

РОЗРАХУНОК МАГНІТНОЇ ПРОНИКНОСТІ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ НАДПРОВІДНИКОВОЇ КОТУШКИ

У статті розглянуто високотемпературна надпровідникова котушка і запропоновано метод розрахунку її магнітної проникності, що необхідно для електромагнітного розрахунку. Проаналізовано вплив способу намотки ВТНП котушки на її магнітну проникність.

В статье рассмотрена високотемпературная сверхпроводниковая катушка и предложен метод расчета ее магнитной проницаемости, которая необходимо для электромагнитного расчета. Проанализировано влияние способа намотки ВТСП катушки на ее магнитную проницаемость.

Використання високотемпературних надпровідних (ВТНП) матеріалів в електроенергетиці є досить перспективним напрямком, який набув значного розвитку за останні роки [1]. Для проведення подальших електромагнітних розрахунків необхідно визначити розподілену магнітну проникність ВТНП обмотки [2]. Припустимо, що котушка намотана ВТНП проводом круглого перерізу з деяким шагом рис. 1, де \vec{B} вектор магнітної індукції. Якщо розглянути переріз, то розмір $l = D$, відповідно, дорівнює діаметру струмопровідної надпровідної жили.

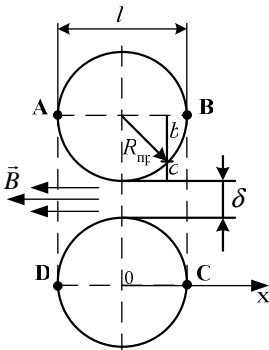


Рис. 1. Переріз обмотки.

Таким чином, для ділянки **ABCD** повітряного проміжку між проводів отримаємо магнітний опір:

$$R_M = \frac{1}{\mu_{\text{нп}}} \cdot \frac{l}{1 \cdot (2R_{\text{нп}} + \delta)} = 2 \int_0^{R_{\text{нп}}} \frac{1}{\mu_0 \left[\delta + 2 \left(R_{\text{нп}} - \sqrt{R_{\text{нп}}^2 - x^2} \right) \right]} dx, \quad (1)$$

де $\mu_{\text{нп}}$ – розподілена абсолютна магнітна проникність ВТНП котушки; $l = 2 \cdot R_{\text{нп}}$ у даному випадку довжина; $R_{\text{нп}}$ – радіус надпровідної жили;

μ_0 – магнітна стала; δ – повітряний зазор між ВТНП проводами обмотки.

Магнітний опір залежить від геометричних параметрів ділянки проходження магнітного потоку

$$dR_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{dx}{\left[\delta + 2 \cdot \left(R_{\text{пр}} - \sqrt{R_{\text{пр}}^2 - x^2} \right) \right]} \cdot 1. \quad (2)$$

Площа зазору проходження магнітного потоку змінюється по осі абсцис

$$S(x) = \delta + 2 \left(R_{\text{пр}} - \sqrt{R_{\text{пр}}^2 - x^2} \right) = \delta + 2 \cdot R_{\text{пр}} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R_{\text{пр}}} \right)^2} \right]. \quad (3)$$

Рівняння (1) з урахуванням (3) спрощується:

$$\frac{1}{\mu_{\text{нп}} \left(1 + \frac{\delta}{2 R_{\text{пр}}} \right)} = \int_0^{R_{\text{пр}}} \frac{2 dx}{\mu_0 \cdot S(x)}. \quad (4)$$

З рівняння (4) виразимо розподілену магнітну проникність ВТНП котушки

$$\mu_{\text{нп}} = \frac{\mu_0}{2 \left(1 + \frac{\delta}{2 R_{\text{пр}}} \right) \int_0^{R_{\text{пр}}} \frac{dx}{S(x)}}. \quad (5)$$

Вводимо заміну $y = \frac{x}{R_{\text{пр}}}$, $dy = \frac{1}{R_{\text{пр}}} dx$, $0 \leq y \leq 1$, а x належить інтервал $0 \leq x \leq R_{\text{пр}}$.

Зробимо заміну у рівнянні (5) і отримаємо

$$\frac{1}{\mu_{\text{нп}} \left(1 + \frac{\delta}{2 R_{\text{пр}}} \right)} = \int_0^{R_{\text{пр}}} \frac{2 dx}{\mu_0 \cdot S(x)} = \frac{2}{\mu_0} \int_0^1 \frac{R_{\text{пр}} dy}{\delta + 2 R_{\text{пр}} \left(1 - \sqrt{1 - y^2} \right)} =$$

$$= \frac{2}{\mu_0} \int_0^1 \frac{dy}{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 2\left(1 - \sqrt{1 - y^2}\right)}. \quad (6)$$

З (6) виразимо розподілену абсолютну магнітну проникність над-провідникової котушки

$$\mu_{\text{пп}} = \mu_0 \cdot \frac{1}{2\left(1 + \frac{\delta}{2R_{\text{пп}}}\right)} \frac{1}{\int_0^1 \frac{dy}{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 2\left(1 - \sqrt{1 - y^2}\right)}}. \quad (7)$$

Розрахунок інтеграла у знаменнику буде дорівнювати [3]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dy}{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 2\left(1 - \sqrt{1 - y^2}\right)} &= \left. \begin{array}{l} y = \sin t \\ t = \arcsin y \\ dy = \cos t dt \\ \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} = c \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\cos t dt}{c + 2(1 - \cos t)} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(c+2) - (c+2) - 2\cos t}{c + 2 - 2\cos t} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(c+2) - (c+2) - 2\cos t}{c + 2 - 2\cos t} dt = -\frac{1}{2} \left[\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{(c+2)}{c + 2 - 2\cos t} dt \right] = \left. \begin{array}{l} z = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ \cos t = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \\ dt = \frac{2 dz}{1 + z^2} \end{array} \right| = \\ &= -\left[\frac{1}{2} \arcsin 1 - \frac{1}{2} (c+2) \int_0^1 \frac{2 dz}{c + 2 - 2 \frac{1 - z^2}{1 + z^2} (1 + z^2)} \right] = \\ &= (c+2) \int_0^1 \frac{dz}{(c+2)(1 + z^2) - 2(1 - z^2)} - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \\ &= (c+2) \int_0^1 \frac{dz}{c + cz^2 + 2z^2 + 2 - 2 + 2z^2} - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \\ &= (c+2) \int_0^1 \frac{dz}{4z^2 + cz^2 + c} - \frac{1}{2} \arcsin 1 = (c+2) \int_0^1 \frac{dz}{z^2 (c+4) + c} - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c+2}{c+4} \int_0^1 \frac{dz}{z^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{c+4}}\right)^2} - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \frac{c+2}{(c+4) \cdot \sqrt{\frac{c}{c+4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\arcsin 1}{2}}{\sqrt{\frac{c}{c+4}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \\
&= \frac{c+2}{\sqrt{c \cdot (c+4)}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\arcsin 1}{2}}{\sqrt{\frac{c}{c+4}}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin 1 = \\
&\frac{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 2}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} \left(\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 4 \right)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}}}{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 4}}} - \frac{\pi}{4}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Відповідно отримаємо магнітну проникність для надпровідної котушки

$$\begin{aligned}
\mu_{\text{нп}} = \mu_0 \frac{1}{\frac{\left(\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 2\right)^2}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} \left(\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 4\right)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}}}{\frac{\delta}{R_{\text{пр}}} + 4}}} - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\delta}{2R_{\text{пр}}}\right)} \tag{9}
\end{aligned}$$

Таким чином, можна зробити висновок, що одним з визначальних параметрів для розрахунку магнітної проникності надпровідникової котушки є шаг обмотки.

Рівняння (9) відповідає випадку круглого перерізу проводу надпровідної котушки. При зміні способу намотки проводу, або геометричних параметрів проводу, відповідно, буде різнитись магнітна проникність для котушки. Розглянемо випадок, коли обмотка виконана у шаховому порядку, як зображено на рис. 2.

Відстань CD буде дорівнювати $(2R_{\text{пр}} + \delta) \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ділянку **ACDB** повітряного проміжку між проводів розбиваємо на три ділянки по осі абсцис:

На ділянці 1: $0 \leq x \leq (\sqrt{3} - 1)R_{\text{пр}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$, де площа

$$S_1(x) = (2R_{\text{пр}} + \delta) - 2\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - x^2};$$

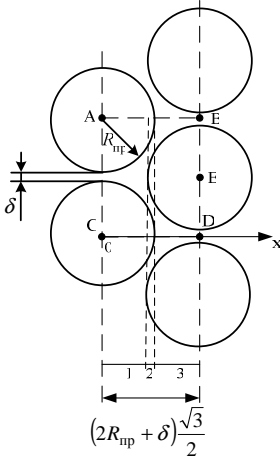


Рис. 2. Переріз обмотки виконаної у шаховому порядку.

На ділянці 2:

$(\sqrt{3} - 1)R_{\text{пр}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta \leq x \leq R_{\text{пр}}$, де площа

$$S_2(x) = (2R_{\text{пр}} + \delta) - 2\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - x^2} - 2\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - \left[\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right) - x \right]^2};$$

На ділянці 3: $R_{\text{пр}} \leq x \leq \sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)$,

де площа

$$S_3(x) = (2R_{\text{пр}} + \delta) - 2\sqrt{R_{\text{пр}}^2 - \left[\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right) - x \right]^2}.$$

Загальна площа ділянки **ABCD** буде $S(x) = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x)$.

Таким чином розподілену магнітну проникність для надпровідної котушки можна визначити так:

$$\frac{1}{\mu_{\text{нп}}} \cdot \frac{\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)}{2 \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)} = \int_0^{\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)} \frac{1}{\mu_0 S(x)} dx;$$

$$\mu_{\text{нп}} = \mu_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)} \cdot \int_0^{\sqrt{3} \left(R_{\text{пр}} + \frac{\delta}{2} \right)} \frac{1}{S(x)} dx \quad (10)$$

Розв'язання інтегралу з $S_1(x)$ буде аналогічним до розв'язання (8), але з урахуванням меж інтегрування буде

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{(\sqrt{3}-1)R_{\text{пп}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta} \frac{dx}{S_1(x)} = \int_0^{(\sqrt{3}-1)R_{\text{пп}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta} \frac{dx}{(2R_{\text{пп}} + \delta) - 2\sqrt{R_{\text{пп}}^2 - x^2}} = \\
 & = \int_0^{\sqrt{3}-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}}} \frac{dy}{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 2(1 - \sqrt{1-y^2})} = \\
 & = \frac{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 2}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \left(\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 4 \right)}} \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \right)^2}}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}} + 4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \right)} \cdot \\
 & - \frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \right)
 \end{aligned}$$

Розрахувати інтеграл з $S_2(x)$, який наведений нижче, можна чисельними методами, але при цьому треба врахувати необхідну точністю розрахунку.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{R_{\text{пп}}} \frac{dx}{S_2(x)} = \\
 & \int_0^{(\sqrt{3}-1)R_{\text{пп}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta} \frac{dx}{\sqrt{3}-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} - 2 \left(1 - \sqrt{1-y^2} - \sqrt{1 - \left[\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} \right) - y \right]^2} \right)}
 \end{aligned}$$

Розв'язання інтегралу з $S_3(x)$ буде аналогічним, до розрахунку інтегралу з $S_1(x)$, тому:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{\text{пп}}}^{\sqrt{3}\left(R_{\text{пп}}+\frac{\delta}{2}\right)} \frac{dx}{S_3(x)} = \int_{R_{\text{пп}}}^{\sqrt{3}\left(R_{\text{пп}}+\frac{\delta}{2}\right)} \frac{dx}{(2R_{\text{пп}}+\delta)-2\sqrt{R_{\text{пп}}^2-\left[\sqrt{3}\left(R_{\text{пп}}+\frac{\delta}{2}\right)-x\right]^2}} = \\
& = \int_1^{\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right)} \frac{dy}{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}-2\left(1-\sqrt{1-\left[\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right)-y\right]^2}\right)} = \left. \begin{array}{l} a = \sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right) \\ a-y = \sin t \\ t = \arcsin(a-y) \\ -dy = \cos t dt \\ \frac{\delta}{R_{\text{пп}}} = c \end{array} \right| = \\
& = \frac{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}+2}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\left(\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}+4\right)}} \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{1-\left(\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right)-1\right)^2}}{\sqrt{\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}+4}\left(\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right)-1\right)} \\
& \quad - \frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta}{R_{\text{пп}}}\right)-1 \right).
\end{aligned}$$

Результат розрахунку інтегралу для третьої ділянки з урахуванням меж інтегрування дорівнює результату – отриманому для першої ділянки, що відповідає геометричній моделі обмотки.

Формула для абсолютної магнітної проникності надпровідникової котушки може бути наведена у наступному вигляді

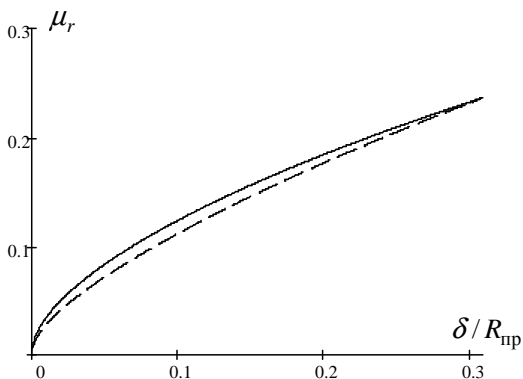
$$\begin{aligned}
\mu_{\text{пп}} = \mu_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(\sqrt{3}-1)R_{\text{пп}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\delta} \cdot \\
\cdot \int_0^{R_{\text{пп}}} \frac{dx}{S_1(x)} + \int_{(\sqrt{3}-1)R_{\text{пп}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\delta}^{R_{\text{пп}}} \frac{dx}{S_2(x)}
\end{aligned}$$

Результати розрахунку відносної магнітної проникності для різних повітряних проміжків δ між проводами ВТНП котушки з простою рядовою та шаховою намоткою наведені у табл. 1.

Таблиця 1 - Відносна магнітна проникність ВТНП котушки з різним шагом

$\delta/R_{\text{пр}}$	μ_r	
	проста рядова намотка	шахова рядова намотка
0,01	0,034	0,028
0,02	0,05	0,041
0,05	0,083	0,072
0,1	0,123	0,111
0,15	0,156	0,145
0,2	0,184	0,176
0,25	0,209	0,205
0,3	0,232	0,231

За результатами розрахунку побудовані графіки кривих відносної магнітної проникності для ВТНП котушки з простою рядовою та шаховою намотками в залежності від відношення міжпровідного проміжку обмотки до радіуса проводу ($\delta/R_{\text{пр}}$), які наведені на рис. 3.



— проста рядова намотка; -- шахова рядова намотка

Рис. 3. Залежність μ_r ВТНП котушки від параметру $\delta/R_{\text{пр}}$.

За графіками кривих рис. 3 можна побачити, що при збільшенні повітряного проміжку між ВТНП проводами надпровідникової котушки збільшується відносна магнітна проникність котушки. Якщо котуш-

ка намотана у шаховому порядку, то її розподілена абсолютна магнітна проникність буде декілька менша у порівнянні з простою рядовою намоткою, але при збільшенні зазору різниця для обох випадків буде незначна.

Список джерел інформації: 1. *Шавкин С.В., Щербаков В.И.* Сверхпроводниковая электротехника в США // Инф. бюл. Сверхпроводники для электроэнергетики. – 2008. – Т. 5, №. 1. – С. 4-6. 2. *Гончаров С.В.* Аналіз впливу магнітної проникності ВТНП котушки на магнітне поле // Східно-Європейський журнал передових технологій. Енергозберігаючі технології та устаткування. – Харків: Технологічний центр, 2009. – № 4/11 (40). – С. 50-53. 3. *Геворкян Ю.Л.* Высшая математика в примерах и задачах/ Сост. Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака и др. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2005.– Т. 1 – 448 с.



Гончаров Євген Вікторович. Захистив диплом інженера в Національному технічному університеті "Харківський політехнічний інститут" за фахом електричні машини й апарати в 2004 р. Молодший науковий співробітник кафедри загальної електротехніки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".

Наукові інтереси пов'язані з проблемами використання високотемпературної надпровідності в електричних пристроях.

Надійшла до редколегії 25.09.2009