

При обкатке на режиме  $1500\text{мин}^{-1}$  (рисунок 6,б) на спектре "главенствует" только 1-ая оборотная частота, равная 25Гц, другие частоты практически отсутствуют. Этот факт, при его дальнейшем подтверждении, т.е. при присутствии на спектре только оборотной частоты определенной амплитуды и практическом отсутствии остальных, может быть рекомендован в качестве второго критерия сравнительной оценки качества обкатываемых РМК.

На анализируемых спектрах также четко выделяются повышенные составляющие вибраций на зубцовых 1-го ряда и кратных им гармониках: при частоте вращения входного торсиона  $800\text{мин}^{-1}$  – зубцовая частота 1-го ряда 256Гц и ее гармоники 1018Гц (4-я) и 1762Гц (7-я); при частоте вращения торсиона  $1500\text{мин}^{-1}$  – зубцовая частота 1-го ряда (475Гц) и ее 2-я – 4-я гармоники (962; 1437; 1893Гц).

После переборки 1-го планетарного ряда и замены коронного колеса редуктор был обкатан и сдан.

**Выводы.** Отработка методики разбраковки РМК в условиях их цеховой обкатки показала высокую эффективность вибрационной диагностики для ранжирования качества изготовления РМК. Установлено, что в качестве интегрального критерия оценки сборки РМК могут служить величина СКЗ виброускорений в частотном диапазоне 3-100Гц и амплитуда вибраций на оборотной частоте торсионного вала.

Рекомендовано оценивать качество изготовления обкатываемых РМК самосвалов 75131 как:

- удовлетворительное – при регистрации допустимых уровней амплитуд на характерных частотах и регистрируемому минимальному снижению СКЗ по крайней паре одного из контролируемых параметров (виброускорений, вибро-скорости, виброперемещений) в течение обкатки (на 5% и более);

- допустимое – при выявлении тенденции снижения амплитуд вибраций в течение предусмотренного срока обкатки с дополнительным его увеличением на 30-45мин;

- неудовлетворительное – при превышении отдельных амплитуд регистрируемых спектров на характерных частотах, прежде всего оборотных, зубцовых и кратных им, более чем на 20% по сравнению с опорными и отсутствию тенденции к их снижению и уменьшению СКЗ в течение двойного от предусмотренного срока обкатки.

**Список литературы:** 1. Комплексный контроль и повышение качества зубчатых приводных механизмов для машиностроения: методические рекомендации / О.В. Берестнев, В.Е. Антонюк, Н.Н. Ишин, А.М. Гоман, А.Н. Панов, А.С. Скороходов, Я.О. Берестнев, В.Н. Русецкий, В.С. Александрова, Е.П. Петина. – Минск: БелГИСС, 2009. – 115с. 2. ГОСТ Р ИСО 13373-2-2009. Контроль состояния и диагностика машин. Вибрационный контроль состояния машин. Часть 2. Обработка, анализ и представление результатов измерений вибрации. – Издательство стандартов, 2010. – 25с. 3. Разработать алгоритмы работы, программное обеспечение и электронный блок вибромониторинга мотор-колес: отчет о НИР (промежуточный) / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, рук. темы Н.Н. Ишин. – Мн., 2008. – 68с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kompleksnyj kontrol' i povyshenie kachestva zubchatyh privodnyh mehanizmov dlja mashinostroenija : metodicheskie rekomendacii / O.V. Berestnev, V.E. Antonjuk, N.N. Ishin, A.M. Goman, A.N. Panov, A.S. Skorohodov, Ja.O. Berestnev, V.N. Ruseckij, V.S. Aleksandrova, E.P. Petina. – Minsk : BelGISS, 2009. – 115p. 2. GOST R ISO 13373-2-2009. Kontrol' sostojanija i diagnostika mashin. Vibracionnyj kontrol' sostojanija mashin. Chast' 2. Obrabotka, analiz i predstavlenie rezul'tatov izmerenij vibracii. Izdatel'stvo standartov, 2010, 25p. 3. Razrabotat' algoritmy raboty, programmnoe obespechenie i jelektronnyj blok vib-romonitoringa motor-koles: otchet o NIR (promezhutochnyj) / Obedinennyj institut mashinostroenija NAN Belarusi, ruk. temy N.N. Ishin. – Minsk, 2008g. – 68p.

Поступила (received) 27.04.2015

С.С. ГУТИРЯ, д.т.н., профессор каф. М і ДМ ОНПУ, Одеса;  
В.П. ЯГЛІНСЬКИЙ, д.т.н., профессор каф. М і ДМ ОНПУ;  
А.М. ЧАНЧИН, магістр, аспірант каф. М і ДМ ОНПУ

## ФОРМИ І КРИТЕРІЙ ПОВ'ЯЗАНІСТІ КОЛИВАНЬ ПЛАНЕТАРНОГО КОЛІСНОГО РЕДУКТОРА

На основі розробленої моделі визначення спектру головних частот планетарного колісного редуктора (ПКР) визначено форми коливань, досліджено пружні зв'язки між парціальними системами. Встановлено суттєве зниження перших двох головних частот при збільшенні числа сателітів, а також за наявності тріщини в епіциклі. Вищі частоти практично не змінюються. Підвищення жорсткості опор сателітів зменшує критерій пов'язаності коливань поступальних парціальних систем сателітів з обертальними удвічі, що сприяє послабленню пружних зв'язків коливальної системи ПКР. Аналогічний, але значно менший, ефект спричиняє зниження куту зачеплення.

**Ключові слова:** модель коливальної системи, спектр головних частот, парціальні системи, енергія коливань

**Вступ. Актуальність задачі.** Дослідження механічних коливань планетарних зубчастих передач є складною науковою задачею, перманентно актуальною внаслідок бурхливого зростання питомої потужності машин (на одиницю маси або об'єму) та швидкодії складових передаточних механізмів, а також через жорсткі вимоги споживачів щодо рівня вібрацій та шуму, надійності, стійкості функціонування та керованості всіх об'єктів нової техніки.

Актуальною також є задача вібраційної безрозбірної діагностики технічного стану планетарних колісних редукторів (ПКР) у складі трансмісії автобусів, тролейбусів, кар'єрних самоскидів, позашляховиків, військової техніки та ін. транспортних засобів, рішення якої потребує моделюванні динаміки коливальної системи із врахуванням особливостей прояву типових ушкоджень [1, 2].

**Аналіз відомих досліджень.** Одними з самих найменш надійних елементів силової трансмісії тролейбусів є планетарні зубчасті редуктори у складі тихохідних провідних мостів, що навантажені крутним моментом, значно перевищуючим момент тягового двигуна. Вплив окремих параметрів розрахункової моделі планетарної передачі на власні частоти крутних та поперечних коливань зубчастих коліс розглянуто у низці сучасних досліджень [3-5]. Розроблені як циклічно симетричні, так і асиметричні динамічні моделі, що враховують змінну жорсткість зубчастих зачеплень, усереднену жорсткість підшипників, нерівномірне колове розташування сателітів та ін. параметри пружної системи. Однак отримані результати та рекомендації безпосередньо не застосовні для цілей вібраційної діагностики технічного стану ПКР, оскільки не враховують елементи самовстановлення конструкції, а також системний вплив змінної жорсткості епіциклу при виникненні втомної тріщини.

**Постановка завдання.** Метою дослідження є формування математичної моделі коливань системи ПКР з "плаваючою" конструкцією сонячної шестерні, опорами якої є сателіти, з врахуванням поперечних і крутних коливань шестерні, водила, епіциклу і сателітів. Основними завданнями дослідження є визначення спектру головних частот ПКР з врахуванням впливу змінної колової жорсткості епіциклу за наявності пошкоджень, форм коливань та пов'язаності коливань основних парціальних систем.

© С.С. Гутиря, В.П. Ягліньський, А.М. Чанчин, 2015

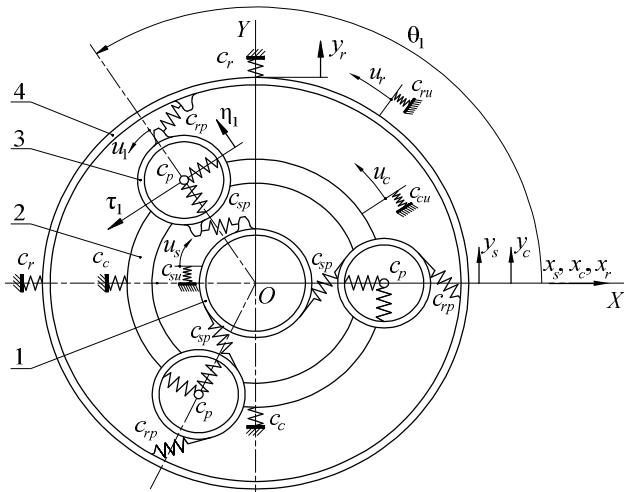


Рисунок 1 – Узагальнена схема розрахункової моделі ПКР:  
1 – сонячна шестерня; 2 – водило; 3 – сателіти; 4 – епіцикл

Прийнято наступні позначення:  $s$  – (sun) сонячна шестерня;  $c$  – (carrier) водило;  $r$  – (ring) епіцикл;  $p$  – (planet) сателіт;  $u$  – колова (зведена крутна) деформація;  $sp$  і  $rp$  – пружні з'єднання (зачеплення) сонячної шестерні ( $s$ ) і епіциклу ( $r$ ) з сателітами ( $p$ );  $x_s, y_s, x_c, y_c, x_r, y_r, n_i, \tau_i$  ( $i=1 \dots N$ ) – поперечні зміщення осей шестерні, водила, епіциклу та сателітів внаслідок пружних деформацій;  $N$  – число сателітів;  $r_s, r_c, r_r, r_p$  – радіуси основних кіл шестерні, водила, епіциклу та сателітів відповідно;  $c_c, c_r, c_p$  – коефіцієнти жорсткості підшипників опор водила, епіциклу та сателітів;  $c_{sp}, c_{rp}$  – коефіцієнти жорсткості зачеплень сонячної шестерні та епіциклу з сателітами;  $C_{su}, C_{cu}, C_{ru}$  – коефіцієнти зведених крутних жорсткостей шестерні, водила та епіциклу;  $\lambda_c, \lambda_r, \lambda_{p,i}$  – поперечні деформації осей водила, епіциклу та сателітів;  $\lambda_{sp,i}, \lambda_{rp,i}$  – деформації зачеплення сателітів з шестернею та епіциклом;  $u_s, u_c, u_r, u_i$  – пружні переміщення за дугами основних кіл шестерні, водила, епіциклу та сателітів.

Використовуючи розрахункові схеми пружних переміщень, визначено деформації елементів ПКР у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{p,i}^2 &= (y_c \sin \theta_i + x_c \cos \theta_i - n_i)^2 + (y_c \cos \theta_i - x_c \sin \theta_i - \tau_i + u_c)^2; \\ \lambda_{sp,i} &= x_s \sin(\theta_i - \alpha_w) - y_s \cos(\theta_i - \alpha_w) - u_s - u_i + \tau_i \cos \alpha_w + n_i \sin \alpha_w; \\ \lambda_{rp,i} &= x_r \sin(\theta_i + \alpha_w) - y_r \cos(\theta_i + \alpha_w) + u_i - u_r + \tau_i \cos \alpha_w - n_i \sin \alpha_w; \\ \lambda_c^2 &= x_c^2 + y_c^2; \quad \lambda_r^2 = x_r^2 + y_r^2; \quad \theta_i = \theta_1 + (i-1)2\pi/N; \quad i = 1 \dots N, \end{aligned} \right\} (1)$$

де  $\theta_1$  та  $\theta_i$  – кутова орієнтація осі першого та  $i$ -го сателітів відносно осі  $x$ ;  $\alpha_w$  – кут зачеплення.

**Визначення спектру головних частот ПКР.** Залежно від конструкції передачі та мети дослідження розрахункова динамічна модель коливальної системи ПКР може враховувати як пружні так і демпферні властивості складових елементів та мати від 10 до 20, або більше степенів вільності. Розглянуто узагальнену динамічну модель ПКР, кожна з основних ланок якої має дві поступальні та одну обертальну рухливості (рисунок 1).

У подальшому для узагальнених координат коливальної системи ПКР використано наступні позначення:

$$\left. \begin{aligned} q_1 = x_s; \quad q_2 = y_s; \quad q_3 = x_c; \quad q_4 = y_c; \quad q_5 = x_r; \quad q_6 = y_r; \quad q_7 = u_s; \\ q_8 = u_c; \quad q_9 = u_r; \quad q_{10} = \tau_1; \quad q_{11} = n_1; \quad q_{12} = u_1; \quad q_{13} = \tau_2; \quad q_{14} = n_2; \\ q_{15} = u_2; \quad q_{16} = \tau_3; \quad q_{17} = n_3; \quad q_{18} = u_3; \quad \dots \quad q_{9+3 \cdot N}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Підстановкою (1) і (2) у вираз для потенціальної енергії коливань, отримано квадратичну форму у вигляді  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9+3 \cdot N} \sum_{j=1}^{9+3 \cdot N} c_{i,j} q_i q_j$ , де узагальнені коефіцієнти жорсткості системи  $c_{i,j}$  визначено за формулами

$$\left. \begin{aligned} c_{1,10} = c_{sp} k_w s_{3,1}; \quad c_{1,11} = c_{sp} s_w s_{3,1}; \quad c_{1,12} = -c_{sp} s_{3,1}; \quad c_{1,13} = c_{sp} k_w s_{3,2}; \\ c_{1,14} = c_{sp} s_w s_{3,2}; \quad c_{1,15} = -c_{sp} s_{3,2}; \quad c_{1,16} = c_{sp} k_w s_{3,3}; \quad c_{1,17} = c_{sp} s_w s_{3,3}; \quad c_{1,18} = -c_{sp} s_{3,3}; \\ c_{2,10} = -c_{sp} k_w k_{3,1}; \quad c_{2,11} = -c_{sp} s_w k_{3,1}; \quad c_{2,12} = c_{sp} k_{3,1}; \quad c_{2,13} = -c_{sp} k_w k_{3,2}; \\ c_{2,14} = -c_{sp} s_w k_{3,2}; \quad c_{2,15} = c_{sp} k_{3,2}; \quad c_{2,16} = -c_{sp} k_w k_{3,3}; \quad c_{2,17} = -c_{sp} s_w k_{3,3}; \\ c_{2,18} = c_{sp} k_{3,3}; \quad c_{3,10} = c_p s_{2,1}; \quad c_{3,11} = -c_p k_{2,1}; \quad c_{3,13} = c_p s_{2,2}; \quad c_{3,14} = -c_p k_{2,2}; \\ c_{3,16} = c_p s_{2,3}; \quad c_{3,17} = -c_p k_{2,3}; \quad c_{4,10} = -c_p k_{2,1}; \quad c_{4,11} = -c_p s_{2,1}; \\ c_{4,13} = -c_p k_{2,2}; \quad c_{4,14} = -c_p s_{2,2}; \quad c_{4,16} = -c_p k_{2,3}; \quad c_{4,17} = -c_p s_{2,3}, \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{1,1} = 0,5 N c_{sp}; \quad c_{2,2} = c_{1,1}; \quad c_{3,3} = c_c + N c_p; \quad c_{4,4} = c_{3,3}; \quad c_{5,5} = c_r; \quad c_{6,6} = c_{5,5}; \\ c_{7,7} = c_{su} + N c_{sp}; \quad c_{8,8} = c_{cu} + N c_p; \quad c_{9,9} = c_{ru} + N c_{rp}; \quad c_{10,10} = c_p + (c_{sp} + c_{rp}) k_w^2; \\ c_{11,11} = c_p + (c_{sp} + c_{rp}) s_w^2; \quad c_{12,12} = c_{sp} + c_{rp}; \quad c_{13,13} = c_{10,10}; \quad c_{14,14} = c_{11,11}; \\ c_{15,15} = c_{12,12}; \quad c_{16,16} = c_{10,10}; \quad c_{17,17} = c_{11,11}; \quad c_{18,18} = c_{12,12}, \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{5,10} = c_{rp} k_w s_{4,1}; \quad c_{5,11} = -c_{rp} s_w s_{4,1}; \quad c_{5,12} = c_{rp} s_{4,1}; \quad c_{5,13} = c_{rp} k_w s_{4,2}; \quad c_{5,14} = -c_{rp} s_w s_{4,2}; \\ c_{5,15} = c_{rp} s_{4,2}; \quad c_{5,16} = c_{rp} k_w s_{4,3}; \quad c_{5,17} = -c_{rp} s_w s_{4,3}; \quad c_{5,18} = c_{rp} s_{4,3}; \quad c_{6,10} = -c_{rp} k_w k_{4,1}; \\ c_{6,11} = c_{rp} s_w k_{4,1}; \quad c_{6,12} = -c_{rp} k_{4,1}; \quad c_{6,13} = -c_{rp} k_w k_{4,2}; \quad c_{6,14} = c_{rp} s_w k_{4,2}; \quad c_{6,15} = -c_{rp} k_{4,2}; \\ c_{6,16} = -c_{rp} k_w k_{4,3}; \quad c_{6,17} = c_{rp} s_w k_{4,3}; \quad c_{6,18} = -c_{rp} k_{4,3}; \quad c_{7,10} = -c_{sp} k_w; \quad c_{7,11} = -c_{sp} s_w; \\ c_{7,12} = c_{sp}; \quad c_{7,13} = c_{7,10}; \quad c_{7,14} = c_{7,11}; \quad c_{7,15} = c_{7,12}; \quad c_{7,16} = c_{7,10}; \quad c_{7,17} = c_{7,11}; \quad c_{7,18} = c_{7,12}; \\ c_{8,10} = -c_p; \quad c_{8,13} = c_{8,10}; \quad c_{8,16} = c_{8,10}; \quad c_{9,10} = -c_{rp} k_w; \quad c_{9,11} = c_{rp} s_w; \quad c_{9,12} = -c_{rp}; \\ c_{9,13} = c_{9,10}; \quad c_{9,14} = c_{9,11}; \quad c_{9,15} = c_{9,12}; \quad c_{9,16} = c_{9,10}; \quad c_{9,17} = c_{9,11}; \quad c_{9,18} = c_{9,12}; \\ c_{10,11} = s_w k_w (c_{sp} - c_{rp}); \quad c_{10,12} = -k_w (c_{sp} - c_{rp}); \quad c_{11,12} = -s_w (c_{sp} + c_{rp}); \quad c_{13,14} = c_{10,11}; \\ c_{13,15} = c_{10,12}; \quad c_{14,15} = c_{11,12}; \quad c_{16,17} = c_{10,11}; \quad c_{16,18} = c_{10,12}; \quad c_{17,18} = c_{11,12}. \end{aligned} \right\} (5)$$

Для спрощення подальших перетворень у формули (2) і (5) додатково уведено наступні умовні позначення:

$$s_w = \sin \alpha_w; \quad k_w = \cos \alpha_w; \quad s_{2,i} = \sin \theta_i; \quad k_{2,i} = \cos \theta_i; \quad s_{3,i} = \sin(\theta_i - \alpha_w);$$

$$k_{3,i} = \cos(\theta_i - \alpha_w); \quad s_{4,i} = \sin(\theta_i + \alpha_w); \quad k_{4,i} = \cos(\theta_i + \alpha_w).$$

Значення інших елементів матриці узагальнених коефіцієнтів жорсткості  $C(c_{i,j})$ , що не входять до (3), (4) і (5), дорівнюють нулю.

Елементи діагональної матриці  $A(a_{i,j})$  узагальнених коефіцієнтів інерції, що входять до виразу кінетичної енергії системи  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9+3 \cdot N} \sum_{j=1}^{9+3 \cdot N} a_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$ , визначено так

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1} &= m_s; a_{2,2} = m_s; a_{3,3} = m_c; a_{4,4} = m_c; a_{5,5} = m_r; a_{6,6} = m_r; a_{7,7} = J_s/r_s^2; \\ a_{8,8} &= J_c/r_c^2; a_{9,9} = J_r/r_r^2; a_{10,10} = m_p; a_{11,11} = m_p; a_{12,12} = J_p/r_p^2; a_{13,13} = m_p; \\ a_{14,14} &= m_p; a_{15,15} = a_{12,12}; a_{16,16} = m_p; a_{17,17} = m_p; a_{18,18} = a_{12,12}; a_{i,j} = 0, i \neq j, \end{aligned} \right\} (6)$$

де  $\dot{q}_i, \dot{q}_j$  – узагальнені швидкості відповідно до (2);  $m_s, m_c, m_r, m_p$  і  $J_s, J_c, J_r, J_p$  – відповідно маси і осеві моменти інерції шестерні, водила, епіциклу та сателітів.

Наведений спектр головних частот, ( $c^{-1}$ ), системи ПКР визначено як корені частотного рівняння  $|C - \omega^2 A| = 0$  з урахуванням формул (3)-(6) та певних параметрів моделі ПКР типу *RABA 118/77* (таблиця 1):

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 337; \quad \omega_2 = 537; \quad \omega_3 = 1907; \quad \omega_4 = 1907; \quad \omega_5 = 3371; \quad \omega_6 = 3371; \\ \omega_7 &= 5860; \quad \omega_8 = 5860; \quad \omega_9 = 8090; \quad \omega_{10} = 10441; \quad \omega_{11} = 10922; \quad \omega_{12} = 10922; \\ \omega_{13} &= 28625; \quad \omega_{14} = 28625; \quad \omega_{15} = 31760; \quad \omega_{16} = 38128; \quad \omega_{17} = 38128; \quad \omega_{18} = 43336. \end{aligned} \right\} (7)$$

Таблиця 1 – Параметри елементів динамічної моделі ПКР

Параметр	Позначення	Елемент моделі			
		Сонячна шестерня (s)	Епіцикл (r)	Водило (c)	Сателіт (p)
Маса, кг	$m$	1,9	6,8	13,8	0,85
Зведена маса, кг	$I/r^2$	1,16	5,36	13,88	0,52
Основний діаметр, мм	$d$	79,404	195,45	157,5	58,026
Жорсткість зубців, Н/м	$c_{sp}=c_{rp}$	3,0·10 <sup>8</sup>			
Жорсткість опор, Н/м	$c_p=c_r=c_c$	10 <sup>8</sup>			
Зведена крутна жорсткість, Н/м	$c_{ru}$	10 <sup>6</sup>			
Кут зацеплення, град	$\alpha_w$	25,28			

коливань рухомих ланок, тобто степінь взаємного впливу коливань одних мас на коливання інших. На етапі проектування уявляється ефективним знизити динамічні навантаження трансмісії за рахунок цільового формування сукупності пружно-інерційних параметрів її елементів, що визначає характер поширення крутильних коливань уздовж трансмісії. Для цього побудовано динамічну модель силової передачі ПКР, визначено пружні та інерційні параметри її ланок та спектр головних частот. Кожній головній (власній) частоті  $\omega_i$  відповідає вектор  $v_i$ , що характеризує форму коливань системи ПКР з цією головною частотою. Вектори  $v_1, v_2 \dots v_N$  формують власні форми коливань ПКР. Число

форм коливань дорівнює числу степенів вільності коливальної системи. Спектр головних частот розробленої моделі ПКР з трьома сателітами має 12 різних значень (співпадають – 3 і 4; 5 і 6; 9 і 10; 11 і 12; 13 і 14; 16 і 17) головних частот (7), тому система ПКР має 12 незалежних власних форм коливань, які визначаються з точністю до константи. Форми коливань відрізняються тим, що частина координат змінюється в одній фазі, а друга частина у протифазі. Наприклад, перша форма: координати  $(u_1, \tau_1, n_1, u_2, \tau_2, n_2, u_3, \tau_3, n_3, u_s, u_c, u_r, x_s, y_s)$  змінюються в одній фазі (рисунок 2,а). Друга форма: координати  $(u_1, \tau_1, n_1)$  змінюються у протифазі до координат  $(u_2, \tau_2, n_2)$  (рисунок 2,б), і так далі.

Система ПКР типу *RABA 318/78* з 5-ма сателітами має 24 степені вільності ( $N=24$ ), через це до узагальнених коефіцієнтів жорсткості (3)-(5) додаються наступні складові:

$$c_{19,19} = c_{11,11}; c_{20,20} = c_{11,11}; c_{21,21} = c_{12,12}; c_{22,22} = c_{10,10}; c_{23,23} = c_{11,11}; c_{24,24} = c_{12,12}, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{1,19} &= c_{sp}k_w s_{3,4}; c_{1,20} = c_{sp} s_w s_{3,4}; c_{1,21} = -c_{sp} s_{3,4}; c_{1,22} = c_{sp} k_w s_{3,5}; \\ c_{1,23} &= c_{sp} s_w s_{3,5}; c_{1,24} = -c_{sp} s_{3,5}; c_{2,19} = -c_{sp} k_w k_{3,4}; c_{2,20} = -c_{sp} s_w k_{3,4}; \\ c_{2,21} &= c_{sp} k_{3,4}; c_{2,22} = -c_{sp} k_w k_{3,5}; c_{2,23} = -c_{sp} s_w k_{3,5}; c_{2,24} = c_{sp} k_{3,5}; \\ c_{3,19} &= c_p s_{2,4}; c_{3,20} = -c_p k_{2,4}; c_{3,22} = c_p s_{2,5}; c_{3,23} = -c_p k_{2,5}; c_{4,10} = -c_p k_{2,1}; \\ c_{4,11} &= -c_p s_{2,1}; c_{4,19} = -c_p k_{2,4}; c_{4,20} = -c_p s_{2,4}; c_{4,22} = -c_p k_{2,5}; c_{4,23} = -c_p s_{2,5}, \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{5,19} &= c_{rp} k_w s_{4,4}; c_{5,20} = -c_{rp} s_w s_{4,4}; c_{5,21} = c_{rp} s_{4,4}; c_{5,22} = c_{rp} k_w s_{4,5}; \\ c_{5,23} &= -c_{rp} s_w s_{4,5}; c_{5,24} = c_{rp} s_{4,5}; c_{6,19} = -c_{rp} k_w k_{4,4}; c_{6,20} = c_{rp} s_w k_{4,4}; \\ c_{6,21} &= -c_{rp} k_{4,4}; c_{6,22} = -c_{rp} k_w k_{4,5}; c_{6,23} = c_{rp} s_w k_{4,5}; c_{6,24} = -c_{rp} k_{4,5}; \\ c_{7,19} &= c_{7,10}; c_{7,20} = c_{7,11}; c_{7,21} = c_{7,12}; c_{7,22} = c_{7,10}; c_{7,23} = c_{7,11}; \\ c_{7,24} &= c_{7,12}; c_{8,19} = c_{8,10}; c_{8,22} = c_{8,10}; c_{9,19} = c_{9,10}; c_{9,20} = c_{9,11}; \\ c_{9,21} &= c_{9,12}; c_{9,22} = c_{9,10}; c_{9,23} = c_{9,11}; c_{9,24} = c_{9,12}; c_{19,20} = c_{10,11}; \\ c_{19,21} &= c_{10,12}; c_{20,21} = c_{11,12}; c_{22,23} = c_{10,11}; c_{22,24} = c_{10,12}; c_{23,24} = c_{11,12}. \end{aligned} \right\} (10)$$

До узагальнених коефіцієнтів інерції (6) також додаються складові

$$\left. \begin{aligned} a_{19,19} &= m_p; a_{20,20} = m_p; a_{21,21} = J_p/r_p^2; a_{22,22} = m_p; \\ a_{23,23} &= m_p; a_{24,24} = J_p/r_p^2; a_{i,j} = 0, i \neq j. \end{aligned} \right\} (11)$$

Визначено спектр головних частот для моделі ПКР з 5-ма сателітами:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 325; \quad \omega_2 = 500; \quad \omega_3 = 1860; \quad \omega_4 = 2122; \quad \omega_5 = 3327; \quad \omega_6 = 3397; \\ \omega_7 &= 6929; \quad \omega_8 = 6991; \quad \omega_9 = 9565; \quad \omega_{10} = 10237; \quad \omega_{11} = 10237; \quad \omega_{12} = 10582; \\ \omega_{13} &= 11307; \quad \omega_{14} = 11409; \quad \omega_{15} = 26359; \quad \omega_{16} = 26359; \quad \omega_{17} = 29842; \quad \omega_{18} = 29843; \\ \omega_{19} &= 33987; \quad \omega_{20} = 35992; \quad \omega_{21} = 35992; \quad \omega_{22} = 39685; \quad \omega_{23} = 39685; \quad \omega_{24} = 48437. \end{aligned} \right\} (12)$$

При зменшенні колової жорсткості епіциклу, зокрема, при появі втомної тріщини, друга та особливо перша головні частоти зменшуються (рисунок 3).

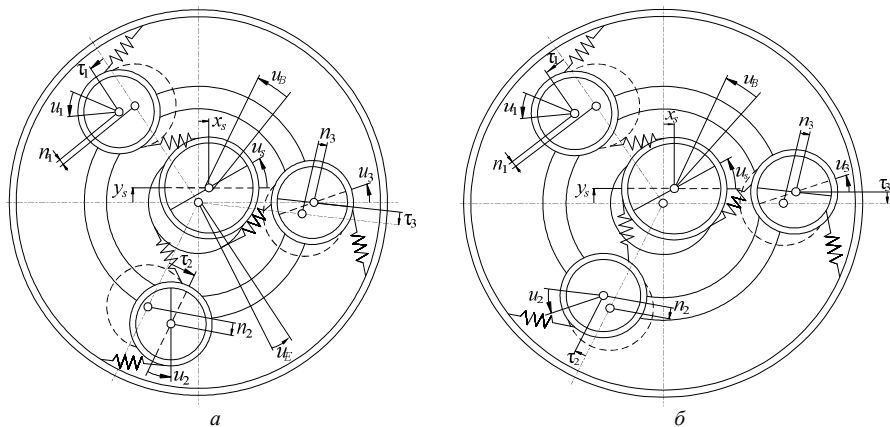


Рисунок 2 – Схеми реалізації форм коливань системи, що відповідають:  
а – першій головній частоті ПКР; б – другій головній частоті ПКР

Між парціальними системами (ПС) існує постійний взаємозв'язок у формі обміну кінетичною енергією коливань. Вирізнено та розглянуто три характерні ПС

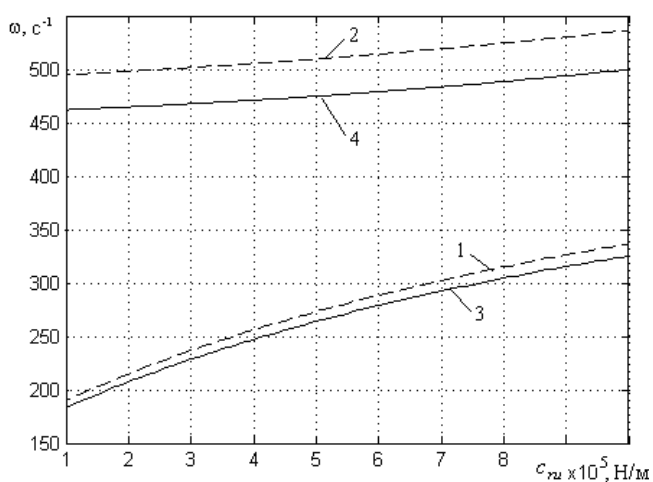


Рисунок 3 – Графіки функцій 1-ї та 2-ї головних частот ПКР від колової жорсткості епіциклу при трьох сателітах (криві 1, 2) та п'яти (криві 3, 4)

Також необхідно враховувати ПС кожного з сателітів, що здійснює 3 рухи за координатами  $\tau_i, n_i, u_i$ . За певних початкових умов у початковий момент часу кінетична енергія коливань є зосередженою в одній або декількох ПС. Коливання початково збудованих ПС відіграють роль зовнішніх сил для інших парціальних систем. Під дією таких сил амплітуда коливань інших ПС можуть зростати, що призводить до зменшення амплітуди коливань у початково збудованих ПС. Таким чином ініціюється періодичний процес обміну енергією між різними ПС. Для коливальної системи ПКР матриця узагальнених коефіцієнтів інерції  $A(a_{i,j})$  є діагональною, через що відсутня інерційна пов'язаність коливань ПС. Отже параметри коливального процесу залежить від взаємної пов'язаності параметрів жорсткості системи.

Для запису матриці узагальнених коефіцієнтів жорсткості  $C(c_{i,j})$  запропоновано наступну структуру:

$$C = \begin{pmatrix} C_T & \vdots & 0 & \vdots & C_{T,P1} & \vdots & C_{T,P2} & \vdots & C_{T,P3} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & \vdots & C_R & \vdots & C_{R,P1} & \vdots & C_{R,P2} & \vdots & C_{R,P3} \\ & & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & & & \vdots & C_{P1} & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & & & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ & & & & & \vdots & C_{P2} & \vdots & 0 \\ & & & & & & \dots & \vdots & \dots \\ & & & & & & & \vdots & C_{P3} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де прийнято наступні позначення субматриць узагальнених коефіцієнтів жорсткості:  $C_T$  – поступальної ПС (*Translation*);  $C_R$  – обертальної (*Rotation*);  $C_{P1}, C_{P2}, C_{P3}$  – сателітів (*Planeten*);  $C_{T,P1}, C_{T,P2}, C_{T,P3}$  – пружного зв'язку між поступальними і сателітними ПС;  $C_{R,P1}, C_{R,P2}, C_{R,P3}$  – між обертальними і сателітними ПС.

Нульові елементи в структурі (13) вказують на відсутність пружного зв'язку між поступальними та обертальними ПС, а також між планетарними ПС. Розмірність матриць вказана у дужках: для  $C_T \rightarrow (6 \times 6)$ ;  $C_R \rightarrow (3 \times 3)$ ;  $C_{T,P1}, C_{T,P2}, C_{T,P3} \rightarrow (6 \times 3)$ ;  $C_{R,P1}, C_{R,P2}, C_{R,P3} \rightarrow (3 \times 3)$ .

Рівень взаємного впливу коливань ПС запропоновано оцінювати за критерієм  $\gamma_{i,j}$ , що залежить від жорсткості основних елементів системи ПКР, та має вигляд

$$\gamma_{i,j} = \frac{c_{i,j}^2}{c_{i,i}c_{j,j}}, \quad i, j = 1 \dots (N+9). \quad (14)$$

Критерій (14) набуває значень в межах від 0 до 1,0. Якщо його значення близьке до одиниці, то динамічна пов'язаність коливань ланок ПКР є "сильною", тобто, коливання однієї ланки суттєво впливають на коливання інших ланок. Якщо ж критерій  $\gamma_{i,j}$  близький до нуля, то динамічна пов'язаність коливань ланок ПКР є "слабкою", тобто кожна ланка здійснює коливання так ніби вона не має зв'язків з іншими ланками. Такі системи ( $\gamma_{i,j} \sim 0$ ) уявляються ідеальними з точки зору ізоляції поширення коливань уздовж силової трансмісії, а також зниження динамічного навантаження усіх ланок і кінематичних пар.

Для певної конструкції ПКР (див. таблицю 1) розрахунками встановлено максимальні значення критерію пов'язаності коливань поступальних ПС  $(x_s, y_s, x_c, y_c, x_r, y_r)$  з сателітними  $(\tau_i, n_i, u_i)$ , а також обертальних ПС  $(u_s, u_c, u_r)$  з сателітними ПС  $(\tau_i, n_i, u_i)$  (таблиця 2).

Розрахункові значення коефіцієнтів пов'язаності визначаються складовими елементами структури (13):  $C_{T,P1}, C_{T,P2}, C_{T,P3}$  та  $C_{R,P1}, C_{R,P2}, C_{R,P3}$ .

Таблиця 2 – Максимальні значення критерію  $\gamma_{i,j}$  пов'язаності коливань ПС

$i=1,2,3$	$x_s, y_s$	$x_c, y_c$	$x_r, y_r$	$u_s$	$u_c$	$u_r$	$u_i$
$\tau_i$	<b>0,277</b>	0,0423	0,2265	0,1383	0,0563	0,1383	0
$n_i$	<b>0,174</b>	0,1194	0,1425	0,0870	0	0,0870	<b>0,52</b>
$u_i$	<b>0,333</b>	0	0,2727	0,1665	0	0,1665	0

Аналіз результатів розрахунків свідчить, що коефіцієнти пружної пов'язаності колової координати епіциклу ( $q_9 = u_r$ ) (див. таблицю 2 передостанній стовпець) з коловими координатами сателітів ( $\tau_i, n_i, u_i$ ) не перевищують значення 0,17. Найбільш значна передача енергії пружних коливань ( $\gamma_{11,12} = 0,52$ ) для дослідженого ПКР здійснюється через пов'язаність коливань поступальних ПС кожного із сателітів (за координатами  $n_i$ ) з обертальними (за координатами  $u_i$ ). Аналіз діаграми пов'язаності коливань ПС (рисунк 4) вказує, що значення критерію  $\gamma_{11,12}$  для поступальних і обертальних ПС усіх сателітів є практично однаковим.

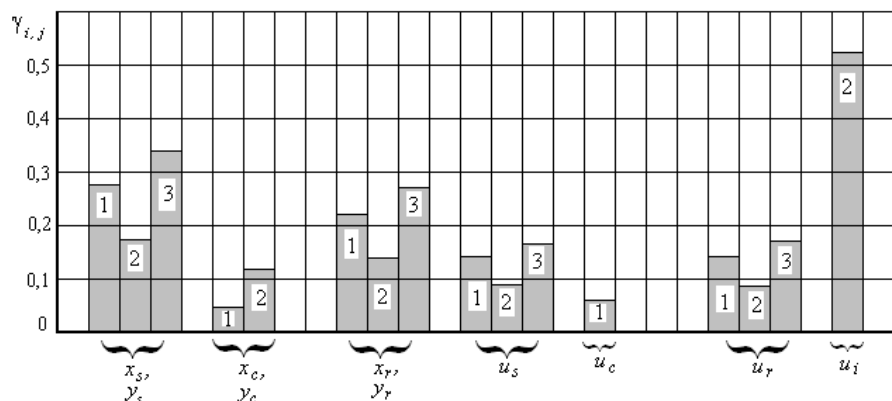


Рисунок 4 – Діаграма пов'язаності коливань парціальних систем ПКР: (стовбці з цифрами 1, 2, 3 відповідають сателітним ПС за координатами  $\tau_i, n_i, u_i$ )

З урахуванням формул (3) і (5) критерій (14) отримав наступний вираз:

$$\gamma_{11,12} = \frac{c_{11,12}^2}{c_{11,11} \cdot c_{12,12}} = \frac{[-s_w(c_{sp} + c_{rp})]^2}{[c_p + (c_{sp} + c_{rp})s_w^2] \cdot (c_{sp} + c_{rp})} = \frac{1}{1 + \frac{c_p}{(c_{sp} + c_{rp})s_w^2}} \quad (15)$$

Послабленню пружного зв'язку між ПС за критерієм (15) сприяє підвищення жорсткості опор сателітів, зменшення жорсткості усіх зубчастих зачеплень, а також зменшення кута зачеплення  $\alpha_w$  (рисунк 5).

### Висновки:

1. Збільшення числа сателітів від 3 до 5 (за умови незмінності інших параметрів коливальної системи ПКР) зменшує перші дві головні частоти на 11%. Інші частоти залишаються практично незмінними.
2. Зниження крутної жорсткості епіциклу у діапазоні значень ( $10^6 \dots 10^5$ )Н/м внаслідок розвитку утомної тріщини спричиняє зниження першої головної частоти ПКР вдвічі (з 380 до 190) $s^{-1}$ . Вищі частоти практично не змінюються.

3. Підвищення жорсткості опор сателітів у діапазоні значень ( $10^8 \dots 3 \cdot 10^8$ )Н/м зменшує критерій пов'язаності коливань поступальних ПС сателітів з обертальними ( $\gamma_{11,12} = 0,52$ ) удвічі, що сприяє послабленню пружних зв'язків коливальної системи ПКР. Аналогічний, але значно менший, ефект спричиняє зниження кута зачеплення  $\alpha_w$ .

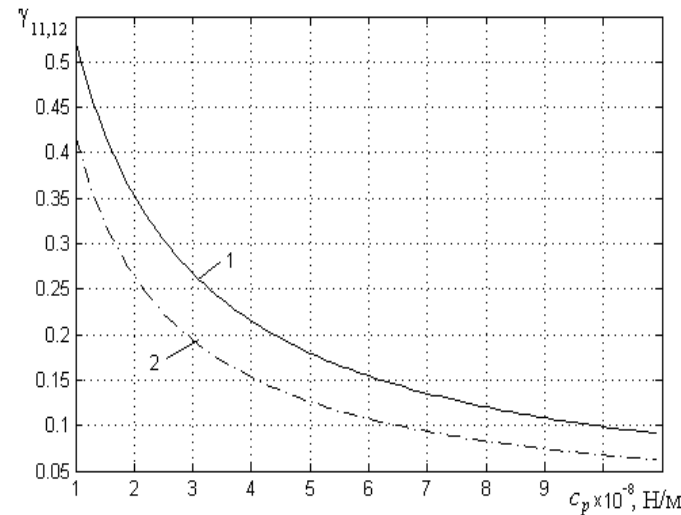


Рисунок 5 – Графіки функцій критерію  $\gamma_{11,12}$  коливань ПС сателітів від жорсткості їх опор  $c_p$  та кута зачеплення  $\alpha_w$  (крива 1 при  $\alpha_w=25,28^\circ$ ; 2 –  $20,28^\circ$ )

**Список літератури:** 1. Gutyrya, S. Diagnostics of damages in trolleybus wheel reduction gears / S. Gutyrya D. Bordeniuk // Motrol, Tom 10a. – Lublin, 2008. – P.65-71. 2. Борденюк Д.М. Стенд для вібродіагностики планетарних колісних редукторів / Д.М. Борденюк // Серія Механіка, енергетика, екологія: Збірник наукових праць. – Севастополь: СевНТУ. – Вип.120. – 2011. – С. 322-328. 3. Samue D. Paul. Planetary Transmission Diagnostics / Paul D. Samue, Joseph K. Conroy, Darryll J. Pines // Glenn Research Center, NASA/CR – 2004-213068 82, 2004. – 83p. 4. Ambarisha, Vijaya Kumar. Non-linear dynamics of planetary gears using analytical and finite elements models / Vijaya Kumar Ambarisha, Robert G. Parker // Journal of sound and vibration. – 302(2007). – P.577-595. 5. Гутыря, С.С. Частотні характеристики планетарних колісних редукторів троллейбусів / С.С. Гутыря, В.П. Ягліньскій, А.М. Чанчін // Вісник СевНТУ. Серія Механіка, енергетика, екологія: Збірник наукових праць. – Севастополь: СевНТУ. – Вип.133. – 2012. – С.340-345. 6. Гутыря, С.С. Моделювання частотних характеристик планетарного колісного редуктора / С.С. Гутыря, В.П. Ягліньскій, А.М. Чанчін // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Серія: Машинознавство та САПР. – Х.: НТУ "ХПІ", 2013. – №1(975). – С.35-43.

**Bibliography (transliterated):** 1. Gutyrya, S. Diagnostics of damages in trolleybus wheel reduction gears / S. Gutyrya, D. Bordeniuk // Motrol, Tom 10a. – Lublin, 2008. – P.65-71. 2. Bordeniuk, D.M. Stend dly vibrodiagnostiki planetarnykh kolesnykh reduktorov / D.M. Bordeniuk // Seria Mehanika, energetica, ekologiya, Zbirnyk naukovykh prach. – Sevastopol, SevNTU. – No120. – 2011. – P.322-328. 3. Samue, D. Paul. Planetary Transmission Diagnostics / Paul D. Samue, Joseph K. Conroy, Darryll J. Pines // Glenn Research Center, NASA/CR – 2004-213068 82, 2004, 83p. 4. Ambarisha, Vijaya Kumar. Non-linear dynamics of planetary gears using analytical and finite elements models / Vijaya Kumar Ambarisha, Robert G. Parker // Journal of sound and vibration. – 302(2007). – P.577-595. 5. Gutyrya, S.S. Chastotni charakteristyky planetarnykh kolesnykh reduktoriv troleybysiv / S.S. Gutyrya, V.P. Yaglinsky, A.M. Chanchin // SevNTU. Seria Mehanika, energetica, ekologiya: Zbirnyk naukovykh prach. – Sevastopol, SevNTU. – No133. – 2012. – P.340-345. 6. Gutyrya, S.S. Modeliuvannya chastotnykh charakteristik planetarnykh kolesnykh reduktoriv / S.S. Gutyrya, V.P. Yaglinsky, A.M. Chanchin // Visnyk Nationalnogo Technichnogo Universitetu "KhPI". Zbirnyk naukovykh prach. Seriya: Mashynoznavstvo y CAD. – Kharkiv: NTU "KhPI". – 2013. – No1(975). – P.35-43.

Надійшла (received) 20.05.2015