченко Ю.М. Продуктивность контурной обработки зубчатых ланок дисковым инструментом // Ю.М. Данильченко, С.І. Пастернак та ін. // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Машинобудування. – 2008. – №53. – С.215-225. 14. Пастернак С.І. Економічне обґрунтування методу контурної обробки деталей з періодичними профілями дисковим інструментом // С.І. Пастернак, Ю.М. Данильченко та ін. // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". Харків: НТУ "ХПІ", 2009. – №19. – С.118-126. 15. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия // А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176с. 16. Дорофеев В.Л. Назначение параметров исходного контура эвольвентных зубчатых колес с несимметричными зубьями // В.Л. Дорофеев, К.Б. Арцадулов, Д.В. Дорофеев // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ", 2011. – №29. – С. 53-60. 17. Вулгаков Э.Б. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. Обобщенная теория и проектирование // Э.Б. Вулгаков. – М.: "Машиностроение", 1974. – 264с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Goljdfarb V.I. Nekotorighe aspektih sovremennoho sostoyaniya teorii i praktiki zubchatihk peredach. Sbornik dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferencii "Teoriya i praktika zubchatihk

peredach i reduktorosroeniya". Izhevsk. 2008. P.8-15. 2. *Vulgakov Eh.B.* Obthiy sluchay sinteza ehvolventnogo zacepleniya. Trudih Rizhskogo ins-tituta inzhenerov grazhdanskoy aviatsii. Sb: "Issledovanie mekhanicheskikh peredach privodov agregatov. 1970. No.148. P.55-68. 3. *V.P. Shishov, P.L. Nosko, P.V. Filj.* Teoreticheskie osnovni sinteza peredach zacepleniem. Lugansk: Vid-vo SNU im. V. Dala. 2006. 4. *Pavlov A.I.* Sovremennaya teoriya zubchatihk zacepleniya. Monografiya. Kharkov: KhNADU. 2005. 100p. 5. *Tokoly P. Gajdos M. Bosansky M.* Effect of tooth shape to size of contact stress noninvolute gearing. Visnik Nacionaljnogo Tekhnichnogo universitetu "KhPI". Zbirnik naukovikh pracj. Tematicnij vypusk "Problemi mekhanichnogo privodu". Kharkiv: NTU "KhPI". 2009. No19. 168p. P.10-20. 6. *Korostelev L.V.* Kinematicheskie pokazateli nesuschey sposobnosti prostanstvennikh zacepleniya. Izv. vuzov. Mashinostroenie. 1961. No10. P.5-15. 7. *Babichev D.T. Babichev D.A.* Optimizacijnihy sintez profilya zuba kak otrezka krivoy, zadannoy naturaljnim uravneniem. Teoriya i praktika zubchatihk peredach: Sbornik trudov Mezhdunarodnogo cimpoziuma (21-23 yanvara, 2014, Rossiya, Izhevsk). Izhevsk: izd-vo IzhGTU. 2013. 580p. P.301-308. 8. *Pavlenko A.V. Fedyaikin R.V. Chesnokov V.A.* Zubchatih peredachi s zacepleniem Novikova. Kiev: "Tekhnika". 1978. 144p. 9. *Shabanov I.R.* O zubchatoy peredache s konkoidaljnuy liniey zacepleniya. Nadezhnostj i kachestvo zubchatihk peredach. – Niinformtiazhmash. 18-67-106, 1967. P.1-8. 10. *Sklyar Yu.A.* Geometricheskie kriterii konkoidaljnihk peredach so smetheniem nauchno-teknicheskogo kontura. Visnik Nacionaljnogo Tekhnichnogo universitetu "KhPI". Zbirnik naukovikh pracj. Tematicnij vypusk "Problemi mekhanichnogo privodu". Kharkiv: NTU "KhPI". 2010. No27. P.162-167. 11. *Anatolij Androsov, Genadiy Grebenyuk.* Zubchatih peredachi s ehlipticheskim profilem zuba kak ehlement nauchno-teknicheskogo progressa v mashinostroenii. Zhurnal "SAPR i grafika". 2005. No8. <http://www.sapr.ru/Article.aspx?id=7812> 12. *Lopato G.A. Kabatov N.F., Segalij M.G.* Konicheskie i gipoidnihe peredachi s krugovihmi zubjiami. Spravochnoe posobie. – Moscow: "Mashinostroenie". 1977. 423p. 13. *Daniljchenko Yu.M. Pasternak S.I. ta in.* Produktivnistj kontumoi obrobki zubchastikh lanok diskovim instrumentom. Visnik Nacionaljnogo tekhnichnogo universitetu Ukrainy "Kievskij politekhnichnij institut". Mashinobudovannya. 2008. No53. P.215-225. 14. *Pasternak S.I. Daniljchenko Yu.M. ta in.* Ekonomichne obrgruntuvannya metodu kontumoi obrobki detaley z periodichnimi profilyami diskovim instrumentom. Visnik Nacionaljnogo Tekhnichnogo universitetu "KhPI". Zbirnik naukovikh pracj. Tematicnij vypusk "Problemi mekhanichnogo privodu". Kharkiv: NTU "KhPI". 2009. No19. 168p. P.118-126. 15. *Pogorelov A.V.* Differencialjnaya geometriya. Moscow: Nauka. 1974. 176p. 16. *Dorofeev V.L. Arnaudov K.B., Dorofeev D.V.* Naznachenie parametrov iskhodnogo kontura ehvolventnihk zubchatihk koles s nesimmetrichnimi zubjiami. Visnik Nacionaljnogo Tekhnichnogo universitetu "KhPI". Zbirnik naukovikh pracj. Tema-tichnij vypusk "Problemi mekhanichnogo privodu". Kharkiv: NTU "KhPI". 2011. No29. 192p. P.53-60. 17. *Vulgakov Eh.B.* Zubchatih peredachi s uluchshennimi svoystvami. Obobthennaya teoriya i proektirovanie. Moscow: "Mashinostroenie". 1974. 264p.

Надійшла (received) 10.04.2015

УДК 621.833; 62.652

*А.М. ЧАНЧІН*, аспірант каф. М і ДМ ОНПУ, Одеса

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ ЖОРСТКОСТІ ЕПІЦИКЛУ ПЛАНЕТАРНОГО КОЛІСНОГО РЕДУКТОРА

На основі розроблених аналітичних моделей деформованого стану епіциклу у складі планетарних колісних редукторів тролейбусів отримано функцію зведеної питомої жорсткості, що дозволяє враховувати не тільки пружні деформації зубців та ободу під дією експлуатаційних навантажень, але й розміри утомної тріщини у процесі її розвитку. За даними аналізу експлуатаційних ушкоджень досліджено кінетику втомних тріщин на ободі епіциклів. Встановлено, що за наявності тріщини показник зведеної жорсткості епіциклу зменшується пропорційно розмірам тріщини, що сприяє виникненню параметричного резонансу в умовах віброударних режимів коливань та підтверджує можливість односторонньої вібродіагностики втомних тріщин епіциклу в умовах тролейбусних доріж.

**Ключові слова:** епіцикл, пружні деформації, утомна тріщина, спектр вібрацій

**Вступ. Актуальність задачі.** Особливість конструкції трансмісії тролейбусів полягає в тому, що на відміну від автомобільних трансмісій між тяговим електродвигуном (ТЕД), карданною передачею і провідним мостом відсутні фрикційне зчеплення та ін. пружні віброізоляційні елементи. Оскільки як ір ТЕД та ін. обертові деталі трансмісії мають значний зведений момент інерції,

© А.М. Чанчін, 2015

то при кожному циклі пуску і гальмувань тролейбуса відбувається вибір люфтів у всіх кінематичних парах, що спричиняє значні ударні імпульси та інтенсивні ушкодження насамперед елементів та деталей зачеплень планетарних колісних редукторів (ПКР). За статистикою відмов однією з найбільш ушкоджуваних деталей ПКР є епіцикл [1].

Важливою і складною є проблема діагностики технічного стану зубчастих передач у складі провідних мостів через значну інтенсивність вібрації і широкий спектр ушкоджень, спричинених типовим для тролейбусів важким режимом експлуатації. Стосовно ПКР відповідні коливальні процеси мають дві особливості, які суттєво ускладнюють динамічні розрахунки, а саме: багатопоточність системи та знижену жорсткість ободу епіциклу задля більш рівномірного розподілу навантаження між сателітами.

Означені чинники зумовлюють *актуальність* удосконалення конструкцій ПКР та методів їх технічної діагностики з метою забезпечення на нормативному рівні показників їх віброактивності та надійності, зменшення витрат на запасні частини, технічне обслуговування та ремонтно-відновлювальні роботи за фактичним станом, підвищення ергономічності та комфортності пасажирського транспорту.

**Аналіз відомих досліджень.** Сучасні дослідження за напрямом вібраційної діагностики зубчастих передач включають як методи оцінювання технічного стану передач за показниками їх віброактивності, так і методи моделювання динамічних характеристик конструкцій та їх власних частот для забезпечення адекватності спектрального аналізу параметрів вібрації. На розв'язок означених науково-практичних задач спрямовані дослідження відомих наукових центрів і провідних виробничих фірм, таких як Інститут технічної механіки НАН України (Дніпропетровськ), НТЦ "Діагностика" (Суми, Україна), НТЦ "Кар'ерна техніка" (Мінськ, Беларусь), *Rockwell Standart* (США), *SKF* (Швеція) та ін. Відмічено, що аналіз показників вібрацій за спектрограмами для планетарних передач є значно складнішим ніж для передач переборного типу. Достовірність результатів моделювання і діагностики ПКР обмежена не тільки багатопоточністю та складною кінематикою передач, але й перманентною зміною частоти обертання в широкому діапазоні, знакозмінністю ударних навантажень, джерелами випадкової високочастотної вібрації, через що опрацьовані моделі та методи мають обмежене застосування і потребують уточнення, зокрема за багатопараметричними показниками жорсткості конструкції епіциклу [2, 3].

**Постановка задачі.** Найбільш ефективними для розв'язку означених задач уявляються аналітичні методи моделювання [4]. Розрахунок деформованого стану епіциклу у складі планетарних колісних редукторів (ПКР) типу *Raba 118/76* (з трьома сателітами,  $N=3$ ) та *Raba 518/77* ( $N=5$ ) виконано послідовно за схемами замкненого колового кільця (рисунки 1-3).

Зовнішнє навантаження прийнято у вигляді зосереджених радіальних  $F_r$  та колових  $F_t$  сил, що діють у площині кільця, яке підкріплює вільну безмоментну циліндричну оболонку. Зрівноважують ці сили дотичні розподілені навантаження, що спрямовані за біномаллю до колової вісі кільця радіуса  $R$ .

Вихідна система є трьохкратно статично невизначеною, але враховуючи симетрію епіциклу відносно діаметрального перерізу  $AB$  (поперечна сила в т.  $B$  дорівнює  $Q_{tB}=0$ ), є можливою зменшити статичну невизначеність до двох. Розкріплюємо конструкцію розрізом у т.  $B$  (тобто робимо її статично визначеною), в перерізі прикладаємо одиничні навантаження – зосереджений момент