УДК 621.316:532.232

А.Н. МОРОЗ, канд. техн. наук, докторант, ХНТУСХ им. Петра Василенка, Харьков

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ СВЯЗАННЫХ С АКУСТИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Приведено дослідження задачі про сталі коливання п’єзокерамічного циліндра з радіальним типом поляризації, рішення якої дасть можливість розрахувати оптимальні параметри п’єзокерамічного датчика, при яких його чутливість досягає максимального значення в заданій області частот.

Приводится исследование задачи об установившихся колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальным типом поляризации, решение которой позволит рассчитать оптимальные параметры пьезокерамического датчика, при которых его чувствительность достигает максимальных значений в заданной области частот.

Введение. Для интенсификации процесса мойки шерсти и уменьшения энергетических затрат используются гидродинамические излучатели, возбуждающие акустические колебания в моющем растворе барки. Для определения оптимальных параметров оборудования мойки шерсти необходимо знание физических процессов в моющем растворе. Для изучения этих процессов целесообразно использовать пьезоэлектрические датчики вследствие их хороших эксплуатационных характеристик, широких динамических и частотных диапазонов, малых размеров и высокой надежности [1]. Важным условием успешного применения пьезоэлектрических датчиков является анализ их чувствительности, который возможен на основе создание математических моделей.

Цель, задачи исследования. Целью и задачей исследования является разработка математической модели расчета поперечных колебаний пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией пьезоэлектрического датчика для определения его чувствительности.

Расчетные соотношения. Для расчета колебаний цилиндрического пьезокерамического преобразователя, возбуждаемых электрическим генератором, применяется теория, основанная на гипотезах Киргофа-Ляви. Движение цилиндрической оболочки пьезокерамического датчика с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением [2]. Расчет характеристик ультразвукового пьезокерамического преобразователя также может быть осуществлен с помощью метода эквивалентной электрической цепи, учитывающей нагрузку со стороны исследуемой среды [3]. Недостатком этих методов является недостаточная точность расчетных характеристик. Формулировка краевой задачи расчета пьезоэлектрического датчика цилиндрической формы приведена в работе [4].

Для исследования задачи об установившихся колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальным типом поляризации [1] приняты следующие предположения: первое – цилиндр является бесконечно длинным с нулевой осевой деформацией $\left(\varepsilon_{zz} \equiv 0\right)$, второе – внешняя $r = R_1$ и внутренняя $r = R_2$ поверхности цилиндра полностью покрыты электродами с пренебрежимо малой массой, третье – все величины не зависят от пространственных переменных φ, z.

Радиальная компонента вектора перемещения U_r и электростатический потенциал U пьезоэлектрического датчика цилиндрической формы могут быть определены по следующим формулам [5]:

$$U_r(r) = A\,J_\mu(kr) + B\,J_{-\mu}(kr) + \frac{C\,\overline{D}}{2\mu}\left[\left(\frac{R_2}{r}\right)^{\mu} + \left(\frac{r}{R_2}\right)^{\mu} - 2\right], \quad (1)$$

$$U(r) = A\varepsilon_2^{-1}\left[e_{33}\left(J_\mu(kr) - J_\mu(kR_2)\right) + e_{31}\,J_\mu(kR_2)\left(\frac{r}{R_2} - 1\right)\right] +$$

$$+ B\,\varepsilon_2^{-1}\left[e_{33}\left(J_{-\mu}(kr) - J_{-\mu}(kR_2)\right) + e_{31}\,J_{-\mu}(kR_2)\left(\frac{r}{R_2} - 1\right)\right] +$$

$$\frac{C\overline{D}}{2\mu\varepsilon_2}\left[\left(e_{33} + e_{31}\mu^{-1}\right)\left(\frac{r}{R_2}\right)^{\mu} - \left(e_{31}\mu^{-1} - e_{33}\right)\left(\frac{R_2}{r}\right)^{\mu} - 2e_{33} - 2\,e_{31}\ln\frac{r}{R_2}\right] +$$

$$+ C\,\varepsilon_2^{-1}\,\ln\frac{r}{R_2} - V_0, \quad (2)$$

здесь σ, ε – тензоры механических напряжений и деформаций; $\vec{E} = \left(E_r, E_\varphi, E_z\right)$, $\vec{D} = \left(D_r, D_\varphi, D_z\right)$ – векторы напряжения и индукции электрического поля;

ε_2 – диэлектрическая постоянная материала цилиндра;

e_{31}, e_{33} – пьезоэлектрические постоянные;

$A,\ B$ – постоянные величины;

$J_{\pm\mu}(\cdots)$ – функции Бесселя соответственно с индексом $\pm\mu$.

Величины k, μ, D, $\overline{D}$, C определяются из выражений [4, 5]

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho \varepsilon_2}{c_{33}\varepsilon_2 + e_{33}^2}, \quad \mu^2 = \frac{c_{11}\varepsilon_2 + e_{31}^2}{c_{33}\varepsilon_2 + e_{33}^2},$$

$$D = -\frac{c\ e_{31}}{\varepsilon_2\, c_{33} + e_{33}^2}, \quad \overline{D} = -\frac{e_{31}}{2\mu\left(\varepsilon_2\, c_{33} + e_{33}^2\right)}$$

$$C = \frac{2V_0\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) + P\left(d_2 a_{21} - d_1 a_{22}\right)}{d_1\left(a_{22}b - a_{12}b_2\right) + d_2\left(a_{11}b_2 - a_{21}b\right) + d_3}$$

На основе этих формул и асимптотических формул для функций Бесселя [6] выведем приближенные формулы связывающие параметры пьезокерамического цилиндра, моделирующего активную часть датчика, с параметрами внешнего акустического поля. Эти формулы помогут установить однозначную связь между давлением в акустической волне, взаимодействующей с внешней границей пьезокерамического датчика и разностью потенциала, возникающей на электродах в результате пьезоэлектрического эффекта.

Предположим, что для компоненты вектора перемещений U_r выполняется неравенство

$$\left|\frac{dU_r}{dr}\right| << \left|\frac{U_r}{r}\right|, \text{ при } R_2 \le r \le R_1, \tag{3}$$

где R_1 и R_2 – соответственно внешний и внутренний радиусы пьезокерамического цилиндра.

Эти ограничения выполняются во многих практически важных случаях [7]. При выполнении неравенства (3) материальные уравнения [4] связывающие компоненты тензора напряжений и вектора перемещений, а также вектора индукции и напряженности электрического поля упростятся и примут следующий вид

$$\sigma_{rr} = c_{13}\frac{U_r}{r} - e_{33}E_r, \quad \sigma_{zz} = c_{12}\frac{U_r}{r} - e_{31}E_r \tag{4}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{11}\frac{U_r}{r} - e_{31}E_r, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{r\varphi} = 0$$

$$D_r = \varepsilon_2 \mathrm{E}_r + e_{31}\frac{U_r}{r}. \tag{5}$$

Уравнения движения [4] сводятся к одному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} . \qquad (6)$$

Предполагая, что все величины зависят от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, из (6) с учетом (4) получаем

$$-\omega^2 \rho U_r = \left(c_{13} - c_{11}\right)\frac{U_r}{r^2} - \left(e_3 - e_{31}\right)\frac{E_r}{r} . \qquad (7)$$

Из уравнения (7), связывающего радиальные компоненты вектора перемещения и вектора напряженности электрического поля имеем

$$U_r = \frac{r\left(e_{33} - e_{31}\right)}{\Delta_1} E_r , \qquad (8)$$

где $\Delta_1 = \omega^2 \rho r^2 - c_{11} + c_{13}$.

Воспользуемся уравнением для индукции электрического поля [4]

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad E = -\operatorname{grad} U = -\vec{e}_r \dfrac{\partial U}{\partial r} - \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r} \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} - \vec{e}_z \dfrac{\partial U}{\partial z} , \\ \operatorname{div}\vec{D} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r D_r\right) + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

которое, для случая радиальных колебаний имеет вид

$$\frac{d}{d r}\left(r D_r\right) = 0 \qquad (10)$$

Интегрируя (10) получаем

$$D_r = \frac{c}{r} , \qquad (11)$$

где c – произвольная постоянная величина.

Подставим (8) и (9) в материальное уравнение (5), тогда после ряда преобразований имеем

$$E_r = \frac{c\,\Delta_1}{r\,\Delta_2} , \qquad (12)$$

$$U_r = \frac{\left(e_{33} - e_{31}\right) c}{\Delta_2} , \qquad (13)$$

где $\Delta_2 = \varepsilon_2 \Delta_1 + e_{33} e_{31} - e_{31}^2 = \varepsilon_2 \left(\omega^2 \rho r^2 - c_{11} + c_{13}\right) + e_{33} e_{31} - e_{31}^2$.

Таким образом, используя материальные уравнения (4), (5), уравнение движения (7) и уравнение электростатики (10), получены явные выражения для компоненты U_r вектора перемещений и компоненты E_r вектора напряженности электрического поля.

Для определения постоянной величины c, входящей в (12), (13), воспользуемся граничными условиями [5]

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_1} = \left(c_{33}\frac{dU_r}{dr} + c_{13}\frac{U_r}{r} + e_{33}\frac{dU}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1} = P \quad (14)$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_2} = \left(c_{33}\frac{dU_r}{dr} + c_{13}\frac{U_r}{r} + e_{33}\frac{dU}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2} = 0, \quad (15)$$

которые при выполнении указанных выше ограничений имеют вид

$$\sigma_{rr} = c_{13}\frac{U_r}{r} - e_{33}E_r = \begin{cases} P, & r = R_1, \\ 0, & r = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где P – давление в акустической монохроматической волне, взаимодействующей с внешней границей пьезокерамического цилиндра.

Из (16) получаем

$$c_{13}\left(\frac{U_r(R_1)}{R_1} - \frac{U_r(R_2)}{R_2}\right) - e_{33}\left(E_r(R_1) - E_r(R_2)\right) = P. \quad (17)$$

Внося в (17) выражения для U_r и E_r из (12), (13), имеем

$$c = \frac{P R_1 R_2 \Delta_{21}\Delta_{22}}{c_{13}(e_{33} - e_{31})(\Delta_{22}R_2 - \Delta_{21}R_1) - e_{33}(R_2\Delta_{11}\Delta_{22} - R_1\Delta_{21}\Delta_{22})}. \quad (18)$$

Здесь

$$\Delta_1(r) = \omega^2\rho r^2 - c_{11} + c_{13}, \quad \Delta_2(r) = \varepsilon_2\Delta_1(r) + e_{33}e_{31} - e_{31}^2,$$

$$\Delta_{21} = \Delta_2(R_1), \quad \Delta_{22} = \Delta_2(R_2), \quad \Delta_{11} = \Delta_1(R_1), \quad \Delta_{12} = \Delta_1(R_2).$$

Подставивши значение константы c в (12) и (13), получим решение задачи об электромеханических радиальных колебаниях пьезокерамического цилиндра, на внешнюю границу которого воздействует акустическая волна с давлением P. Это решение имеет вид

$$E_r = \Delta_1 P R_1 R_2 \Delta_{21}\Delta_{22} \Big/ r\Delta_2\left[(e_{33} - e_{31})(\Delta_{22}R_2 - \Delta_{21}R_1) - \right.$$

$$\left. - e_{33}(R_2\Delta_{11}\Delta_{22} - R_1\Delta_{21}\Delta_{12})\right], \quad (19)$$

$$U_r = (e_{33} - e_{31}) P R_1 R_2 \Delta_{21}\Delta_{22} \Big/ \Delta_2\left[(e_{33} - e_{31})(\Delta_{22}R_2 - \Delta_{21}R_1) - \right.$$

$$\left. - e_{33}(R_2\Delta_{11}\Delta_{22} - R_1\Delta_{21}\Delta_{12})\right] \quad (20)$$

Для анализа полученного приближенного решения, установим границы его применимости. Для этого, необходимо выяснить при каких значениях параметров выполняется неравенство (3), а именно

$$\left| \frac{1}{U_r} r \frac{dU}{dr} \right| < 1. \tag{21}$$

Вычислив производную $\dfrac{dU_r}{dr}$ и подставив ее в (21) будем иметь

$$\left| \frac{1}{U_r} r \frac{dU}{dr} \right| = \frac{2r^2}{\left| d^2 - r^2 \right|} < 1, \tag{22}$$

где $d^2 = \dfrac{\varepsilon_2 \left(c_{11} - c_{13} \right) + e_{31}^2 - e_{31} e_{33}}{\omega^2 \rho \varepsilon_2}$.

Неравенство (22) выполняется для тех значений r, которые удовлетворяют условию

$$r < \frac{d}{\sqrt{3}} = \omega^{-1} \sqrt{\frac{\left(c_{11} - c_{13} \right) \varepsilon_2 + e_{31}^2 - e_{31} e_{33}}{\rho \varepsilon_2}} \tag{23}$$

Таким образом, если внешний радиус R_1 цилиндрического пьезокерамического датчика удовлетворяет неравенству (23), то справедливо приближенное решение (19), (20), относительная погрешность которых составляет менее 10 %.

Решение задачи, представленное формулами (19), (20), позволяет рассчитать такую основную характеристику пьезокерамического датчика как чувствительность. Эта характеристика определяется как [7]

$$S = \left| U/P \right| , \tag{24}$$

где U – напряжение на электродах датчика; P – акустическое давление на внешней границе датчика.

Напряжение U можно вычислить с помощью (19), а именно

$$U = \left[E_r \left(R_1 \right) - E_r \left(R_2 \right) \right] \Delta R, \tag{25}$$

где $\Delta R = R_1 - R_2$ – толщина пьезокерамического цилиндра (предполагается, что электроды являются идеально проводящими с пренебрежимо малой массой). Из (19) имеем

$$U = \frac{P \Delta R \; R_1 R_2 \Delta_{21} \Delta_{22}}{\left[\left(e_{33} - e_{31} \right) \left(\Delta_{22} R_2 - \Delta_{21} R_1 \right) - e_{33} \left(R_2 \Delta_{11} \Delta_{22} - R_1 \Delta_{21} \Delta_{12} \right) \right]} \times$$
$$\times \left(\frac{\Delta_{11}}{R_1 \Delta_{21}} - \frac{\Delta_{12}}{R_2 \Delta_{22}} \right) \tag{26}$$

Проведя ряд элементарных преобразований над (26), напряжение U можно представить в виде

$$U = \frac{\Delta R P F(\omega)}{e_{33}\left[\omega_3^2\left(\omega^2 - \omega_4^2\right) + F(\omega)\right]} \qquad (27)$$

где $F(\omega) = \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right) - \frac{R_1}{R_2}\left(\omega^2 - \omega_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\right)$; ω – частота возбуждающей акустической волны, а частоты $\omega_1, ..., \omega_4$ выражаются через параметры пьезокерамического цилиндра:

$$\omega_1^2 = \frac{c_{11} - c_{13}}{\rho R_1^2};$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_{11} - c_{13} + \varepsilon_2^{-1}\left(e_{31}^2 - e_{31} e_{33}\right)}{\rho R_1^2}; \qquad (28)$$

$$\omega_3^2 = \frac{c_{13}\left(e_{33} - e_{31}\right)}{e_{33} \rho R_1^2}\left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 1\right);$$

$$\omega_4^2 = \omega_2^2\left(1 - \frac{R_2}{R_1} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)^{-1},$$

где c_{11}, c_{13} – упругие постоянные материала цилиндра; e_{31}, e_{33} – пьезоэлектрические постоянные; ρ и ε_2 – соответственно плотность и диэлектрическая постоянная материала цилиндра.

Из (27) получаем выражение для чувствительности датчика

$$S = \left|\frac{U}{P}\right| = \left|\frac{\Delta R\, F(\omega)}{e_{33}\left(\omega_3^2\left(\omega^2 - \omega_4^2\right) + F(\omega)\right)}\right|. \qquad (29)$$

Рассмотрим предельные случаи соответствующие низким и высоким частотам возбуждающей акустической волны.

Если $\omega \to 0$, то формула (29) упрощается и чувствительность S можно оценить по формуле

$$S \cong \frac{\Delta R\left(c_{11} - c_{13}\right)}{c_{11} e_{33} - c_{13} e_{31}}. \qquad (30)$$

При высоких частотах $\omega \to \infty$ из (29) имеем

$$S \cong \Delta R / e_{33}. \qquad (31)$$

Выводы. Получено аналитическое выражение чувствительности пьезокерамического датчика цилиндрической формы для исследований акустических колебаний в водной среде при мойке шерсти.

Список источников информации: **1.** *Шарапов В.М.* Пьезоэлектрические датчики / В.М. Шарапов , М.П. Мусиенко, Е.В. Шарапова. – М.: Техносфера, 2006. – 632 с. **2**. *Дрозденко А.И.* Излучение акустических волн одиночным цилиндрическим преобразователем с внутренней полостью, заполненной средой. [Електронний ресурс] (Результати акустичного симпозіуму "КОНСОНАНС-2007", Київ, ІГМ НАН України, 25-27 вересня 2007. – С.80–85. – Режим доступу: *http://www.hydromech.kiev.ua/rus/WWW-CONS/2007/cons2007-080-085.pdf*. **3.** Ультразвуковые пьезокерамические преобразователи с магнитоакустическим слоем [Електронний ресурс] / М.М. Карпук, Д.А. Костюк, Ю.А. Кузавко, В.Г. Шавров // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30. – Вып.23. – С. 70-76. – Режим доступу: http://www.ioffe.ru/journals/pjtf/2004/23/p70-76.pdf **4.** *Мороз А.Н.* Постановка краевой задачи расчета пьезоэлектрического датчика цилиндрической формы для измерения акустических параметров звукового поля в жидкости // Вестник национального технического университета "ХПИ". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2009. – №44. – С. 95-102. **5.** *Мороз А.Н.* Математическая модель поперечных колебаний пьезоэлектрического датчика цилиндрической формы. Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2010. – №7. – С.73-82. **6.** *Бейтман Г., Эрдейн А*. Высшие трансцендентные функции. – Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с. **7.** Ультразвуковые преобразователи / Под. ред. Е. Кикучи – М.: Мир, 1972. – 424 с.

Мороз Олександр Миколайович, доцент, канд. техн. наук. Закінчив Харківський інститут механізації і електрифікації сільського господарства в 1984 р. за фахом інженер-електрик. Навчався в аспірантурі Московського гідромеліоративного інституту в 1987…1990 р.р., там же захистив дисертацію кандидата технічних наук в 1991р. Директор навчально-наукового інституту Енергетики і комп'ютерних технологій Харківського національного технічного університету сільського господарства з 2009 р. Наукові інтереси пов'язані з процесами первинної обробки вовни з використанням акустичних коливань та електромагнітних хвиль надвисокої частоти.

Поступила в редколлегию 08.06.2010