

Ю.А. БРАНСПИЗ, д-р техн. наук,
А.Ю. КАШТАНОВ, магистр

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛОСКОМЕРИДИАННОГО ПО- ЛЯ

На прикладі показано, що для запропонованого перетворення координат розв'язання рівняння Лапласа для плоского меридіанного потенціального поля на поверхні одиничного радіусу співпадає з розв'язанням рівняння Лапласа плоскопаралельного потенціального поля для відповідних граничних умов.

На примере показано, что для предложенного преобразования координат решение уравнения Лапласа для плоскомеридианного потенциального поля на поверхности единичного радиуса совпадает с решением уравнения Лапласа плоскопаралельного потенциального поля при соответствующих граничных условиях.

Введение. Рассматривается потенциальное поле с осевой симметрией (плоскомеридианное поле), для которого в цилиндрической системе координат (ρ, z, θ) имеет место уравнение Лапласа вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где $\psi(\rho, z)$ – скалярный потенциал рассматриваемого поля; ρ – радиальная координата; z – вторая метрическая координата цилиндрической системы координат (ρ, z, θ) .

Для уравнения (1) аналитическое решение в общем случае встречает определенные трудности, что обусловило в непосредственной практике расчетов полей разработку методов решения уравнения (1) на основе установления аналитической зависимости этого решения с решением уравнения Лапласа для скалярного потенциала соответствующего (например, по граничным условиям) плоскопаралельного поля. Это связано с тем, что для уравнения Лапласа в плоскопараллельном случае имеется достаточно обширная теоретическая база, позволяющая осуществлять аналитические расчеты плоскопараллельных полей практически любой сложности [1].

В этой связи следует констатировать, что в настоящее время задача связи между потенциалами плоскопараллельного поля и поля с осевой симметрией в общем случае (для всей расчетной области при произвольных граничных условиях) не решена. Имеются лишь отдельные исследования по свойствам такой связи [2-4] (см. также библиографию на эту тему в [5]).

Как следствие, в настоящее время широкое распространение получили решения уравнения (1) численными методами, применение которых, впрочем, не позволяет непосредственно устанавливать зависимости между параметрами

рассчитываемого поля с осевой симметрией, что является необходимым при решении разнообразных задач анализа такого поля. Поэтому задача об установлении аналитической связи между потенциалами плоскопараллельного поля и поля с осевой симметрией является актуальной.

В данной работе предлагается новый подход к решению этой задачи, основанный на установлении связи между потенциалами плоскомеридианного и плоскопараллельного поля не во всей расчетной зоне, а на некотором цилиндре, образующая которого параллельна оси симметрии плоскомеридианного поля (ось z).

Постановка задачи. Для рассматриваемого случая плоскомеридианного поля, потенциал которого удовлетворяет уравнению (1), произведем следующее преобразование координат

$$x = \ln \rho$$

и

$$y = z,$$

(2)

в результате которого уравнение (1) в новых координатах (x, y), как это несложно показать, может быть переписано к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{-2x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

В самом деле, согласно (2), вторая производная потенциала ψ по координате z просто заменяется второй производной по новой координате y , а для слагаемых в (1) с производными по координате ρ имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-x}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-x} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{-x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-x} \right) \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{-2x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-2x}, \end{aligned}$$

что и дает в сумме для двух первых слагаемых в левой части (1) первое слагаемое в левой части (3).

В связи с уравнением (3) следует заметить, что для всех точек на оси $x = 0$ оно переписывается к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

который представляет собой уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат для плоскопараллельного (двумерного) поля.

Таким образом, согласно (2), точки с координатой $\rho = 1$ переходят в точки

оси $x = 0$, в уравнение (1) плоскомеридианного поля переходит в уравнение (4) для плоскопараллельного поля, что дает возможность получения решения уравнения для потенциала плоскомеридианного поля на основе решения уравнения для потенциала плоскопараллельного поля (по крайней мере, для всех точек с координатой $\rho = 1$). Такая возможность обуславливает задачу ее практической реализации, которая и решается в данной работе.

Общая формулировка задачи. Пусть решение уравнения (1) ищется в некоторой двумерной (для координат ρ и z) области G_0 , ограниченной некоторой линией $g(\rho, z)$, на которой задано значение потенциала ψ или его производной (граничные условия).

Пусть также преобразование (2) переводит область G_0 и ее границу $g(\rho, z)$ в другую двумерную (для координат x и y) область G_0^* , ограниченную линией $g^*(x, y)$. При этом в соответственных точках границ $g(\rho, z)$ и $g^*(x, y)$ сохраняются граничные условия для потенциала ψ .

Тогда, если в области G_0^* распределение потенциала ψ на оси $x = 0$ описывается некоторой функцией $f(y)$, то, согласно приведенному выше преобразованию уравнения (1) к уравнению (4), можно предполагать, что этой же функцией будет описываться распределение потенциала ψ в области G_0 в соответственных точках с координатой $\rho = 1$.

Пример расчета. Не имея возможности доказать приведенное предположение, покажем на одном практическом примере, что такой подход к установлению связи между потенциалами плоскомеридианного и плоскопараллельного поля имеет место. А именно, будем рассматривать решение уравнения (1) для области G_0 , изображенной на рис. 1, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \leq e, z = 0 & - \psi = 0; & 0 \leq \rho \leq e, z = e & - \psi = \psi_0; \\ \rho = e, 0 \leq z \leq e & - \psi = 0; & \rho = 0, 0 \leq z \leq e & - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для этой области решение уравнения (1), полученное методом разделения переменных [6], может быть записано в виде следующей суммы

$$\psi(\rho, z) = 2\psi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{e} z\right) \cdot J_0\left(\frac{x_{0k}}{e} \rho\right)}{x_{0k} \cdot J_1(x_{0k}) \cdot \operatorname{sh}(x_{0k})}, \quad (6)$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; x_{0k} – k -й корень функции Бесселя нулевого порядка.

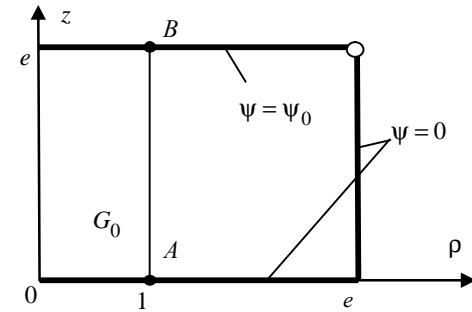


Рис. 1. Расчетная область плоскомеридианного поля

Из выражения (6) несложно получить следующее распределение потенциала ψ на линии AB ($\rho=1$ и $0 \leq z \leq e$, рис. 1)

$$\psi(\rho, z) = \psi_0 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh}\left(\frac{x_{0k}}{e} z\right) \cdot J_0\left(\frac{x_{0k}}{e}\right)}{x_{0k} \cdot J_1(x_{0k}) \cdot \text{sh}(x_{0k})}. \quad (7)$$

Согласно тому, что изложено выше, это же распределение имеет место и на линии A^*B^* , которая получается из линии AB после преобразования по (2) области G_0 в область G_0^* (рис. 2).

Чтобы проверить это, достаточно найти распределение потенциала ψ на линии A^*B^* в области G_0^* (бесконечная в одну сторону полоса, рис. 2). Это можно сделать, заметив, что для потенциала на линии A^*B^* в области G_0^* распределение потенциала ψ на ней может быть с любой степенью точности получено как распределение потенциала вблизи правой границы плоскопараллельной области G_0^{**} , изображенной на рис. 3, при достаточно большом горизонтальном размере a этой области.

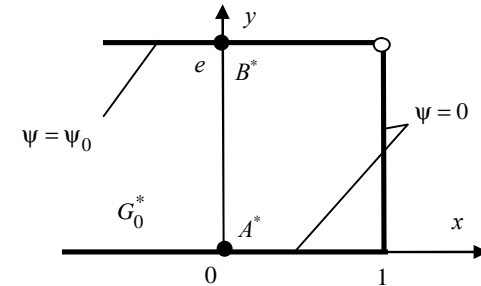


Рис. 2. Преобразованная расчетная область

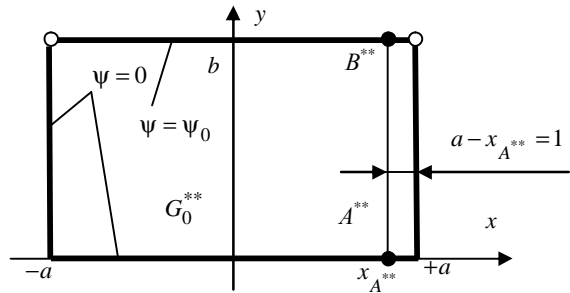


Рис. 3. Вспомогательная плоскопараллельная расчетная область

А именно, зная распределение потенциала плоскопараллельного поля в области G_0^{**} , задаваемое следующим выражением (его также можно получить методом разделения переменных) [6]

$$\Psi_0 \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2k-1}{a} \pi x\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{2k-1}{a} \pi y\right)}{\text{sh}\left(\frac{2k-1}{a} \pi b\right)}, \quad (8)$$

несложно определить распределение потенциала на линии $A^{**}B^{**}$ (эта линия расположена на единичном расстоянии от правой границы области G_0^{**} , рис. 3) при таком значении горизонтального размера области G_0^{**} , для которого его увеличение не приводит к изменению распределения потенциала на линии $A^{**}B^{**}$ (это изменение меньше задаваемой точности расчета).

Таким образом, распределение потенциала на линии $A^{**}B^{**}$ в области G_0^{**} может быть посчитано по выражению (8) при подстановке в него $b = e$ и $x = a - 1$, когда $a \gg 1$. Непосредственный численный расчет показал, что при $a \geq 30$ и $k = 200$ сумма в (8) практически не изменяется.

В таблице приведены результаты расчетов по (7) и (8) отношения ψ/ψ_0 для указанных условий. Согласно этим данным преобразование уравнения (1) по (2) дает в рассмотренном примере совпадающее распределение потенциала плоскомеридианного и плоскопараллельного поля для соответственных линий $\rho = 1$ и $x = 0$. Расхождение полученных результатов можно объяснить недостаточной точностью расчета функций Бесселя, о чем свидетельствует последняя строка в таблицы. Повышение точности расчета функций Бесселя должно привести к снижению значений отношения ψ/ψ_0 , вычисленных по (7), что должно снизить и расхождение результатов расчетов по (7) и по (8).

Таблица – Результаты расчета распределения потенциала для линий $\rho = 1$ и $x = 0$

z	ψ/ψ_0		Погрешность, %
	по (7)	по (8)	
$0.2 \cdot e$	0,117	0,107	8,45
$0.4 \cdot e$	0,258	0,230	10,6
$0.6 \cdot e$	0,448	0,396	11,6
$0.8 \cdot e$	0,708	0,645	8,86
e	1,087	0,999	8,11

Выводы. Подтверждена возможность использования предложенного преобразования координат для решения уравнения Лапласа в плоскомеридианном случае. Требуется теоретическое обобщение такого использования.

Список литературы: 1. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчёт электрических и магнитных полей. – М.: Энергия, 1970. – 376 с. 2. Сочнев А.Я. О классе плоскомеридианных полей, идентичных по геометрической структуре плоскопараллельным полям // Электричество. – 1966. – 10. – С. 48-52. 3. Острейко В.Н. О связи плоскомеридианных и плоскопараллельных полей эквипотенциальных электродов // Изв. вузов. Электромеханика. – 1972. – № 9. – С. 942-948. 4. Бранстиз Ю.А. Связь потенциалов идентичных по структуре двумерных полей // Материалы IV Всеукр. науч.-техн. конф. "Актуальные вопросы теоретической и прикладной биофизики, физики и химии" (г. Севастополь, 21-26 апреля 2008 г.). – Севастополь: СевНТУ, 2008. – С. 78-81 5. Загирняк М.В. Исследование, расчет и усовершенствование шкивных магнитных сепараторов. – К.: ИЗМН, 1996. – 488 с. 6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высш. шк., 1978. – 231 с.

Поступила в редколлегию 12.09.08