УДК 621.341.572

Н.Н. ЧЕРНЫШОВ, канд. техн. наук, доц., ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков
С.И. АЛЕШИН, студент, ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков

МНОГОМЕРНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

У роботі дана характеристика двомірних та багатомірних сигналів та систем. Так, як багатомірні поліноми розкладуються на множники тільки в приватному випадку, з цього виходить, що більшість одномірних методів не підходить для розв'язання задач багатомірних поліномів. Розглянули сигнали та системи з розмірністю два і більше. Зробили висновок, що збільшення розмірності більше двох не приводить до якісних змін, окрім збільшення складності розрахунків.

В работе дана характеристика двумерных и многомерных сигналов и систем. Так, как многомерные полиномы раскладываются на множители только в частном случае, а, следовательно, многие одномерные методы не подходят для решения задач многомерных полиномов. Рассмотрели сигналы и системы с размерностью два и более. Сделали вывод, что увеличение размерности больше не приводит к качественным изменениям, кроме увеличения сложности расчетов.

Введение. В обработке многомерных сигналов используются методы обработки одномерных сигналов. Это объясняется тремя факторами. Во-первых, математические методы описания многомерных систем далеки от совершенства. Во-вторых, при решении многомерных задач используется больший объем данных. В третьих, многомерные системы обладают большим числом степеней свободы. При дискретизации информации в одномерном случае устанавливается только частота отсчетов, а в многомерном не только частота, но и форма растра дискретизации. Многомерные полиномы разлагаются на множители только в частном случае.

Ниже будут рассматриваться сигналы и системы с размерностью два и более, при этом основное внимание будет уделяться двумерным задачам. Повышение размерности выше двух не приводит к качественным отличиям от двумерных случаев. Многомерные непрерывные функции используются только в чисто теоретических исследованиях [1].

Многомерные сигналы. Многомерные сигналы представляют собой функции P независимых переменных при $P>1$. В общем случае, сигнал может быть непрерывным, дискретным или смешанным. Понятия непрерывности и дискретности аналогичны одномерным сигналам. Что касается смешанного сигнала, то это многомерный сигнал, который описывается функцией некоторого количества непрерывных и некоторого количества дискретных переменных. Двумерный непрерывный сигнал представляет собой функцию, значения которой зависят от двух переменных (аргументов, координат)

$$s(x, y) = \sin(x^2 + y^2), -\infty < x, y < \infty. \quad (1)$$

График функции двумерного непрерывного сигнала (в пределах одного периода) приведен на рис.1. Двумерный дискретный сигнал (цифровой массив) - это функция, определенная на совокупности пар числовых значений координат с определенным шагом дискретизации Δx и Δy.

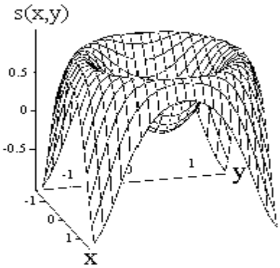

Рис. 1.

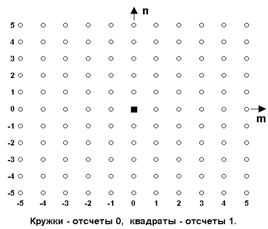

Рис. 2.

При различной физической размерности аргументов x и y значения Δx и Δy не равны друг другу

$$s_{n,m} = s(n\Delta x, m\Delta y), -\infty < n, m < \infty. \quad (2)$$

Элемент последовательности $s_{n,m}$ представляет собой отсчет двумерной функции s, где значения x и y – независимые переменные.

Двумерный единичный импульс. Этот импульс описывается соотношениями:

$$\delta\,(n\Delta x, m\Delta y) = \delta_{n,m};$$

$$\delta_{n,m} = 1, \text{ при } n = m = 0;$$

$$\delta_{n,m} = 0, \text{ при } n \neq 0,\ m \neq 0;$$

$$\delta_{n,m} = \delta_n\,\delta_m,$$

где δ_n, δ_m – одномерные единичные импульсы по координатам n и m. Изображение двумерного единичного импульса приведено на рис. 2.

Произвольное расположение двумерного единичного импульса по координатам n_1, m_1 записывается в виде: $\delta((n - n_1)\,\Delta x, (m - m_1)\,\Delta y) = \delta_{n-n1,m-m1}$.

Двумерный линейный импульс представляет собой последовательность единичных отсчетов по координате $s(n,m) = \delta(n)$ или $s(n,m) = \delta(m)$. На рис.3 приведены два двумерных линейных импульса, первый – по координате $m = 0$: $s(n,m) = \delta(m)$, второй по координате $n = 2$: $s(n,m) = \delta(n-2)$.

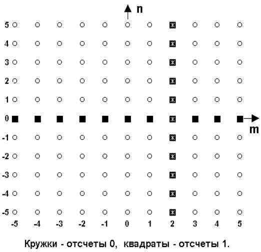

Рис. 3.

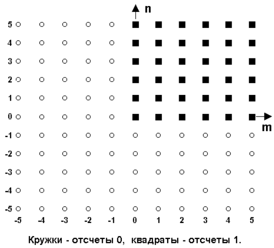

Рис. 4.

Для P-мерных случаев могут быть определены P-мерные единичные и линейные импульсы.

Двумерная единичная ступенька $u(n, m)$, представленная на рис. 4, определяется выражением

$$u(n,m) = 1, \text{ при } n \geq 0 \text{ и } m \geq 0;$$

$$u(n, m) = u(n)\, u(m),$$

где – $u(j)$ представляют собой единичные ступеньки по координатам n и m: $u(j)=1$ при $j \geq 0$, $u(j)=0$ при $j<0$. Двумерная единичная ступенька отлична от нуля в одном квадранте (n, m) - плоскости.

Разделимые последовательности. Разделимой называют последовательность, которую можно представить в виде произведения одномерных последовательностей. Для двумерной разделимой последовательности

$$s(n,m) = s(n)\, s(m).$$

Любое двумерное множество с конечным числом ненулевых отсчетов разлагается на конечную сумму разделимых последовательностей

$$s(n,m) = \sum_{i=1}^{N} s_{i-n}(n) s_{i-m}(m), \tag{3}$$

где N- число ненулевых строк или столбцов массива.

Конечные последовательности. Важным классом сигналов являются последовательности конечной протяженности, для которых сигнал равен нулю вне опорной области. На рис.5 показана двумерная последовательность конечной протяженности. Опорная область сигнала может быть произвольной формы и выходить за пределы сигнала, частично включая нулевые отсчеты. Отсчеты за пределами опорной области считаются равными нулю.

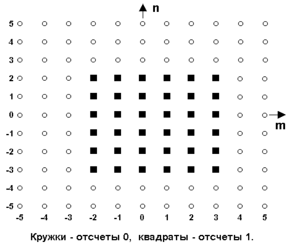

Рис. 5.

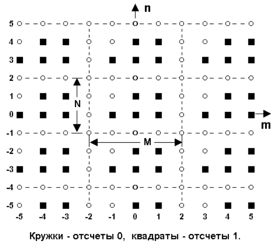

Рис. 6.

Периодические последовательности. Двумерные последовательности могут быть периодическими, регулярно повторяющимися в пространстве. Последовательность, удовлетворяющая условиям

$$s(n,m+M) = s(n,m);\ s(n+N,m) = s(n,m), \qquad (4)$$

обладает периодичностью в двух направлениях, по n и m. Значения M и N называют интервалами периодичности сигнала соответственно по координатам m и n (*горизонтальными* и *вертикальными* интервалами периодичности). Прямоугольная форма области периода (рис.6) наиболее удобна при обработке данных, но не является единственно возможной. Для двумерных последовательностей условия (4) могут рассматриваться как частный случай общих условий периодичности

$$s(n+N_1,\ m+M_1) = s(n,m);\ s(n+N_2,\ m+M_2) = s(n,m), \qquad (5)$$

$$D = N_1M_2 - N_2M_1 \neq 0.$$

Упорядоченные пары (N_1,M_1) и (N_2,M_2) представляют собой смещения от отсчетов одного периода к соответствующим отсчетам других периодов и могут рассматриваться как векторы $\vec{N}$ и $\vec{M}$, которые образуют области периодов в форме параллелограмма. Линейная независимость векторов обеспечивается при ненулевом определителе D (рис.7). Понятие периодичности можно обобщить на многомерные сигналы. P-мерный сигнал $s(\vec{n})$ представляет собой P-мерную периодическую последовательность, если существует P линейно независимых P-мерных целочисленных N векторов периодичности, для которых выполняется условие

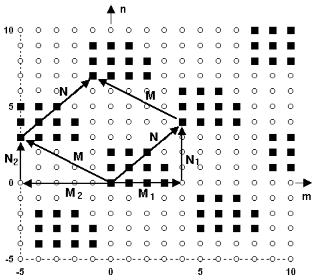

Рис. 7.

$$s(\vec{n}) = s(\vec{n} + \vec{N}_i), \;\; i = 1,2,3,...,P.$$

Столбцы векторов $\vec{N}_i$ образуют матрицу периодичности. Векторы периодичности матрицы линейно независимы при наличии ненулевого определителя. Абсолютное значение определителя равно числу отсчетов в периоде. Последовательность $s(\vec{n})$ прямоугольно периодична для случаев диагональной матрицы. Если функция $s(\vec{n})$ периодична с матрицей периодичности, то для любого численного вектора $s(\vec{n} + \vec{P}\vec{N}) = s(\vec{n})$. Отсюда следует, что любая периодическая последовательность имеет не единственную матрицу.

Базовыми операциями являются операции скалярного умножения, сдвига и сложения:

$$z(n,m) = cs(n,m); z(n,m) = s(n-N, m-M); z(n,m) = s(n,m) + u(n,m).$$

Используя базовые операции, любую двумерную последовательность можно разложить на сумму взвешенных двумерных единичных импульсов

$$s(n,m) = \sum_{ij=-\infty}^{\infty} s(i,j)\delta(n-i, m-j). \tag{6}$$

Обобщением скалярного умножения является маскирование

$$z(n,m) = c_{n,m}\, s(n,m). \tag{7}$$

Правая часть равенства представляет собой поэлементное произведение входного сигнала на совокупность чисел $c_{n,\ m}$. Кроме линейных операций в системах используются безынерционные нелинейные преобразования.

Линейная система предусматривает выполнение условий:

- Пропорциональное изменение входного сигнала вызывает пропорциональное изменение выходного сигнала;
- Суммарный сигнал двух входных последовательностей дает суммарный сигнал двух соответствующих выходных последовательностей.

Если оператор $T[s(x,y)]$ описывает линейную систему и имеет место $z(x,y) = T[s(x,y)]$, $q(x,y) = T[u(x,y)]$, то $T[as(x,y)+bu(x,y)] = az(x,y)+bq(x,y)$. Линейные системы подчиняются принципу суперпозиции сигналов. В выражении (6) значения $s(i,j)$ можно рассматривать как скалярные множители для соответствующих единичных импульсов. Применяя оператор преобразования T к левой и правой части (6), получим

$$T[s(n,m) = y(n,m) = \sum_{ij=-\infty}^{\infty} s(i,j)T[\delta(n-i,m-j)]; z(n,m) = \sum_{ij=-\infty}^{\infty} s(i,j)h_{i,j}(n,m), \quad (8)$$

где $h_{ij}(n,m)$ – отклик системы в точке (n,m) на единичный импульс в точке (i,j). Если импульсный отклик $h_{ij}(n,m)$ определен для всех точек, то отклик системы на произвольный сигнал находится с помощью суперпозиции.

Система инвариантна к сдвигу, если сдвиг входной последовательности приводит к такому же сдвигу выходной последовательности

$$T[s(n-N,m-M)] = z(n-N,m-M).$$

Линейность и инвариантность к сдвигу являются независимыми свойствами системы. Пространственное маскирование линейно, но не инвариантно к сдвигу, а безынерционные операторы нелинейны, но инвариантны к сдвигу.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только систем, широко распространенных при решении практических задач - линейных и инвариантных к сдвигу (ЛИС-системы).

Устойчивость систем. Интерес для практики представляют только устойчивые системы, обеспечивающие определенный конечный результат системной операции на конечные входные сигналы. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является абсолютная суммируемость ее импульсного отклика

$$\sum_{k1}[h(k,1) < \infty.$$

Специальные двумерные системы. На практике используются также системы с несколькими входами и/или выходами. Допустим, система имеет i-входы и j-выходы, линейна и инвариантна к сдвигу по переменной t. Если на i-вход системы поступает одномерный единичный импульс $\delta_i(t)$ при нулевых сигналах на остальных входах, то j-выходные сигналы будут импульсным откликом системы $h_{ij}(t)$. При известных значениях h_{ij} для произвольной комбинации входных сигналов $s_i(t)$ сигнал на j-выходе будет

$$z_j(t) = \sum_{ik} h_{ij}(k)s_i(t-k). \quad (9)$$

Частотный отклик системы. Допустим, что двумерная ЛИС-система имеет импульсный отклик $h(k\Delta x, l\Delta y)$. Подадим на вход системы сигнал вида комплексной синусоиды

$$s(n,m) = \exp(jn\Delta x\Delta_x + jm\Delta y\Delta_y),$$

где ω_x и ω_y – значения частоты сигнала по координатам x и y. Принимая $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ и выполняя двумерную свертку, получаем

$$z(n,m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k,1)\exp[j\omega_x(n-k) + j\omega_y(m-1)] = \exp(jn\omega_x + jm\omega_y)\times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k,1)\exp(-jk\omega_x - j\omega_y) = H(\omega_x,\omega_y)\exp(jn\omega_x + jm\omega_y).$$

$$H(\omega_x,\omega_y) = \sum_{k=-1}^{\infty} h(k,1)\exp(-jk\omega_x - j\omega_y). \qquad (10)$$

Таким образом, выходной сигнал представляет собой комплексную синусоиду с теми же значениями частоты, что и у входного сигнала, с изменением амплитуды и фазы за счет комплексного множителя $H(\omega_x, \omega_y)$, который носит название частотного отклика системы. Для дискретных сигналов частотный отклик периодичен с периодом 2π по обеим частотным переменным

$$H(\omega_x+2\omega k,\ \omega_y+2\omega l) = H(\omega_x,\omega_y).$$

При разделимости импульсного отклика частотный отклик многомерных систем также является разделимой функцией

$$h(k,l)= q(k)g(l) \Leftrightarrow Q(\omega_x)G(\omega_y)= H(\omega_x,\omega_y)Q(\omega_x) = \omega_k\, q(k) \exp(-jk\omega_x);$$

$$G(\omega_y) = \omega_l\, g(l) \exp(-jl\,\omega_y).$$

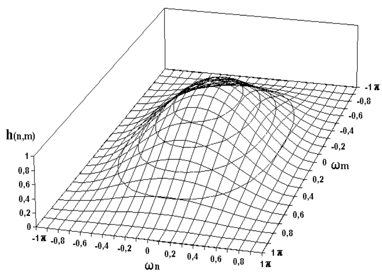

Рис. 8.

Импульсный отклик системы. Уравнение (15) описывает разложение функции $H(\omega_x,\omega_y)$ в двумерный рад Фурье с коэффициентами разложения в виде отсчетов импульсного отклика $h(k,l)$. Обратным преобразованием Фурье с интегрированием в пределах одного периода из частотного отклика $H(\omega_x,\omega_y)$ можно получить импульсный отклик системы (рис. 8)

$$h(k,l) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_x,\omega_y)\exp(jk\omega_x + jl\omega_y)d\omega_x d\omega_y. \qquad (11)$$

Интегральные преобразования Фурье аналоговых сигналов в непрерывной шкале частот Ω_x и Ω_y

$$S_a(\Omega_x,\Omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_a(x,y)\exp(-j\Omega_x x - j\Omega_y y)dxdy\ ; \qquad (12)$$

$$s_a(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_a(\Omega_x,\Omega_y)\exp(j\Omega_x,\Omega_y y)d\Omega_x d\Omega_y. \qquad (13)$$

Интерполяция дискретных сигналов. Для сигнала с ограниченным спектром изменением матрицы дискретизации $\vec{V}$ можно подобрать матрицу периодичности $\vec{U}$. Для значений по точкам $\vec{\Omega}\vec{V}^T$ области C главного периода

$$S(\vec{\Omega}\vec{V}^T) = S_a(\vec{\Omega}) \big/ \det\vec{V}\,; \tag{14}$$

$$S_a(\vec{\Omega}) = \left|\det\vec{V}\right| S(\vec{\Omega}\vec{V}^T) = \left|\det\vec{V}\right| S(\vec{\omega}), \Omega \in C.$$

При дискретизации непрерывной двумерной функции ее спектр с точностью до нормировочного множителя $\left|\det\vec{V}\right|$ может быть восстановлен по спектру дискретной функции [4]. Выполнив обратное преобразование Фурье левой и правой части равенства, получим уравнение восстановления непрерывной функции по ее дискретному варианту (многомерный аналог интерполяционного ряда Котельникова-Шеннона)

$$s_a(\vec{z}) = \frac{\left|\det\vec{V}\right|}{4\pi^2} \sum_{\vec{n}} s(\vec{n}) \int_c \exp(j\vec{\Omega}^T(\vec{z} - \vec{V}\vec{n}))d\Omega = \sum_{\vec{n}} s(\vec{n}) f(\vec{z} - V\vec{n}). \tag{15}$$

где $f(\vec{z} - \vec{V}\vec{n}) = \dfrac{\left|\det\vec{V}\right|}{4\pi^2} \displaystyle\int_c \exp(j\vec{\Omega}^T(\vec{z} - \vec{V}\vec{n}))d\vec{\Omega}.$ интерполяционная функция

Вывод. В работе рассмотрены математические модели многомерных сигналов. Для вычисления P-мерного сигнала требуется $(N_1 \times N_2 \times N_P)^2$ операций умножения и сложения. Для одномерного и многомерного сигнала существуют алгоритмы быстрых преобразований Фурье. Простейший из них ДПФ - разбиение. P-мерное разбиение может заменяться одномерными операциями. При этом количество операций умножения и сложения сокращается.

Список литературы: **1.** *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. -М.: Мир, 1988. -488 с. Р.269-278. **2.** *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988. **3.** *Васильев Д.В.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1982. -528 с. **4.** *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. -М.: Мир, 1983.

Поступила в редколлегию 21.09.2009