УДК 621.316:532.232

А.Н. МОРОЗ, канд. техн. наук, докторант, ХНТУСГ им. П.Василенко, Харьков

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В ЖИДКОСТИ

Приведено рішення граничної задачі в явній формі та формули для розрахунку параметрів п‘єзокерамічного датчика для вимірювання характеристик акустичної хвилі в рідині.

Приведено решение краевой задачи в явной форме и формулы для расчета параметров пьезокерамического датчика для измерения характеристик акустической волны в жидкости.

Постановка проблемы. Одним из способов интенсификации процесса мойки шерсти является использование акустических колебаний, возбуждаемых гидродинамическими излучателями. Для исследования физических процессов в моющей жидкости необходимо использовать пьезоэлектрические датчики вследствие их хороших эксплуатационных характеристик, широких динамических и частотных диапазонов, малых размеров и высокой надежности [1]. Важной задачей успешного применения пьезоэлектрических датчиков является совершенствование расчетных методов анализа их характеристик на стадии проектирования, что возможно на основе создание математических моделей, которые позволят проектировать пьезоэлектрические датчики с заданными параметрами.

Для расчета колебаний цилиндрического пьезокерамического преобразователя, возбуждаемых электрическим генератором, применена теория, основанная на гипотезах Киргофа-Лява. Движение цилиндрической оболочки пьезокерамического датчика с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением [2]. Расчет характеристик ультразвукового пьезокерамического преобразователя также может быть осуществлен с помощью метода эквивалентной электрической цепи, учитывающей нагружение со стороны исследуемой среды [3].

Недостатком перечисленных методов является недостаточная точность расчетных характеристик.

Цель статьи – формулировка краевой задачи расчета пьезоэлектрического датчика цилиндрической формы.

Модель датчика. Активная часть датчика моделируется полым пьезокерамическим круговым цилиндром с внешним и внутренним радиусами соответственно R_1 и R_2, на боковых сторонах которого размещены электроды. При воздействии поля падающих акустических волн на внешнюю поверхность пьезокерамического цилиндра, в силу пьезоэлектрического эффекта, на электродах возникает разность потенциалов, пропорциональная параметрам акустического поля. Данные процесс взаимодействия акустического поля с активной частью пьезокерамического датчика моделируется краевой задачей теории электроупругости [4]. Основные уравнения – материальные уравнения и уравнения движения рассматриваются в линейном приближении, а уравнения для электромагнитного поля в электростатическом приближении [5]. Кроме того, математическая модель пьезоэлектрического датчика строится на основе поперечного пьезоэлектрического эффекта, т.е. рассматриваются радиальные колебания пьезокерамического цилиндра с предварительной поляризацией, для которой вектор индукции электрического поля в каждой точке цилиндра перпендикулярен его геометрической оси симметрии [6].

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z, совпадающей с осью геометрической симметрии цилиндра. Предполагается, что вектор предварительной поляризации в каждой точке цилиндра перпендикулярен оси z, т.е. рассматривается случай радиальной поляризации [4].

Цилиндр помещен в жидкость с плотностью ρ_0 и скоростью распространения звуковых волн c_0, которые могут описываться уравнениями акустики в линейном приближении [4]. Звуковая волна, падая на боковую поверхность пьезокерамического цилиндра, возбуждает упругие радиальные колебания, в результате чего на электродах, размещенных на боковых поверхностях цилиндра, возникнет разность потенциалов. Разность потенциалов пропорциональна давлению и колебательной скорости возбуждающей звуковой волны. В этой связи рассмотрим основные уравнения электроупругости [4] в применении к пьезокерамическому цилиндру.

В случае пьезокерамических цилиндров с радиальной поляризацией материальные уравнения можно записать следующим образом [8]

$$
\begin{cases}
\sigma_{rr} = c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}\right) - e_{33}E_r\,; \\
\sigma_{\varphi\varphi} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_r\,; \\
\sigma_{rr} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_r\,; \\
\sigma_{rz} = c_{44}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z\,; \\
\sigma_{\varphi z} = \dfrac{1}{2}\left(c_{11} - c_{12}\right)\varepsilon_{\varphi z}\,; \\
\sigma_{r\varphi} = c_{41}\varepsilon_{r\varphi} - e_{15}E_{\varphi},
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
D_r = \varepsilon_2 E_r + e_{31}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}\right) + e_{33}\varepsilon_{rr}\,; \\
D_{\varphi} = \varepsilon_1 E_{\varphi} + e_{15}\varepsilon_{r\varphi}\,; \\
D_z = \varepsilon_1 E_z + e_{15}\varepsilon_{rz}\,,
\end{cases}
\tag{2}
$$

где [σ], [ε] – тензоры механических напряжений и деформаций; $\vec{E} = \left(E_r, E_{\varphi}, E_z\right)$, $\vec{D} = \left(D_r, D_{\varphi}, D_z\right)$ – векторы напряжения и индукции электрического поля; [c], [e] – тензоры упругих и пьезоэлектрических постоянных; ε_1, ε_2 – диэлектрические постоянные материала цилиндра.

Компоненты тензора деформаций [ε] в приближении линейной теории упругости выражаются через компоненты вектора перемещения с помощью соотношений Коши [9]

$$
\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}; \quad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \tag{3}
$$

$$
\varepsilon_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}; \quad \varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial z};
$$

$$
\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \frac{U_{\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi},
$$

где $\vec{U} = \left(U_r, U_{\varphi}, U_z\right)$ – вектор перемещений.

Уравнения (1)-(3) должны быть дополнены уравнениями движения и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля.

Уравнения движения линейной теории упругости в цилиндрических координатах имеют вид [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=\rho\,\dfrac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial z}+2\,\dfrac{\sigma_{r\varphi}}{r}=\rho\,\dfrac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\,\dfrac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{4}$$

где ρ – плотность материала цилиндра.

Для акустического диапазона частот уравнения Максвелла можно приближенно заменить на уравнения вынужденной электростатики, которые применительно к рассматриваемой задаче сводятся к следующим уравнениям:

$$\begin{cases} rot\vec{E}=0; \\ E=-\,gradU=-\vec{e}_r\,\dfrac{\partial U}{\partial r}-\dfrac{\vec{e}_\varphi}{r}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi}-\vec{e}_z\,\dfrac{\partial U}{\partial z}; \\ div\vec{D}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial D_z}{\partial z}=0, \end{cases} \tag{5}$$

где U – потенциал напряженности электростатического поля.

В дальнейшем при формулировке граничной задачи будем использовать в качестве основных переменных вектор перемещений $\vec{U}=\left(U_r, U_\varphi, U_z\right)$ и электростатический потенциал U.

Уравнения (1)-(5) образуют полную систему уравнений линейной электроупругости. Поскольку предполагается, что пьезокерамический цилиндр находится в жидкости с равновесной плотностью ρ_0 и скоростью распространения звука c_0, то уравнения (1)-(5) необходимо дополнить уравнениями линейной акустики [7], а именно

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}+\gamma\frac{\partial U_0}{\partial t}-c_0^2\Delta U_0=0, \tag{6}$$

где U_0 – потенциал скоростей, из которого поле скорости $\vec{V}$ получается в виде

$$\vec{V}=\frac{1}{\rho_0}gradU_0, \tag{7}$$

а давление P – в виде

$$P-P_0=-\frac{\partial U_0}{\partial t}-\gamma U_0\ ; \qquad (8)$$

P_0 – статическое давление в невозмущенной жидкости; γ – постоянная затухания.

Постановки граничной задачи. Теперь для полной постановки граничной задачи следует сформулировать граничные и начальные условия.

Будем предполагать, что все величины изменяются во времени по закону $\exp(-i\omega t)$. В этом случае нет необходимости задавать начальные условия. Рассмотрим теперь граничные условия на поверхности пьезокерамического цилиндра. Как известно [7], снятие энергии с динамически деформированного пьезокерамического цилиндра осуществляется с помощью электродных покрытий, нанесенных на части поверхности цилиндра. Относительно электродных покрытий будем предполагать следующее: во-первых, они являются достаточно тонкими и идеально проводящими с пренебрежимо малой массой; во-вторых, расположены на внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндра.

В случае нагружения пьезокерамического цилиндра внешним давлением на электродах возникнет разность потенциалов $2V_0'$. Поэтому граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал электрического поля, имеют вид:

$$U\big|_{S^{\pm}}=\pm V_0\,, \qquad (9)$$

где S^- и S^+ – внешний и внутренний электроды.

Формулировка граничных условий на тех частях поверхности цилиндра, которые не покрыты электродами, основана на использовании уравнений (5) и эти условия состоят в следующем [1]:

$$D_r^+=D_r^-\,;\quad U^+=U^-\,, \qquad (10)$$

т.е. должны быть непрерывны как электростатический потенциал U, так и нормальные к поверхности цилиндра компоненты вектора индукции электрического поля.

Рассмотрим теперь механические граничные условия. Эти условия в терминах вектора перемещений задаются на внешней боковой поверхности цилиндра и состоят в равенстве давления со стороны жидкости, в которой находится цилиндр, нормальному напряжению на этой поверхности, со стороны цилиндра. Как показано в [3], это граничное условие можно представить в виде

$$P\big|_{r=R_1} = \left(c_{12} div\vec{U} + \left(c_{33} - c_{13}\right)\frac{\partial U_r}{\partial r} + \left(2e_{31} + e_{33}\right)\frac{\partial U}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_1}, \qquad (11)$$

где P – давление на внешнюю боковую поверхность пьезокерамического цилиндра; $\vec{U}$ – вектор перемещения; U – электростатический потенциал.

Относительно внутренней поверхности цилиндра будем полагать, что она свободна от механических напряжений.

Теперь целесообразно записать уравнения движения (4) и уравнения (5) в терминах вектора перемещения $\vec{U}$ и электростатического потенциала U. Для этого подставим в материальные уравнения (2), связывающие векторы индукции и напряженности электрического поля с тензором деформации, вместо тензора деформации его выражение (3) через вектор перемещений; тогда получим:

$$\begin{cases} D_r = \varepsilon_2 E_r + e_{31}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{U_r}{r} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z}\right) + e_{33}\dfrac{\partial U_r}{\partial r}; \\ D_\varphi = \varepsilon_1 E_\varphi + e_{15}\left(\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \dfrac{U_\varphi}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_r}{\partial \varphi}\right); \\ D_z = \varepsilon_1 E_z + e_{15}\left(\dfrac{\partial U_r}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial r}\right). \end{cases} \qquad (12)$$

Далее, подставим (12) в уравнение (5) и учтем представление напряженности электрического поля через потенциал U

$$\vec{E} = -gradU.$$

После преобразований имеем:

$$\varepsilon_1 \Delta U + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = e_{15}\left(\Delta U_r + \frac{U_r}{r^2}\right) + \qquad (13)$$

$$+\left(e_{31} + e_{15}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(div\vec{U}\right) + e_{31}\frac{1}{r}div\left(\vec{U}\right) + \left(e_{33} - e_{31} - 2e_{15}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_r}{\partial r}\right)$$

Преобразуем уравнения движения (4). Для чего, используя материальные уравнения (1), выразим тензор напряжения [σ] через вектор перемещения $\vec{U}$ и потенциал U. Имеем

$$
\begin{cases}
\sigma_{rr} = c_{33}\dfrac{\partial U}{\partial r} + c_{13}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{U_r}{r} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z}\right) + e_{33}\dfrac{\partial U}{\partial r};\\
\sigma_{\varphi\varphi} = c_{13}\dfrac{\partial U_r}{\partial r} + c_{11}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{U_r}{r}\right) + c_{13}\dfrac{\partial U_z}{\partial z} + e_{31}\dfrac{\partial U}{\partial r};\\
\sigma_{zz} = c_{13}\dfrac{\partial U_r}{\partial r} + c_{12}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{U_r}{r}\right) + c_{11}\dfrac{\partial U_z}{\partial z} + e_{31}\dfrac{\partial U}{\partial r};\\
\sigma_{rz} = c_{44}\left(\dfrac{\partial U_r}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial r}\right) + e_{15}\dfrac{\partial U}{\partial z};\\
\sigma_{\varphi z} = \dfrac{1}{2}\left(c_{11} - c_{12}\right)\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial U_{\varphi}}{\partial z}\right);\\
\sigma_{r\varphi} = c_{41}\left(\dfrac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \dfrac{U_{\varphi}}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_r}{\partial \varphi}\right) + e_{15}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial z}.
\end{cases}
\qquad (14)
$$

Подставляя (14) в уравнения движения (4) и используя результаты [4, 6], получим

$$
\begin{aligned}
&\tilde{n}_{11} grad div \vec{\mathrm{U}} - \frac{\tilde{n}_{11} - \tilde{n}_{12}}{r} rotrot \vec{\mathrm{U}} + \left(\tilde{n}_{44} - \frac{\tilde{n}_{11} - \tilde{n}_{12}}{2}\right)\times\\
&\times\left[grad\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,U_r\right)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \vec{U}}{\partial r}\right) + \vec{e}_r\left(\Delta U_r + \frac{\partial}{\partial r}\left(div\,\vec{U}\right) + \right.\right.\\
&\left.\left. + 2\frac{U_r}{r}\right) - \vec{e}_{\varphi}\frac{U_{\varphi}}{r^2}\right] + \vec{e}_r\left(c_{11} + c_{33} - 4\,c_{44} - 2\,c_{13}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) -\\
&-\left(c_{12} - c_{13}\right)\left[grad\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}\right) + \vec{e}_r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,div\,\vec{U}\right)\right] =\\
&= -\rho\,\omega^2\,\vec{\mathrm{U}} - \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}\,e_{15}\,\Delta U - \left(e_{31} + e_{15}\right) grad\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{e_{15}}{r} grad\,U -\\
&- \vec{e}_r\left(e_{33} - e_{31} - 2\,e_{15}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right).
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Таким образом, задача расчета состоит в решении уравнений (6), (13), (15), удовлетворяющих граничным условиям (9), (10), (11). Непосредственное решение этой задачи может быть проведено только численными методами с использованием компьютера. Однако следует отметить, что даже применение известных численных методов для построения решения уравнений (13), (15) сопряжено со значительными трудностями [4].

Выводы. В результате получено решение соответствующей краевой задачи в явной форме и приводятся формулы для расчета параметров пьезокерамического датчика для измерения характеристик акустической волны в жидкости.

Список использованных источников: 1. *Шарапов В.М.* Пьезоэлектрические датчики / *В.М. Шарапов, М.П. Мусиенко, Е.В. Шарапова*. – М.: Техносфера, 2006. – 632 с. **2.** *Дрозденко А.И.* Излучение акустических волн одиночным цилиндрическим преобразователем с внутренней полостью, заполненной средой. [Електронний ресурс] (Результати акустичного симпозіуму “КОНСОНАНС-2007”. – Київ: ІГМ НАН України, 25-27 вересня 2007. – С.80-85. – Режим доступу: http://www.hydromech.kiev.ua/rus/www-cons/2007/cons2007-080-85.pdf. **3.** Ультразвуковые пьезокерамические преобразователи с магнитоакустическим слоем [Електронний ресурс] / *М.М. Карпук, Д.А. Костюк, Ю.А. Кузавко, В.Г. Шавров* // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30. – Вып. 23. – С. 70-76 – Режим доступу: http://www.ioffe.ru/journals/pjtf/2004/23/p70-76.pdf. **4.** *Гринченко В.Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Электроупругость / *В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга*; Отв. ред. *А.Н. Гузь*. Т. 5. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с. **5.** *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн / *А.А. Семенов* – М.: Изд. МГУ, 1968. – 317 с. **6.** *Бежанян В.А., Улитко А.Ф.* Векторные краевые задачи электроупругости для цилиндров из пьезокерамических материалов // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика. – 1984. – № 6. – С. 16-28. **7.** *Скучик Е.* Основы акустики / *Е. Скучик*. – Т. 1. – М.: Мир, 1976. – 520 с. **8.** Методы и приборы ультразвуковых исследований / Под. ред. *У. Мэзона*. – М.: Мир, 1966. – 592 с. **9.** *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости / *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* – М.: Наука, 1987. – 246 с.

Поступила в редколлегию 14.12.2009