

УДК 539.37: 621.83

С. С. ГУТЫРЯ, Ю. М. ХОМЯК, В. М. ЖЕГЛОВА, А. Н. ЧАНЧИН

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОЧНОСТНОЙ РАСЧЕТ ЭПИЦИКЛА ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА

Предложена и апробирована методика прочностного расчета обода эпицикла как замкнутого кольца большой кривизны. Разработан алгоритм раздельного моделирования плоской и пространственной форм деформирования кольца, позволивший получить достаточно простые формулы для расчета действующих в сечении обода внутренних усилий и напряжений. Допустимость и адекватность предложенных моделей по точности обоснована применением моментной теории оболочек, а также сопоставлением результатов аналитического расчета эпицикла планетарной передачи колесного редуктора *Raba 118/76*, применяемого в составе трансмиссии троллейбусов, с результатами конечно-элементного моделирования в программном комплексе *Autodesk Simulation*. Установлено, что обод эпицикла ПКР подвергается циклическому деформированию при коэффициенте асимметрии цикла напряжений на внутренней поверхности  $R_t = -1,58$ . Такой характер нагружения подтверждает актуальность уточненных расчетов эпицикла на циклическую прочность с учетом нестационарности режимов нагружения передач в составе транспортных и энергетических машин, а также неоднородности напряженного состояния обода в областях зубчатых зацеплений и соединения с корпусом.

**Ключевые слова:** зубчатое зацепление, шлицевое соединение, асимметричная система нагрузок, замкнутое круговое кольцо, плоский и пространственный виды деформирования.

Запропоновано і опрацьовано методику розрахунку на міцність ободу епіциклу як замкнутого кільця великої кривини. Розроблено алгоритм роздільного моделювання плоскої та просторової форм деформування кільця, що забезпечило отримання простих формул для розрахунку діючих у перерізі ободу внутрішніх зусиль та напружень. Допустимість та адекватність розроблених моделей за точністю обґрунтовано застосуванням моментної теорії оболонок, а також співставленням результатів аналітичного розрахунку епіциклу планетарної передачі колісного редуктора *Raba 118/76*, що входить до складу трансмісії троллейбусів, з результатами кінцево-елементного моделювання в програмному комплексі *Autodesk Simulation*. Встановлено, що обід епіциклу ПКР піддається циклічному деформуванню при коефіцієнті асиметрії циклу напружень на внутрішній поверхні  $R_t = -1,58$ . Такий характер навантаження підтверджує актуальність уточнених розрахунків епіциклу на циклічну міцність з урахуванням нестационарності режимів навантаження передач у складі транспортних і енергетичних машин, а також неоднорідності напруженого стану обода в областях зубчастих зачеплень і з'єднання з корпусом.

**Ключові слова:** зубчасте зачеплення, шлицьове з'єднання, асиметрична система навантажень, замкнуте кругове кільце, плоский та просторовий види деформування.

The technique of strength calculation of a rim of an epicycle as closed ring of big curvature is offered and approved. The algorithm of separate modeling of flat and space forms of deformation of a ring which has allowed to receive rather simple formulas for calculation of the internal efforts and tension operating in the section of a rim is developed. Admissibility and adequacy of the offered models on accuracy is proved by application of the moment theory of covers, and also comparison of results of analytical calculation of an epicycle of planetary gear of a wheel gearbox of *Raba 118/76* applied as a part of transmission of trolleybuses with results of final and element modeling in the program complex *Autodesk Simulation*. It is established that the rim of an epicycle is exposed to cyclic deformation at coefficient of asymmetry of a cycle of tension on an inner surface of  $R_t = -1,58$ . Such nature of loading confirms relevance of the specified calculations of an epicycle on cyclic durability taking into account not stationarity of the modes of loading of gears as a part of transport and power vehicles, and also heterogeneity of a tension of a rim in areas of toothed gearings and connections with the case.

**Keywords:** toothed gearing, a splined joint, asymmetric system of loadings, the closed circular ring, flat and space types of deformation.

**Введение. Актуальность задачи.** Известные преимущества планетарных зубчатых передач (высокая нагрузочная способность и КПД благодаря многопоточности и внутреннему зацеплению, соосность и большие передаточные отношения при меньших габаритах и массе), обуславливая их широкое применение во встроенных приводах современных транспортных и энергетических машин. Эксплуатация в период разгона-торможения машины на низких частотах вращения при перегрузках по уровню нагружающего момента, а также циклический характер действующих напряжений приводят к преждевременным разрушениям деталей и узлов привода, в том числе обода эпицикла [1–5]. Обеспечение необходимого уровня надежности и долговечности эпицикла усложняется в связи с необходимостью параметрической оптимизации конструкции одновременно по двум критериям – прочности и жесткости, с целью повышения нагрузочной способности планетарной передачи путем наиболее равномерного распределения нагрузки между сателлитами [6–8].

Форма эпицикла – короткий тонкостенный цилиндр с внутренними зубьями – определяет выбор возможных расчетных моделей. В современной практике расчетов деталей машин (подшипников качения, поршневых колец, ступиц и других кольцевых элементов) наиболее распространена модель кольца, основным ограничением применения которой для расчетов эпицикла является

условие о неизменности формы осевого сечения в процессе деформирования [1]. При этом известные расчетные модели для компонентов деформаций и внутренних силовых факторов обода эпицикла "плавающей" конструкции не обеспечивают учет асимметрии нагружения обода со стороны внутреннего зацепления и шлицевого соединения с корпусом редуктора [8–10].

**Постановка задачи.** Эпицикл с внутренними зубьями и диаметром большим, чем длина ( $D > b$ ) моделируется кольцом, нагруженным вращающим моментом  $T_0$  в зубчатых зацеплениях с сателлитами и реактивным моментом на шлицах. Окружная  $F_{ti}$  и радиальная  $F_{ri}$  проекции сил  $F_{ni}$  в  $i$ -м зубчатом зацеплении определяют соответствующие тангенциальные и радиальные деформации (рис. 1). Активные нагрузки уравновешиваются силами  $P_{nj}$  на каждом из шлицов соединения эпицикла с крышкой корпуса редуктора (рис. 2).

Рассмотрена фаза однопарного зацепления сателлитов с эпициклом, при этом сосредоточенные силы  $F_{ni}$  приложены в полюсе зацепления. Шлицы являются продолжением эвольвентных зубьев с незначительно укороченной высотой. В предположении о близком к равномерному распределению нагрузки между шлицами расчетное количество нагруженных шлицов принято  $N_s = 64$ . Все нагрузки и деформации приведены к срединной поверхности стенки эпицикла. Распреде-

ние нагрузок  $q_{ni} = F_{ni} / a$ ,  $p_{nj} = P_{nj} / a_1$  по длине контактных линий принято равномерным. Начало координат размещено посередине ширины  $b$  эпицикла, оси  $OX$ ,  $OY$  – в плоскости симметрии. Радиальные и окружные проекции нагрузок  $q_{ni}$  и  $p_{nj}$  определены по формулам

$$\left. \begin{aligned} q_{ti} &= q_{ni} \cdot \cos \alpha_w, & q_{ri} &= q_{ni} \cdot \sin \alpha_w; \\ p_{ti} &= p_{ni} \cdot \cos \alpha_w, & p_{ri} &= p_{ni} \cdot \sin \alpha_w; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\alpha_w$  – угол зацепления.

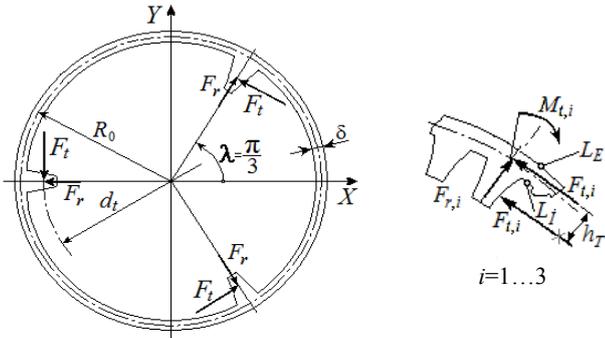


Рис. 1 – Расчетные схемы нагружения зубьев эпицикла

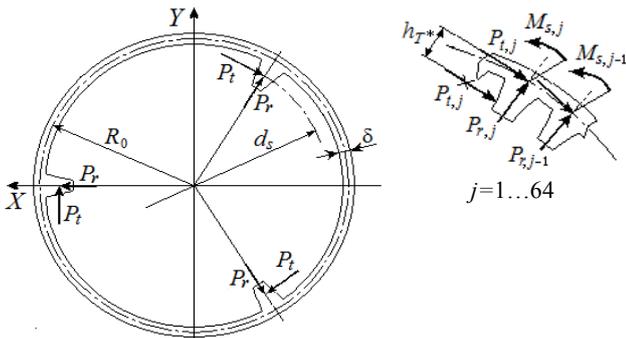


Рис. 2 – Расчетные схемы нагружения зубьев шлицевого соединения

Расчетные нагрузки в каждом из зубчатых зацеплений определяются вращающим моментом  $T_0=4023$  Н·м. Соответствующие значения радиальных и окружных сил  $F_{ri} = F_n \sin \alpha_w = 6183$  Н,  $F_{ij} = F_n \cos \alpha_w = 13090$  Н. Плечо силы  $F_{ij}$  относительно середины стенки эпицикла равно

$h_T = (0,5\delta + h_1 - m) = 8,55$  мм, сосредоточенные моменты от сил  $F_{ij}$ ,  $M_{ti} = M = F_{ij} \cdot h_T = 112$  Н·м. Значения реактивных усилий на каждом из шлицев  $P_{ij} = -608$  Н,  $P_{rj} = 287$  Н,  $M_s = 5,25$  Н·м.

**Расчетные модели.** Разрабатываемые модели и алгоритм расчета реализованы на примере конструкции эпицикла планетарного колесного редуктора (ПКР) *Raba 118/76* (табл. 1–3), применяемого в трансмиссиях троллейбусов ЮМЗ-Т2, -Т1 украинского производства. Материал эпицикла – низколегированная сталь 30ХГСА, термообработка – улучшение.

Таблица 1 – Основные размеры эпицикла, мм

Размер	Длина	Диаметр		Радиус средн. поверхности	Толщина стенки с
		наружный	делительный		
Усл. обозн.	$b$	$D$	$d_t$	$R_0$	$\delta$
Значение	97	244	217	117,5	9

Таблица 2 – Параметры прямозубого зацепления

Параметр	Модуль, мм	Число зубьев	Угол зацепл.	Сателлиты	
				Кол-во	Ширина, мм
Усл. обозн.	$m$	$N_s$	$\alpha_w$	$N_t$	$a$
Значение	3,25	64	$25^\circ 17'$	3	60

Таблица 3 – Параметры эвольвентного шлицевого соединения

Параметр	Число зубьев	Длина, мм	Диаметр, мм	Радиус, мм
Усл. обозн.	$N_s$	$a_1$	$d_s$	$R_0$
Значение	64	22	220	117,5

Для упрощения методики расчета и анализа результатов плоский и пространственный виды деформирования принято разделять и моделировать отдельно [1]. Алгоритм формирования расчетных моделей основан на эквивалентной замене действующей системы нагрузок компонентами симметричными и косимметричными относительно срединной плоскости  $XOY$  (рис. 3). Исходными для разработки алгоритма приняты следующие положения: эпицикл деформируется несимметрично относительно срединной плоскости  $XOY$ ; нагружение со стороны сателлитов смещено к левому торцу; шлицы расположены и нагружаются у правого торца.

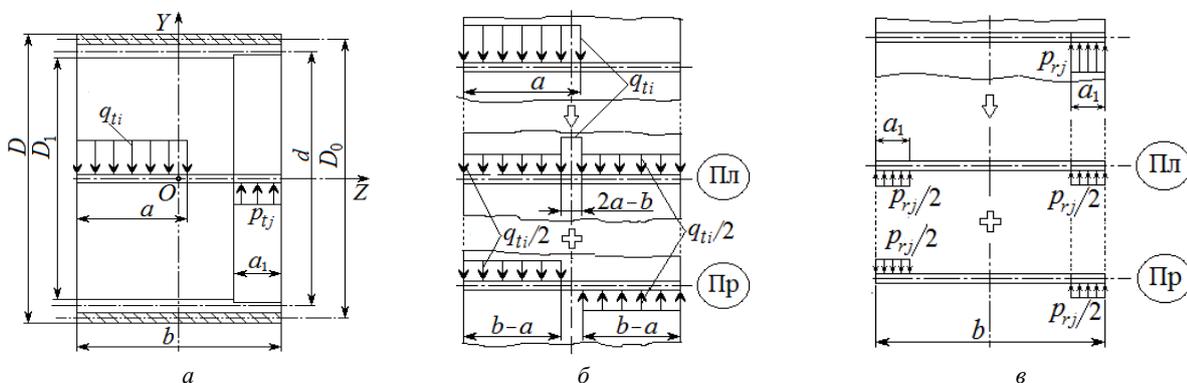


Рис. 3 – Алгоритм формирования расчетных моделей нагружения обода эпицикла:

$a$  – схема асимметричной системы нагрузок  $q_{ti}$ ,  $p_{rj}$  на один из зубьев;  $b$  – эквивалентная замена окружной асимметричной нагрузки  $q_{ti}$  симметричной и косимметричной компонентами;  $в$  – эквивалентная замена асимметричной нагрузки  $p_{rj}$

При симметричном нагружении эпицикла относительно плоскости XOY имеет место плоский изгиб (Пл). Из условия равновесия эпицикла следует

$$\sum_{i=1}^3 F_{ti} + \sum_{j=1}^{64} P_{tj} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^3 M_i + \sum_{j=1}^{64} M_j = 0.$$

Плоский изгиб обода эпицикла обусловлен только радиальными силами, приложенными в точках срединной поверхности диаметром  $D_0 = 235$  мм. В результате расчетная схема обода представлена в виде замкнутого кольца, нагруженного циклически симметрично произвольным количеством радиальных сил  $F$  (рис. 4).

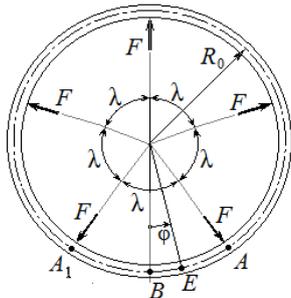


Рис. 4 – Схема циклически симметричного нагружения кольца радиальными силами

Плоская задача для замкнутого кольца является трехкратно статически неопределимой. Для раскрытия неопределимости применен канонический метод сил. Кольцо разрезано в сечении с окружной координатой  $\varphi = 0$ , где приложены изгибающий момент  $X_{p1}$ , окружная сила  $X_{p2}$  и поперечная сила  $X_{p3}$ . Заданные силы  $F_{ti}$  и  $P_{tj}$  обуславливают нагружение зубьев на участках зацепления (индекс  $t$ ) и соединения (индекс  $s$ ) с соответствующим угловым шагом

$$\lambda_t = 2\pi / 3; \quad \lambda_s = \pi / 32. \tag{2}$$

Силы расположены симметрично относительно линии разреза  $\varphi = 0$ , следовательно,  $X_{p3} = 0$ . Остальные усилия определяются зависимостями

$$X_{p1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\varphi) \left( \frac{1}{2} + \cos \varphi \right) d\varphi; \tag{3}$$

$$X_{p2} = \frac{2}{\pi D_0} \int_0^{2\pi} M_p(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \tag{4}$$

где  $M_p(\varphi)$  – изгибающий момент от внешних нагрузок в произвольном сечении с угловой координатой  $\varphi$ .

После определения функции  $M_p(\varphi)$  и вычисления интегралов (3), (4) получено

$$X_{p1} = FR_0 \left( \frac{1}{2 \sin(\lambda/2)} - \frac{1}{\lambda} \right); \quad X_{p2} = \frac{F}{2 \sin(\lambda/2)}. \tag{5}$$

Зависимости (5) определяют изгибающий момент и окружную силу в т. В начального сечения обода.

Циклическая симметрия расчетной схемы позволяет ограничить вычисление внутренних усилий сектором обода  $0 < \varphi < \lambda/2$  с угловыми размерами (2). В последующих расчетах использованы известные формулы [11]:

– для изгибающего момента

$$M_t = FR_0 \left( \frac{\cos \varphi}{2 \sin(\lambda/2)} - \frac{1}{\lambda} \right); \tag{6}$$

– для окружной силы

$$N = \frac{F \cos \varphi}{2 \sin(\lambda/2)}; \tag{7}$$

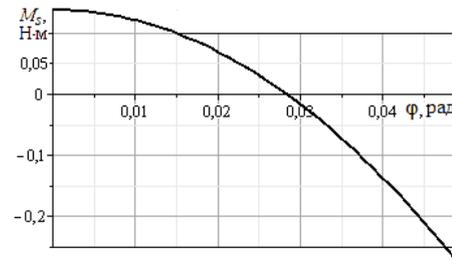
– для поперечной силы

$$Q = \frac{F \sin \varphi}{2 \sin(\lambda/2)}. \tag{8}$$

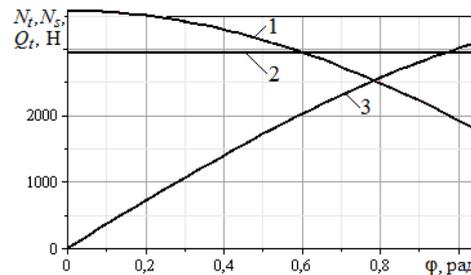
Радиальные силы в зацеплении при вращении сателлитов создают в обode эпицикла изгибающий момент  $M_t$ , изменяющийся циклически. В точке В при  $\varphi = 0$  значение  $M_t > 0$ , следовательно, обод изгибается выпуклостью внутрь, а наружные волокна сжимаются (рис. 5, а). В точке А при  $\varphi = 0,5\lambda_t = \pi/3$  обод изгибается выпуклостью наружу, изгибающий момент принимает отрицательное значение, максимальное по абсолютной величине. Синхронно действуют силы в шлицевом соединении, шаг которых  $\lambda_s$  и значения  $P_{tj}$  невелики. В результате максимальные значения изгибающего момента  $M_s$  (рис. 5, б) от сил  $P_{tj}$ , составляют 0,2% от соответствующих значений  $M_t$ . Подобное соотношение установлено и для поперечных сил  $Q_t$  и  $Q_s$  (на рис. 5, в график силы  $Q_s$  не показан ввиду малости значений).



а



б



в

Рис. 5 – Графики усилий в обode эпицикла при плоском деформировании: а – момента  $M_t(\varphi)$ ; б – момента  $M_s(\varphi)$ ; в – сил  $N_t(\varphi)$  и  $Q_t(\varphi)$  в зацеплениях (кривые 1 и 3) и в шлицевом соединении  $N_s(\varphi)$  (2)

Значения окружных сил находятся в диапазонах  $1785 < N_t < 3570$  Н и  $2925 < N_s < 2921$  Н (рис. 5, в). График  $N_s(\varphi) \cong \text{const}$  указывает на практически равномерное растяжение обода на участке шлицевого соединения.

Внутренние усилия в ободе от нагрузок  $F_r$  и  $P_r$ , суммируются:  $M_b = M_t + M_s$ ,  $N_0 = N_t + N_s$ ,  $Q = Q_t + Q_s$ .

Получено: в т.  $A$  при  $\varphi = \pi/3$   $M_b(\pi/3) = -137,4$  Н·м;  $N_A = 4710$  Н;  $Q = \pm (F_r + P_r) / 2 = \pm 3235$  Н; в т.  $B$  при  $\varphi = 0$   $M_b(0) = 72,7$  Н·м;  $N_B = 6491$  Н;  $Q = 0$ .

Установлены окружные напряжения на поверхностях обода в диаметральных сечениях, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , при плоской деформации:

$$\sigma_M^{(A)} = \pm \frac{6M_b^{(A)}}{b\delta^2} = \pm 104,9 \text{ МПа}, \quad \sigma_N^{(A)} = \frac{N_A}{b\delta} = 5,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_M^{(B)} = \pm \frac{6M_b^{(B)}}{b\delta^2} = \pm 55,5 \text{ МПа}, \quad \sigma_N^{(B)} = \frac{N_B}{b\delta} = 7,4 \text{ МПа}.$$

При постоянной внешней нагрузке окружные напряжения меняются на внутренней и наружной поверхностях при вращении сателлитов в диапазонах:  $(-99,5 < \sigma_i < 62,9)$  МПа и  $(-48,1 < \sigma_i < 110,3)$  МПа. Касательные напряжения, обусловленные силами  $Q$ , на порядок меньше окружных напряжений ( $\tau = 4,8$  МПа).

Пространственная форма изгиба определяется нагрузками, перпендикулярными срединной плоскости кольца. В общем случае это следующие сосредоточенные нагрузки: осевые силы  $G$ , моменты  $V$  в плоскостях касательных к кольцу и моменты  $W$  в диаметральных плоскостях (рис. 6).

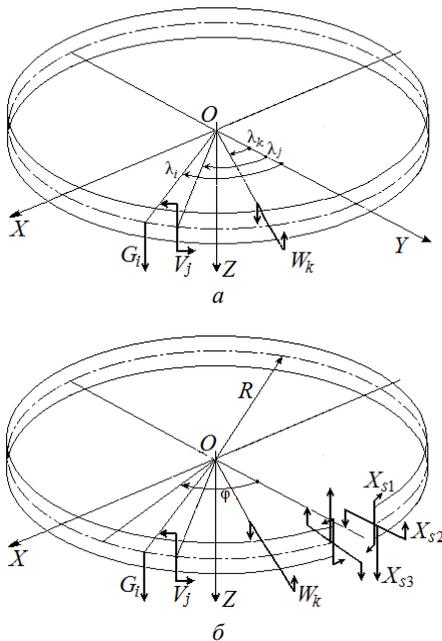


Рис. 6 – Модель кольца, нагруженного в плоскостях, перпендикулярных срединной плоскости  $XOY$ :  $a$  – внешнее нагружение;  $b$  – внутренние усилия

Внутренние усилия в сечении  $\varphi = 0$  определяются по известным формулам [11]

$$\left. \begin{aligned} X_{s1} &= R_0 \sum_{i=1}^N G_i \zeta_{1G}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^N V_i \zeta_{1V}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^N W_i \zeta_{1W}(\lambda_i); \\ X_{s2} &= R_0 \sum_{i=1}^N G_i \zeta_{2G}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^N V_i \zeta_{2V}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^N W_i \zeta_{2W}(\lambda_i); \\ X_{s3} &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\sum_{i=1}^N G_i \lambda_i + \frac{1}{R_0} \sum_{i=1}^N W_i \right], \end{aligned} \right\} (9)$$

где

$$\zeta_{1G}(\lambda) = \frac{\lambda \sin \lambda}{2\pi}; \quad \zeta_{1V}(\lambda) = \frac{\lambda \cos \lambda + \sin \lambda}{2\pi};$$

$$\zeta_{1W}(\lambda) = -\frac{\lambda \sin \lambda}{2\pi} + \frac{\cos \lambda}{(1+k_f)\pi};$$

$$\zeta_{2G}(\lambda) = \frac{\lambda \cos \lambda - \lambda}{2\pi}; \quad \zeta_{2V}(\lambda) = \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda - 1}{2\pi};$$

$$\zeta_{2W}(\lambda) = -\frac{\lambda \cos \lambda}{2\pi} - \frac{\sin \lambda}{(1+k_f)\pi}.$$

Установлен обобщенный коэффициент жесткости  $k_f$  для сечения кольца прямоугольной формы  $\delta \times b$  в виде

$$k_f = \frac{E_p J_p}{E_x J_x} = \frac{b^2 + \delta^2}{2(1+\mu)b^2}, \quad (11)$$

где  $J_x, J_p$  – осевой и полярный моменты инерции;  $E_x, E_p, \mu$  – модули упругости и коэффициент Пуассона для материала эпицикла.

Линия разреза эпицикла  $\varphi = 0$ , как и в плоском варианте задачи, проведена посередине между нагруженными зубьями. В силу симметрии расчетной схемы  $X_{s3} = 0$ . Аргумент в формулах (9)  $\lambda_i = \pi(2i-1)/N$ , причем для зубчатых зацеплений  $1 \leq i \leq 3$ , для шлицевого соединения  $1 \leq i \leq 64$ . Величины каждой из нагрузок  $G_i, V_i$  и  $W_i$  не зависят от номера индекса  $i$ , следовательно, выносятся за знаки сумм (10), для вычисления которых использованы известные формулы [12].

Для силовых факторов, действующих в начальном сечении обода  $\varphi = 0$  в общем случае нагружения и пространственной форме циклически симметричного деформирования, получены зависимости

$$\left. \begin{aligned} X_{s1} &= \frac{W - GR_0}{2 \sin(\pi/N)}; \\ X_{s2} &= -\frac{1}{2} \left[ GR_0 N + V \left( \frac{N}{\pi} - \frac{1}{2 \sin(\pi/N)} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (12)$$

Для эпицикла с прямыми зубьями  $G=0$ .

Анализ напряженного состояния эпицикла выполнен в секторе  $0 \leq \varphi \leq \lambda_i/2$ . Рассчитаны моментные нагрузки в касательных и диаметральных плоскостях обода (см. рис. 3, б, в):  $V_i = 0,5 q_i a (b-a) = 112$  Н·м;  $V_s = 0,5 p_i a_1 (b-a_1) = 23$  Н·м;  $W_i = 0,5 q_i a (b-a) = 114,4$  Н·м;  $W_s = 0,5 p_i a_1 (b-a_1) = 10,8$  Н·м, а также по зависимостям (12) внутренние моменты в сечении  $\varphi = 0$ , равные  $X_{s1} = 44$  Н·м,  $X_{s2} = 255$  Н·м.

В произвольном сечении обода при  $\varphi \leq 0,5\lambda_i = \pi/3$  внутренние моменты определяются по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} V(\varphi) &= X_{s1} \cos \varphi + X_{s2} \sin \varphi + V_s S_c + W_s S_s; \\ W(\varphi) &= -X_{s1} \sin \varphi + X_{s2} \cos \varphi + V_s S_s + W_s S_c, \end{aligned} \right\} (13)$$

где  $S_s = \sum_{j=1}^K \sin(\varphi - \lambda_j)$ ;  $S_c = \sum_{j=1}^K \cos(\varphi - \lambda_j)$ , при этом количество слагаемых  $K$  ограничено условием  $\varphi \geq \lambda_j$ .

Вычислены моменты  $V(\pi/3) = 110,3$  Н·м,  $W(\pi/3) = 61,0$  Н·м в сечении по впадине перед нагруженным зубом (см. рис. 1, т.  $L_i$ ) и определены соответствующие напряжения

$$\sigma_\varphi = \frac{6V(\pi/3)}{b^2\delta} = 7,8 \text{ МПа}; \quad \tau_{\varphi r} = \frac{6W(\pi/3)}{b^2\delta} = 4,3 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения при плоском и пространственном изгибе просуммированы. Установлено, что при вращении сателлитов расчетные величины меняются в следующих диапазонах: на наружной поверхности обода ( $-45 \leq \sigma_\varphi \leq 118,1$ ) МПа, на внутренней поверхности ( $-91,7 \leq \sigma_\varphi \leq 66$ ) МПа. Значения коэффициента асимметрии цикла напряжений соответственно равны: на внутренней поверхности  $R_I = -1,39$ , на наружной  $R_E = -0,38$ , что подтверждает необходимость выполнения проверочных расчетов эпицикла на сопротивление усталости.

Выполнена аналитическая верификация кольцевой модели обода эпицикла. При этом для расчета применена моментная теория цилиндрических оболочек. Для эпицикла заданных размеров (см. табл. 1) параметр оболочки равен  $\beta = [3(1-\mu^2)/(R_0^2\delta^2)]^{0,25} = 0,039528 \text{ мм}^{-1}$ , относительная длина  $\beta b = 3,8$ , что позволяет рассматривать соответствующую модель как короткую оболочку. Радиальные перемещения определены в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^4 C_k Y_k(\beta z) + \bar{w}, \quad (14)$$

где

$$\bar{w} = \frac{pR_0^2}{E\delta} = \frac{z_s P_r R_0}{2\pi a_1 E\delta} = 8,674 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

а также использованы функции Крылова

$$\left. \begin{aligned} Y_1(z) &= \text{ch}\beta z \cos\beta z; \\ Y_2(z) &= 0,5(\text{ch}\beta z \sin\beta z + \text{sh}\beta z \cos\beta z); \\ Y_3(z) &= 0,5\text{sh}\beta z \sin\beta z; \\ Y_4(z) &= 0,25(\text{ch}\beta z \sin\beta z - \text{sh}\beta z \cos\beta z). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Произвольные постоянные  $C_k$  определены из граничных условий, которые при пространственном кососимметричном деформировании удобно формулировать для области  $0 < z < b/2$  (смотри рис. 3, б). В этом диапазоне решение (14) получено отдельно для нагруженного участка  $z > z_1$  (с переобозначенными константами  $C_k = B_k$ ) и свободного участка  $0 < z < z_1$  (с константами  $C_k = A_k$  и  $\bar{w} = 0$ ) в виде

$$w(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^4 A_k Y_k(z), & 0 \leq z \leq z_1^-; \\ \sum_{k=1}^4 B_k Y_k(z) + \bar{w}, & z_1^+ \leq z \leq 0,5b, \end{cases} \quad (16)$$

где аппликата точки сопряжения  $z_1 = 0,5b - a_1 = 26,5 \text{ мм}$ ;  $z_1^\pm = z_1 \pm \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0$ .

Для определения констант  $A_k$  и  $B_k$  сформулированы 8 условий (табл. 4).

Из условий (17) следует  $A_1 = 0$  и  $A_3 = 0$ . По условиям (18), (19) сформирована система шести уравнений, решение которой дает следующие значения остальных коэффициентов:  $A_2 = -3,959 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_4 = -4,088 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_1 = 6,939 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_2 = 2,649 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_3 = -18,78 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_4 = 30,80 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ .

Таблица 4 – Условия для вычисления констант в формуле (19) по участкам

Граничные условия		Условия сопряжения	
$w _{z=0} = 0;$	(17)	$w _{z=z_1^-} = w _{z=z_1^+};$	(19)
$w _{z<0} = -w _{z>0};$		$w' _{z=z_1^-} = w' _{z=z_1^+};$	
$M_z _{z=0,5b} = 0;$	(18)	$w'' _{z=z_1^-} = w'' _{z=z_1^+};$	
$Q_z _{z=0,5b} = 0;$		$w''' _{z=z_1^-} = w''' _{z=z_1^+};$	

По результатам анализа решения (16) установлены характерные особенности напряженного состояния эпицикла при действии кососимметричной компоненты нагрузки. Первая производная функции (16) определяет углы поворота сечений  $\theta(z) \approx \text{const}$ , следовательно, образующие цилиндрической оболочки поворачиваются в диаметральной плоскости относительно срединного сечения, сохраняя при этом прямолинейную форму (рис. 7, а). По второй производной функции (16) определен удельный изгибающий момент  $M_z$ , действующий в поперечных сечениях оболочки. Максимум функции изгибающего момента  $|M_z| = 40 \text{ Н}\cdot\text{м/мм}$  смещен на расстояние 22 мм от торца (рис. 7, б), при этом значения максимальных напряжений относительно невелики  $\sigma_z = 6M_z/\delta^2 = 3,0 \text{ МПа}$ , что обусловлено известной высокой конструктивной прочностью кольцевых деталей.

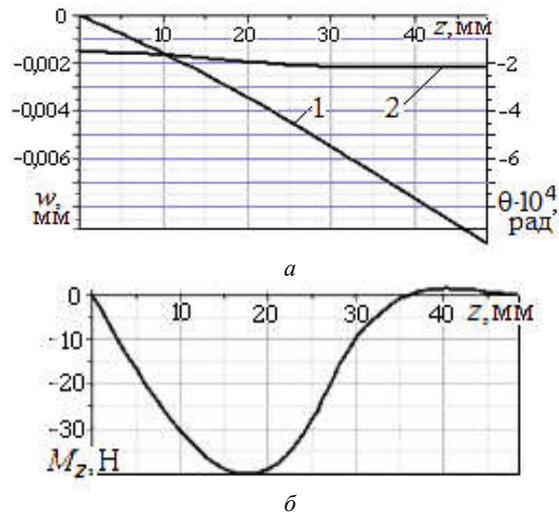


Рис. 7 – Графики функций:  
а – перемещений; б – изгибающего момента;  
кривая 1 соответствует радиальным перемещениям  $w(z)$ ;  
2 – углу поворота сечения  $\theta(z)$

Следовательно, принятие кольцевой модели большой кривизны для расчета обода эпицикла является обоснованным. Для подтверждения адекватности по точности разработанной аналитической модели выполнено сопоставление и анализ результатов аналитического расчета напряженного состояния обода эпицикла серийного ПКР *Raba 118/76* и методом конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе *Autodesk Simulation* (рис. 8, табл. 5). Аналогичные программные комплексы успешно используются для проверки адекватности не только аналитических моделей, но и результатов экспериментальных исследований натуральных передач вертолетов, грейферов и др. ответственных деталей машин [8, 13, 14].

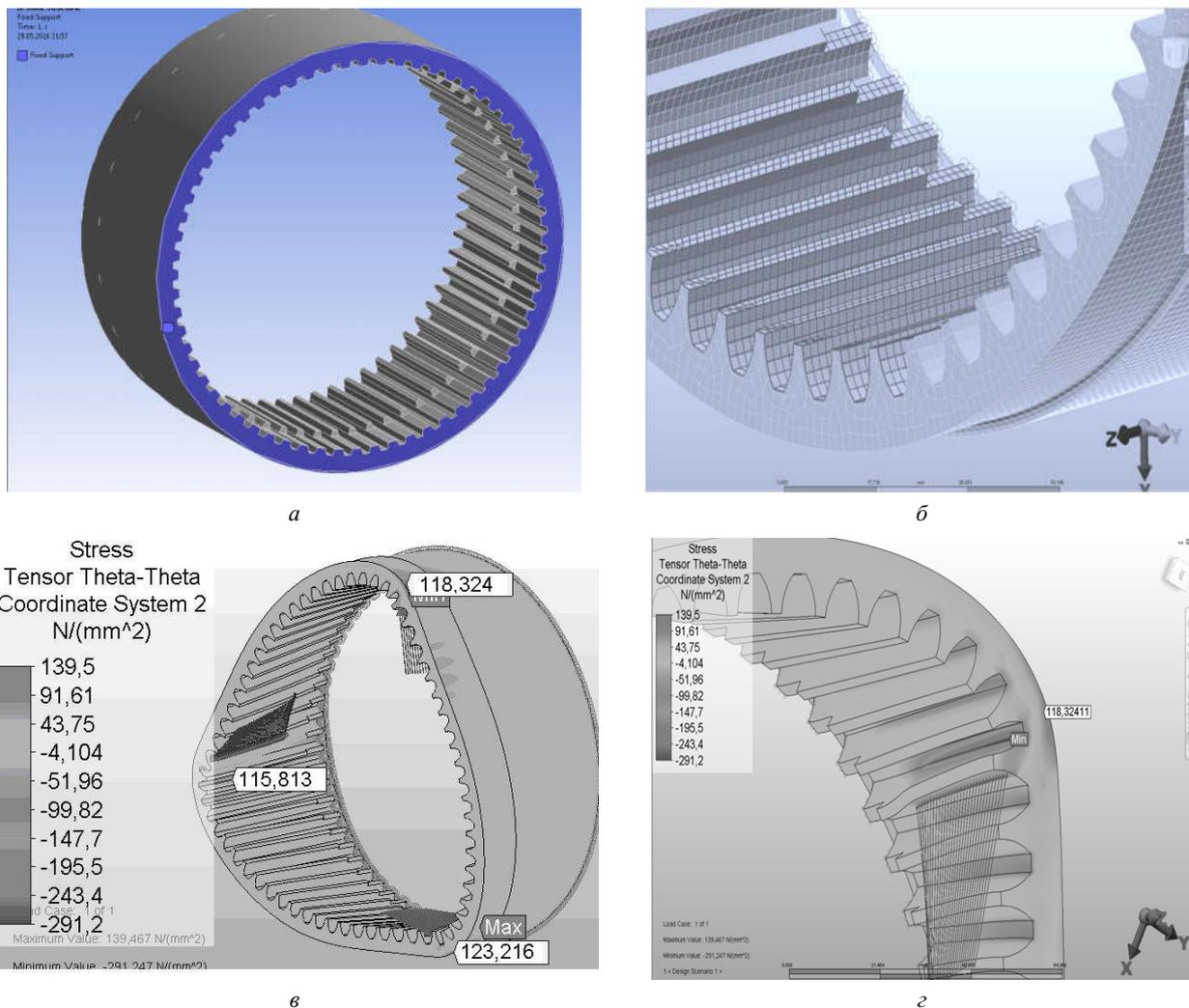


Рис. 8 – Результаты КЭ-моделирования эпицикла ПКР Raba 118/76 при нагружении вращающим моментом  $T_0 = 4023 \text{ Н}\cdot\text{м}$ :  
 а – 3D-модель; б – фрагмент моделирования трехмерными 20-узловыми кубическими элементами;  
 в – области максимальных напряжений  $\sigma_\varphi$  в ободу под действием распределенных нагрузок  $q_{mi}$  от сателлитов;  
 г – фрагмент напряженного состояния эпицикла

Таблица 5 – Расчетные значения напряжений  $\sigma_\varphi$ , МПа

Модель	В зоне нагруженного зуба ( $\varphi = 60^\circ$ ) на поверхности обода		Посередине между нагруженными зубьями ( $\varphi = 0^\circ$ )	
	внутр.	внешн.	внутр.	внешн.
Замкнутое кольцо	-66,0	118,1	45,0	-91,7
3D+КЭ	-72,5	123,2	51,6	-85,4

Различие в результатах, полученных для внутренней поверхности обода в зоне нагруженного зуба, объясняется тем, что в модели "кольцо" усилия перенесены в точки срединной поверхности, при этом не учтено влияние концентрации напряжений в галтелях зубьев (см. рис. 1 и 2). Значения максимальных напряжений отличаются в пределах допустимой погрешности  $\pm 10\%$ .

Проверка изгибной прочности обода эпицикла выполнена по максимальному расчетному значению окружного напряжения  $\sigma_{\max} = 118 \text{ МПа} \leq [\sigma]$ . В практике проектирования деталей ПКР транспортных машин принято принимать коэффициент безопасности по пределу текучести материала на уровне  $n_T = 2...2,5$ . При изготовлении эпицикла из стали 30ХГСА и термообработке – улучшение, соответствующее значение

предела текучести принято  $\sigma_{0,2} = 490 \text{ МПа}$ , в результате допустимых напряжений находятся в диапазоне  $[\sigma] = (196...245) \text{ МПа}$ . Следовательно, условие статической прочности для данной конструкции обода эпицикла выполняется.

В то же время известны не единичные случаи поломки обода эпицикла редукторов транспортных и энергетических машин по направлению образующей обода [5]. Характер поверхностей изломов свидетельствует об усталостном характере разрушений, что подтверждает актуальность выполнения проверочных уточненных расчетов обода эпицикла на циклическую прочность с учетом неоднородности его напряженного состояния и нестационарности режимов нагружения.

**Выводы:**

1. Предложен алгоритм формирования расчетных моделей обода эпицикла, основанный на замене системы действующих нагрузок их симметричными и косимметричными компонентами.
2. Методами моментной теории оболочек и конечных элементов обоснована адекватность прочностного расчета обода эпицикла ПКР как замкнутого тонкого кругового кольца большой кривизны.

3. Установлено, що обод епіцикла ПКР піддається циклічному деформуванню при коефіцієнті асиметрії цикла напружень на внутрішній поверхності  $R_i = -1,58$ . Такий характер напруження підтверджує актуальність уточнених розрахунків епіцикла на циклічну міцність з урахуванням нестационарності режимів навантаження передач в складі транспортних і енергетических машин, а також неоднорідності напруженого стану обода в областях зубчатих зацеплень і з'єднання з корпусом.

#### Список литературы

1. Редукторы энергетических машин: Справочник / Б. А. Балашов, Р. Р. Гальпер, Л. М. Гаркави и др.; Под общ. ред. Ю. А. Державца. – Л.: Машиностроение, 1985. – 232 с.
2. Samue P. D. Planetary transmission diagnostics / P. D. Samue, J. K. Conroy, J. P. Darryll // Glenn Research Center, NASA/CR-2004-21306882, 2004. – 83 p.
3. Gutrya S. Diagnostics of damages in trolleybus wheel reduction gears / S. Gutrya, D. Bordeniuk // MOTROL, T. 10a. – Lublin, 2008. – P. 65–71.
4. Гутиря С. С. Моделювання віброактивності і діагностика ушкоджень колісних редукторів троллейбусів / С. С. Гутиря, Д. М. Борденюк, А. М. Чанчин // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 134–140.
5. Гутиря С. С. Режими навантаження колісних редукторів троллейбусів / С. С. Гутиря, Д. М. Борденюк, А. М. Чанчин // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. – Вип. 10. – С. 91–96.
6. Litvin F. L. New Design and Improvement of Planetary Gear Trains / F. L. Litvin, A. Fuentes, D. Vecchiato, I. Gonzalez Perez // NASA/CR, 2004, P. 1–30.
7. Чанчин А. М. Моделювання показників жорсткості епіциклу у складі планетарного колісного редуктора // Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ". Зб. наук. праць. Серія: "Проблеми механічного приводу". – Х.: НТУ "ХПІ". – 2015. – № 34 (1143). – С. 144–153.
8. Han S. G. Strength Design Evaluation of the Double Planetary Gears / S. G. Han, Y. I. Shin, H. C. Kim, H. C. An, C. K. Song // Conf. of the Eighth Int. Symp. on Mechanics, Aerospace and Informatics Engineering, 2013, P. 62–63.
9. Hamand Y. C. Analysis of Stress and Deflection of Sun Gear by Theoretical and ANSYS Method / Y. C. Hamand, V. Kalamkar // Modern Mechanical Engineering, 2011, № 1, P. 56–68.
10. Shim J. Strength Verification of the Planetary Gear System / J. Shim, S. G. Han, C. H. Yoon, J. S. Suh, C. K. Song // Proceeding of the Int. Conf. on Mechanics, Heat and Mass Transfer, 2014, P. 92–96.
11. Goulet J. Résistance des matériaux / J. Goulet, J.-P. Boutin, F. Lerouge // – Paris: Dunod, 2014. – 352 p.
12. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. 9-е изд. – М.: Наука, 2005. – 232 с.
13. Fred B. NASA Technical Paper 2698. Gear Tooth Stress Measurements on the UH-60A Helicopter Transmission. Oswald. NASA-Langley, 1987, – 15 p.
14. Kirov V. Finite Element Anlysis of a Floating Planetary Ring Gear with External Splines. Gear Solutions / V. Kirov, Yu. Y Wang // 2014, P. 33–43.

#### References (transliterated)

1. Reduktory jenerhetycheskykh mashyn: Spravochnyk / B. A. Balashov, R. R. Hal'per, L. M. Harkavy y dr.; Pod obshch. red. Yu. A. Derzhavtsa. – Leningrad : Mashynostroenye, 1985. – 232 p.
2. Samue, P. D., Conroy, J. K., Darryll, J. P. Planetary transmission diagnostics. Glenn Research Center, NASA/CR-2004-21306882, 2004. – 83 p.
3. Gutrya, S., Bordeniuk, D. Diagnostics of damages in trolleybus wheel reduction gears. MOTROL, T. 10a. – Lublin, 2008. – P. 65–71.
4. Hutrya, S. S. Bordenyuk, D. M., Chanchin, A. M. Modelyuvannya vibroaktivnosti i diahnostryka ushkodzhenn' kolisnykh reduktoriv troleybusiv. Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosti konstruktiv: Zb. nauk. prats'. – Dnipropetrovs'k : Nauka i osvita, 2010. – Vyp. 14. – P. 134–140.
5. Hutrya, S. S. Bordenyuk, D. M., Chanchin, A. M. Rezhymy navantazhennya kolisnykh reduktoriv troleybusiv. Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila. Zb. nauk. prats'. – Dnipropetrovs'k : IMA-pres, 2009. – Vyp. 10. – P. 91–96.
6. Litvin, F. L., Fuentes, A., Vecchiato, D., Gonzalez, I. Perez. New Design and Improvement of Planetary Gear Trains. NASA/CR, 2004, P. 1–30.
7. Chanchin, A. M. Modelyuvannya pokaznykiv zhorstkosti epitsykladu u skladi planetarnoho kolisnoho reduktora // Visnyk Nats. tekhn. un-tu "KhPI". Zb. nauk. prats'. Seriya: "Problemy mekhanichnoho pryvodu". – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2015. – No 34 (1143). – P. 144–145.
8. Han, S. G., Shin, Y. I., Kim, H. C., An, H. C., Song, C. K. Strength Design Evaluation of the Double Planetary Gears. Conf. of the Eighth Int. Symp. on Mechanics, Aerospace and Informatics Engineering, 2013, P. 62–63.
9. Hamand, Y. C. Kalamkar, C. V. Analysis of Stress and Deflection of Sun Gear by Theoretical and ANSYS Method. Modern Mechanical Engineering, 2011, № 1, P. 56–68.
10. Shim, J., Han, S. G., Yoon, C. H., Suh, J. S., Song, C. K. Strength Verification of the Planetary Gear System. Proceeding of the Int. Conf. on Mechanics, Heat and Mass Transfer, 2014, P. 92–96.
11. Goulet, J. Boutin, J.-P., Lerouge, F. Résistance des matériaux. – Paris: Dunod, 2014. – 352 p.
12. Dvayt, H. B. Tablytsy yntehralov y druhye matematycheskye formuly. 9-e yzd. – Moscow : Nauka, 2005. – 232 p.
13. Fred, B. NASA Technical Paper 2698. Gear Tooth Stress Measurements on the UH-60A Helicopter Transmission. Oswald. NASA-Langley, 1987, – 15 p.
14. Kirov V. Finite Element Anlysis of a Floating Planetary Ring Gear with External Splines. Gear Solutions / V. Kirov, Yu. Y Wang // 2014, P. 33–43.

Поступила (received) 15.05.2016

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Аналітичне моделювання та розрахунок на міцність епіциклу планетарного редуктора / С. С. Гутиря, Ю. М. Хом'як, В. М. Жеглова, А. М. Чанчин // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 29–36. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2079-0791.**

**Аналитическое моделирование и прочностной расчет епіцикла планетарного редуктора / С. С. Гутиря, Ю. М. Хом'як, В. М. Жеглова, А. М. Чанчин // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ", 2016. – № 23 (1195). – С. 29–36. – Библиогр.: 14 назв. – ISSN 2079-0791.**

**Analytical modeling and strength calculation of an epicycle of a planetary gear / S. S. Gutrya, Y. M. Khomiak, V. M. Zhiglova, A. M. Chanchin // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Problem of mechanical drive. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2016. – No. 23 (1195). – P. 29–36. – Bibliogr.: 14. – ISSN 2079-0791.**

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Гутиря Сергій Семенович** – доктор технічних наук, професор, Одеський національний політехнічний університет, професор кафедри "Машинознавство і деталі машин"; тел.: (066) 735-87-65; e-mail: sergut@bk.ru.

**Гутиря Сергей Семенович** – доктор технических наук, профессор, Одесский национальный политехнический университет, профессор кафедры "Машиноведение и детали машин"; тел.: (066) 735-87-65; e-mail: sergut@bk.ru.

**Gutrya Sergiy Semenovich** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Odessa National Polytechnic University, Professor at the Department of "Engineering science and machine elements"; tel.: (066) 735-87-65; e-mail: sergut@bk.ru.

**Хом'як Юрій Мєфодійович** – кандидат технічних наук, доцент, Одеський національний політехнічний університет, доцент кафедри "Нафтогазове та хімічне машинобудування"; тел.: (048) 795-44-51; e-mail: jomiak38@gmail.com.

**Хомяк Юрий Мєфодиевич** – кандидат технических наук, доцент, Одесский национальный политехнический университет, доцент кафедры "Нефтегазовое и химическое машиностроение"; тел.: (048) 795-44-51; e-mail: jomiak38@gmail.com.

**Khomiak Yuriy Mefodiyovych** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Odessa National Polytechnic University, Associate Professor at the Department of "Oil, gas and chemical engineering"; tel.: (048) 795-44-51; e-mail: jomiak38@gmail.com.

**Жєглова Вікторія Михайлівна** – кандидат технічних наук, доцент, Одеський національний політехнічний університет, доцент кафедри "Металорізальні верстати, стандартизація та сертифікація"; тел.: (093) 311-39-03; e-mail: victory\_nika@mail.ru.

**Жєглова Виктория Михайловна** – кандидат технических наук, доцент, Одесский национальный политехнический университет, доцент кафедры "Металлорежущие станки, стандартизация и сертификация"; тел.: (093) 311-39-03; e-mail: victory\_nika@mail.ru.

**Zheglova Victoriia Mixailovna** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Odessa National Polytechnic University, Associate Professor at the Department of "Machine tools, standardization and certification"; tel.: (093) 311-39-03; e-mail: victory\_nika@mail.ru.

**Чанчин Андрій Миколойович** – Одеський національний політехнічний університет, асистент кафедри "Машинознавство і деталі машин"; тел.: (096) 637-00-06, e-mail: rafail2@rambler.ru.

**Чанчин Андрей Николаевич** – Одесский национальный политехнический университет, ассистент кафедры "Машиноведение и детали машин"; тел.: (096) 637-00-06; e-mail: rafail2@rambler.ru.

**Chanchin Andriy Mykolajovych** – Odessa National Polytechnic University, assistant at the department of "Engineering science and machine elements"; tel.: (096) 637-00-06; e-mail: rafail2@rambler.ru.

УДК 621.833;62.652

**С. С. ГУТИРЯ, В. П. ЯГЛІНСЬКИЙ, А. М. ЧАНЧІН**

## ГОЛОВНІ ЧАСТОТИ РЕДУКТОРІВ ПОРТАЛЬНИХ ТЯГОВИХ МОСТІВ

На основі запропонованої моделі коливальної системи двопоточного бортового редуктора (ДБР) у складі трансмісії низькопольного тролейбуса розроблено аналітичні залежності визначення пружних деформацій та математичні моделі спектру головних частот системи. За результатами чисельного моделювання побудовано діаграми функцій головних частот від конструктивних параметрів ДБР, виконано порівняння з частотними характеристиками планетарного колісного редуктора (ПКР). Відмічено негативний прояв можливої "квазиульової" жорсткості пружної системи ДБР, що спричиняє зниження першої головної частоти системи та резонансні явища при русі тролейбусів на низьких швидкостях та підвищених навантаженнях трансмісії у режимах розгону-гальмування.

**Ключові слова:** двопоточний бортовий редуктор, модель коливальної системи, спектр головних частот, "плаваюча" шестерня, "квазиульова" жорсткість системи.

На основе предложенной модели колебательной системы двухпоточного бортового редуктора (ДБР) в составе тягового моста низькопольного троллейбуса разработаны аналитические зависимости определения упругих деформаций и математические модели спектра главных частот системы. По результатам численного моделирования построены диаграммы зависимости главных частот от конструктивных параметров ДБР, выполнено сравнение с частотными характеристиками планетарного колесного редуктора (ПКР). Отмечено негативное проявление "квазиульовой" жесткости упругой системы ДБР, обуславливающей понижение первой главной частоты системы и резонансным явлениям при движении троллейбуса при низких скоростях и повышенных моментах нагружения трансмиссии на режимах разгона-торможения.

**Ключевые слова:** двухпоточный бортовой редуктор, модель колебательной системы, спектр главных частот, "плавающая" шестерня, "квазиульовая" жесткость системы.

On the basis of the offered model of oscillatory system of the two-line onboard gearbox (TOG) as a part of the driving axles of the low-floor trolleybus analytical dependences of definition of elastic deformations and mathematical models of a range of the main frequencies of system are developed. By results of numerical modeling charts of dependence of the main frequencies on design data of TOG are constructed, comparison with frequency characteristics of the planetary wheel gearbox (PWG) is executed. It is established that for a serial design of TOG type AU-11135 the values of the main frequencies are higher than the corresponding values for PWG type Raba 318/78, and also considerably exceed experimentally established range of a frequency range of vibrations of some of the modern trolleybuses. Negative manifestation of "quasizero" rigidity of the TOR decrease of the first main frequency of oscillating system and to the resonant phenomena at low speeds of the trolleybus's movement and the raised moments of loading of transmission on the modes of dispersal and braking is noted. The received results on determination of natural frequencies of TOG provide a theoretical basis for further researches of parametrical and forced fluctuations of driving axles of portal type for the purpose of development of effective methods and means for decrease of their vibration activity as a part of transmission of modern vehicles.

**Keywords:** double-flow driving axle, the model of the oscillating system, the range of natural frequencies, "floating" gear wheel, "quasizero" rigidity of system.

**Вступ.** На сьогодні у результаті бурхливого розвитку міст-мегаполісів транспортні пробки і смог стали

нагальними екологічними проблемами для більшості країн світу. Як приклад ефективного планування і роз-

© С. С. Гутиря, В. П. Ягліньський, А. М. Чанчин, 2016