

*М.М. РЕЗИНКИНА*, д-р техн. наук, НТЦ МТО НАН Украины,  
Харьков

*Л.Э. ЛОБЖАНИДЗЕ*, аспирант, НТЦ МТО НАН Украины, Харьков

## **РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ОБЪЕКТОВ**

Наведено розрахунок постійного магнітного поля ферромагнітних об'єктів складних просторових конфігурацій за допомогою методу скінчених об'ємів і поглинаючих граничних умов. Як приклад, за допомогою запропонованої методики виконаний розрахунок розподілу магнітного поля ферромагнітних стрижнів.

Приведен расчет постоянного магнитного поля ферромагнитных объектов сложных пространственных конфигураций с помощью метода конечных элементов и поглощающих граничных условий. В качестве примера с помощью предложенной методики выполнен расчет распределения магнитного поля ферромагнитных стержней.

**Введение.** Существует ряд задач, для решения которых аналитические методы не разработаны или имеют существенную погрешность. К таким задачам относят, в частности, расчет магнитного поля (МП) объектов сложных пространственных конфигураций, находящихся в геомагнитном поле: морские суда [1], искусственные спутники Земли [2], ферромагнитные конструкции зданий [3]. Для подобного рода задач целесообразно применение численных методов, например, метода конечных объемов [4, 5]. Данная статья посвящена постановке задачи численного расчета распределения магнитного поля и магнитного момента трехмерных ферромагнитных тел.

**Расчет постоянного магнитного поля с помощью метода конечных объемов и поглощающих граничных условий.** Для нахождения распределения постоянного магнитного поля в окрестности и внутри ферромагнитных объектов, находящихся в однородном МП, рассматриваемая область разбивается на ячейки-параллелепипеды. При этом узлы расчетной сетки  $(i, j, k)$  лежат на границах раздела сред. В пределах каждой из ячеек свойства среды полагаются однородными. Метод конечных объемов [4, 5] предполагает интегрирование уравнений Максвелла по объему  $V$  каждой ячейки, на которые разбита расчетная область. Используя теорему Гаусса, заменим интегрирование

дивергенции индукции МП  $\vec{B}$  по объему интегрированием нормальной компоненты данной функции по поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dv = \oint_S B_n ds = 0,$$

где  $S$  – поверхность параллелепипеда, грани которого делят пополам расстояния между соседними узлами.

Выразив  $\vec{B}$  через напряженность  $\vec{H}$  ( $\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м), для каждого узла расчетной сетки получим решаемое уравнение в виде:

$$\oint_S \hat{\mu}_{i,j,k} \cdot H_n ds = 0, \quad (1)$$

где  $\hat{\mu}_{i,j,k}$  – относительная магнитная проницаемость среды, заключенной внутри  $(i, j, k)$ -ой ячейки.

Чтобы не рассчитывать три компоненты вектора напряженности магнитного поля,  $\vec{H}$  выражалась через скалярный магнитный потенциал  $\phi$ :

$$\vec{H} = - \operatorname{grad} \phi. \quad (2)$$

Такое представление возможно, поскольку рассматривается статическое МП, являющееся потенциальным ( $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ ). Подставив (2) в (1) и заменив производные их разностными аналогами, получим уравнение для каждого узла расчетной сетки [6]. Для решения данной системы был использован итерационный метод переменных направлений [7], модифицированный применительно к решению системы трехмерных эллиптических уравнений [8].

Как известно, на практике часто приходится иметь дело с расчетом МП в так называемых открытых областях, что существенно увеличивает расчетную область, так как ее границы отодвигаются от исследуемого объекта на большое расстояние, где МП можно считать затухающим. Но, как правило, полезной является лишь информация о МП в непосредственной близости и внутри исследуемого объекта. Использование так называемых "поглощающих граничных условий" позволяет во много раз уменьшить объем расчетной области, снижая порядок решаемой системы уравнений и время расчетов. Так, применение метода "одноосно хорошо согласованных слоев" UPML (uniaxially perfectly matched layers) [9] позволяет приблизить границы расчетной области практически вплотную к объектам.

Суть UPML метода заключается в том, что при решении уравнений Максвелла на границе расчетной области вводятся дополнительные среды, распределение поля в которых не учитывается в результатах расчета, так как оно носит лишь вспомогательный характер. Электрические и магнитные параметры данных сред задаются анизотропными, что обеспечивает быстрое и безотражательное затухание электромагнитного поля. Для случая магнитостатики UPML метод может быть сформулирован следующим образом [6]. При расчете распределения трехмерного МП в декартовой системе координат на границах расчетной области вводятся слои материала, магнитные параметры которого описываются трехдиагональным тензором для относительной магнитной проницаемости:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu}_z \end{bmatrix}.$$

В слое, параллельном плоскости  $xy$ ,  $\mu_x = \mu_y$ ; в слое, параллельном плоскости  $yz$ ,  $\mu_y = \mu_z$  и т.д. Характерной особенностью этих слоев является то, что соответствующий элемент тензора  $\hat{\mu}$  имеет величину, меньшую 1. Например, для слоя, параллельного плоскости  $x$ - $y$ , тензор магнитной проницаемости имеет вид:

$$\hat{\mu}_s = \begin{bmatrix} a_s & 0 & 0 \\ 0 & a_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_s \end{bmatrix},$$

где  $a_s > 1$ . В угловых зонах расчетной области тензоры пересекающихся слоев перемножаются:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \cdot 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu k_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu k_y & 0 & 0 \\ 0 & \mu \cdot 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu k_z & 0 & 0 \\ 0 & \mu k_z & 0 \\ 0 & 0 & \mu \cdot 1/k_z \end{bmatrix},$$

где  $k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты.

Выбором количества шагов в UPML-слоях, а также характера изменения величин  $k_x, k_y, k_z$  по глубине слоя обеспечивается быстрое и безотражательное затухание электромагнитного поля. Согласно [9], чтобы избежать эффектов отражения, следует задавать изменение маг-

нитных свойств UPML толщиной  $d$  по глубине (например  $x$ ) в соответствии с полиномиальным законом:

$$k_x(x) = 1 + (k_{\max} - 1) \cdot (x/d)^m,$$

где  $k_{\max}$  – максимальная величина  $k_x$  на внешней границе UPML;  $m$  – показатель степени.

Причем, уровни  $m$  должны лежать в пределах:  $3 \leq m \leq 4$  [9]. Величины  $k_y(y)$  и  $k_z(z)$  вычисляются аналогично:

$$k_y(y) = 1 + (k_{\max} - 1) \cdot (y/d)^m, \quad k_z(z) = 1 + (k_{\max} - 1) \cdot (z/d)^m.$$

В отличие от традиционного применения UPML, когда источник поля находится внутри расчетной области, в рассматриваемом случае исследуемый объект находится во внешнем однородном магнитном поле напряженностью  $\vec{H}_0$ , т.е. распределение приложенного поля задано, и источник из рассмотрения исключается. Ферромагнитное тело искажает распределение однородного внешнего МП, и граничные условия могут быть заданы лишь на достаточном от него удалении. Для приближения границ расчетной области к объекту предлагается использовать UPML, а на границе задавать условия [10]:

$$\partial\varphi/\partial x = -k_{\max} \cdot H_{0x}; \quad \partial\varphi/\partial y = -k_{\max} \cdot H_{0y}; \quad \partial\varphi/\partial z = -k_{\max} \cdot H_{0z}.$$

Такой подход позволил добиться хорошего совпадения с аналитическим решением для находящейся в воздухе сферы, расположенной во внешнем однородном МП напряженностью  $H_0=1$  А/м (совпадение в пределах 1%).

В качестве примера использования описанного метода был выполнен расчет распределения трехмерного магнитного поля в окрестности ферромагнитных стержней, моделирующих элементы конструкции здания, находящиеся в геомагнитном поле. Сечение стержней –  $0,2 \times 0,2$  м<sup>2</sup>, относительная магнитная проницаемость – 200. Полагалось, что стержни расположены в вертикальной плоскости магнитного меридиана.

На рис. 1 представлены рассчитанные относительно МП Земли  $\vec{B}_0$  распределения линий равного модуля индукции магнитного поля  $B^* = \left| \vec{B} \right| - \left| \vec{B}_0 \right| / \left| \vec{B}_0 \right|$  (для рассматриваемой географической зоны  $\left| \vec{B}_0 \right| = 50$  мкТл). Расчет МП одного (а) и трех (б) стержней выполнялся в сечении  $z = \text{const}$ , проходящем через их оси 1 (рис. 1).

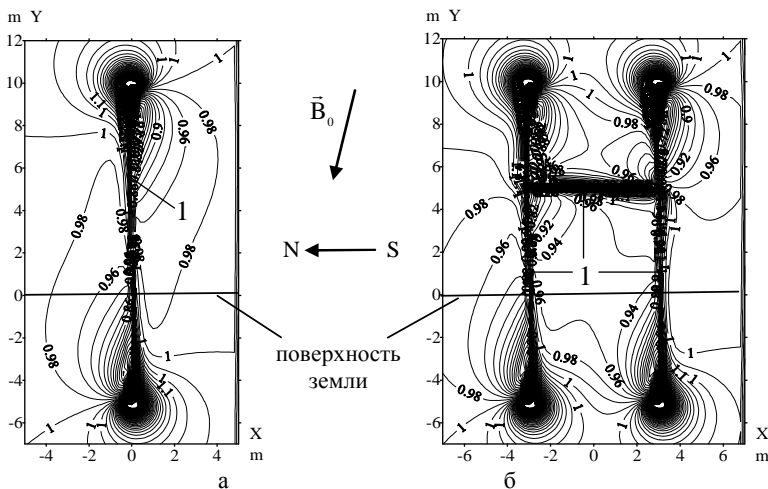


Рис. 1

**Выводы.** Разработана методика численного расчета магнитного момента и распределения магнитного поля ферромагнитных тел сложной конфигурации, основанная на использовании метода конечных объемов и введении поглощающих граничных слоев. Выполнен расчет магнитных полей трехмерных ферромагнитных объектов с применением представленной методики. Анализ результатов показал совпадение с аналитическими решениями в пределах 1%. Данная методика может быть использована для описания нелинейной магнитной проницаемости ферромагнитных тел, а также распределения их магнитных полей.

**Список литературы:** 1. Краснов И.П. Расчетные методы судового магнетизма и электротехники. – Л.: Судостроение, 1986. – 216 с. 2. Paluszek M., Thomas S., Mueller J. et al. Spacecraft attitude and orbit control. – Princeton: Princeton Satellite Systems, 2007. – 476 p. 3. Любимов В.В. Искусственные и естественные электромагнитные поля в окружающей человека среде и приборы для их обнаружения и фиксации: Препринт / ИЗМИРАН; №11 (1127) – Троицк, 1999. – 28 с. 4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 150 с. 5. Щерба А.А., Резинкина М.М. Моделирование и анализ электрических полей энергетических объектов. – К.: Наукова думка, 2008. – 248 с. 6. Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79. – №8. – С. 8-17. 7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с. 8. Резинкина М.М. Численный расчет проникновения низкочастотного трехмерного электрического поля в неоднородные слабопроводящие объекты // Электричество. – 2003. – № 8.

– С. 50-55. **9.** *Taflove A., Hagness S.* Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. Boston – London: Artech House, 2000. – 852 p. **10.** *Резинкина М.М.* Влияние проводимости ветвей дендритов в полиэтиленовой изоляции на их рост при приложении высокого напряжения // Журнал технической физики. – 2005. – Т. 75, №6. – С. 85-92.



**Резинкина Марина Михайловна**, доктор технических наук, главный научный сотрудник Научно-технического центра магнетизма технических объектов Национальной академии наук Украины, Харьков. Научные интересы связаны с решением проблем электромагнитной экологии и электромагнитной совместимости технических средств.



**Лобжанидзе Лия Элгуджаевна**, аспирант Научно-технического центра магнетизма технических объектов Национальной академии наук Украины. Закончила Харьковский национальный университет радиоэлектроники, факультет компьютерных наук по специальности "Информационные технологии проектирования информационно-управляющих систем для бизнеса". Научные интересы связаны с решением проблем электромагнитной экологии.

*Поступила в редколлегию 24.02.2010*