

*А.А. СТЕПАНЕНКО*, аспирант, НТУ "ХПИ", Харьков

## МЕТОД РАСЧЕТА ДИСКОВОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРИВОДА

Наведено методику розрахунку електродинамічного приводу дискового типу без струмопровідних та магнітних елементів корпусу на основі теорії дифузії магнітного поля у струмопровідний лист. Виконано експериментальну перевірку отриманого результату.

Приведена методика расчета электродинамического привода дискового типа без токопроводящих и магнитных элементов корпуса на основе теории диффузии магнитного поля в токопроводящий лист. Проведена экспериментальная проверка полученного результата.

**Введение.** Задача определения электродинамических сил, возникающих в плоском токопроводящем диске конечных размеров, магнитно связанном с электрической катушкой, является важной при разработке электродинамического привода дискового типа. Классические методы расчета не обеспечивают требуемой точности. В этой связи актуальной задачей является поиск более точных моделей процесса возникновения электродинамических сил. Одно из возможных направлений ее решения – применение теории диффузии магнитного поля в электропроводящий диск.

**Цель работы.** Исследовать возможность применения теории диффузии магнитного поля в электропроводящий лист для расчета силы, создаваемого электродинамическим приводом дискового типа и экспериментальная проверка полученного результата.

### **Математическая модель привода дискового типа.**

Рассмотрим задачу расчета электродинамических сил, возникающих в плоском токопроводящем диске конечных размеров, магнитно связанном с электрической катушкой. Задачу будем решать на основе теории диффузии магнитного поля в токопроводящий лист.

Метод решения такой задачи изложен в [1]. В качестве расчетной принята модель, показанная на рис. 1. Количество расчетных радиусов  $i = 7$ . Количество расчетных слоев  $j = 5$ .  $R_{1,1} = 0,27r_1$ ,  $R_{1,2} = 0,37r_1$ ,  $R_{1,3} = 0,5r_1$ ,  $R_{1,4} = 0,7r_1$ ,  $R_{1,5} = r_1$ ,  $R_{1,6} = 1,185r_1$ ,  $R_{1,7} = 1,3r_1$ .

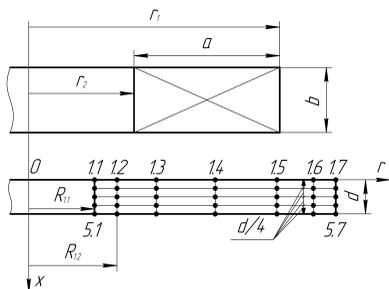


Рис. 1.

В общем случае диффузии магнитного поля в токопроводящий диск при синусоидальном токе, протекающем через обмотку катушки, и при известных граничных условиях распределения магнитного поля на поверхностях диска  $B(x=0) = B_{em} e^{-\alpha t} \sin \omega t$ ,

$$B(x=d) = B_{em} e^{-(\alpha+d/\Delta)t} \sin(\omega t - d/\Delta)$$

и нулевых начальных условиях

$B(t=0) = 0$  величина индукции на поверхности диска, прилегающего к катушке равна:

$$\begin{aligned}
 B(x=0, r, t) = & \frac{\mu_0 I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \int_0^\infty [e^{-\alpha t} (M_1 \sin \omega t + N_1 \cos \omega t) + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \times \\
 & \frac{2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)}{d^2 \left( \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + 2 \right)} \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right)] \Psi_1 d\lambda + \frac{\mu_0 I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \times \\
 & \times \int_0^\infty \lambda \frac{\Delta}{r_1} [e^{-(\alpha+d/\Delta)t} (M_2 \sin(\omega t - \frac{d}{\Delta}) + N_2 \cos(\omega t - \frac{d}{\Delta})) + \\
 & + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)}{d^2 \left( \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + 2 \right)} \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right)] \Psi_0 d\lambda.
 \end{aligned} \tag{1}$$

На глубине диска  $x$  индукция магнитного поля определяется как

$$\begin{aligned}
 B(x, r, t) = & \frac{\mu_0 I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \int_0^\infty \lambda \frac{\Delta}{r_1} [e^{-\alpha t} (M_1 \sin \omega t + N_1 \cos \omega t) + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \times \\
 & \times 2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right) \cdot \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right) / (d^2 \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + d^2 2)] \Psi_0 d\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_0 I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \int_0^\infty \lambda \frac{\Delta}{r_1} [e^{-\left(\alpha + \frac{d}{\Delta}\right)t} (M_2 \sin(\omega t - \frac{d}{\Delta}) + N_2 \cos(\omega t - \frac{d}{\Delta})) + \\
& + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)}{d^2 \left( \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + 2 \right)} \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right)] \Psi_0 d\lambda. \quad (2)
\end{aligned}$$

Плотность тока по толщине диска определяется как

$$\begin{aligned}
J(x, r, t) = & \frac{\sqrt{\omega\mu_0\gamma} \cdot I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \int_0^\infty \lambda \frac{\Delta}{r_1} \{ e^{-\alpha t} (M_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) + N_1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})) + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \times \\
& \frac{2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)}{d^2 \left( \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + 2 \right)} \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} \cdot \exp(-z\tau) \text{Cos}\left(\sqrt{2z} \cdot \frac{x}{\Delta}\right)}{z^2 + 1} dz \} \Psi_0 d\lambda + \\
& \frac{\sqrt{\omega\mu_0\gamma} \cdot I_m w}{2(r_1 - r_2 + a)} \int_0^\infty \lambda \frac{\Delta}{r_1} \{ e^{-\left(\alpha + \frac{d}{\Delta}\right)t} [M_2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{d}{\Delta}) + N_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{d}{\Delta})] + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \times \\
& \frac{2\pi\Delta^2 \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{x}{d}\right)\right)}{d^2 \left( \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\pi^2 n^2 \Delta^2}{2d^2} \right)^2 + 2 \right)} \exp\left(-n^2 \frac{t}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} \cdot \exp(-z\tau) \text{Cos}\left(\sqrt{2z} \cdot \frac{d-x}{\Delta}\right)}{z^2 + 1} dz \} \Psi_0 d\lambda. \quad (3)
\end{aligned}$$

где  $I_m$  – максимальное значение синусоидального тока в катушке;  
 $w$  – количество витков в катушке;  $\tau = 2\pi f t$ ;  $f$  – частота синусоидального тока в катушке, (в случае одного импульса несинусоидального тока – эквивалентная частота);  $\Delta$  – расчетная глубина проникновения магнитного поля в диск:

$$\Delta = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu_a)}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  и  $\mu_a$  – соответственно удельная электропроводность и абсолютная магнитная проницаемость материала диска;

$$\tau_0 = \gamma\mu_0 d^2 / (\rho_0 \pi^2); \quad (5)$$

$$\Psi_0 = \frac{\pi}{2} F(\lambda, \eta) \cdot J_0(\lambda, r^*) \cdot \exp(-\lambda \cdot h_0^*); \quad (6)$$

$$\Psi_1 = \frac{\pi}{2} F(\lambda, \eta) \cdot J_1(\lambda, r^*) \cdot \exp(-\lambda \cdot h_0^*); \quad (7)$$

$$\eta = r_2 / r_1; \quad (8)$$

$$r^* = r / r_1; \quad (9)$$

$$h_0^* = h_0 / r_1; \quad (10)$$

$$F(\lambda, \eta) = F_1(\lambda) - \eta \cdot F_1(\lambda \cdot \eta); \quad (11)$$

$$F_1(\lambda) = J_1(\lambda) - J_0(\lambda) \cdot H_1(\lambda); \quad (12)$$

$J_0(\lambda)$ ,  $J_1(\lambda)$  – функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядка;  $H_1(\lambda)$  – функция Струве первого порядка;

$$M_1 = \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \cdot \text{sh} \frac{Q_1(d-x)}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2(d-x)}{\Delta} + \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \times \right. \\ \left. \times \text{ch} \frac{Q_1(d-x)}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2(d-x)}{\Delta} \right) \frac{1}{\left( \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2 + \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2}; \quad (13)$$

$$M_2 = \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \cdot \text{sh} \frac{Q_1 x}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 x}{\Delta} + \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \times \right. \\ \left. \times \text{ch} \frac{Q_1 x}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 x}{\Delta} \right) \frac{1}{\left( \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2 + \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2}; \quad (14)$$

$$N_1 = \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \cdot \text{ch} \frac{Q_1(d-x)}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2(d-x)}{\Delta} - \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \times \right. \\ \left. \text{sh} \frac{Q_1(d-x)}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2(d-x)}{\Delta} \right) \times \frac{1}{\left( \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2 + \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2}; \quad (15)$$

$$N_2 = \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \cdot \text{ch} \frac{Q_1 x}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 x}{\Delta} - \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \cdot \text{sh} \frac{Q_1 x}{\Delta} \times \right. \\ \left. \times \text{Cos} \frac{Q_2 x}{\Delta} \right) / \left( \left( \text{ch} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Sin} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2 + \left( \text{sh} \frac{Q_1 d}{\Delta} \cdot \text{Cos} \frac{Q_2 d}{\Delta} \right)^2 \right); \quad (16)$$

$$Q_{1,2} = \sqrt{\sqrt{1 + (\alpha/\omega)^2} \pm \alpha/\omega}, \quad (17)$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания синусоидального тока в катушке.

Общий анализ базовых уравнений (1) - (3) показывает, что при синусоидальной форме тока, протекающего через катушку, в токопроводящий диск проникают волны магнитного потока и наведенного им вихревого тока той же частоты (эквивалентной частоты), что и ток в

катушке. По мере проникновения во внутренние слои токопроводящего диска происходит затухание этих волн по амплитуде и сдвиг по фазе, то есть амплитудное значение первого импульса волн магнитного потока и вихревого тока в диске кроме уменьшения по абсолютной величине в геометрическом смысле сдвигается к периферии диска.

При  $d < \Delta$  имеет место отражение волны магнитного поля от поверхности диска не прилегающей к индуктору. С энергетической точки зрения это нежелательный режим работы. Таким образом, одним из критериев конструирования таких приводов есть невыполнение условия  $d < \Delta$ .

Если система "индуктор-диск" запитывается одиночным импульсом тока или импульсами тока с большой скважностью, то  $\alpha = 0$ . Для экспериментальной установки  $d > \Delta$ ,  $\alpha = 0$ , тогда принимаем  $B_2(x=d) = 0$ .

Электродинамическая сила отталкивания диска от катушки в момент времени  $t$  определяется как

$$F(t) = 2\pi \int_{x=0}^{x=d} \int_{r=0}^{r=\infty} r \cdot J(x, r, t) \cdot B(x, r, t) \cdot dx \cdot dr. \quad (18)$$

На основе уравнений (1, 2, 3) рассчитываются значения индукции магнитного поля и плотности тока в расчетных узлах,  $B_{i,j}$  и  $J_{i,j}$ . Для расчета электродинамической силы  $F_n$ , создаваемой элементарным диском, рассчитываются средние значения  $B_n$ ,  $I_n$  в (используем линейную интерполяцию), значения средних радиусов  $r_n$  и площади поперечного сечения  $S_n$ . Полная величина электродинамической силы отталкивания:

$$F(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{n=28} r_n B_n(t) I_n(t). \quad (19)$$

Расчет проводится во всем диапазоне действия тока, протекающего по катушке с определенным шагом по времени  $\Delta t$ .

**Результаты расчета.** Был рассчитан электродинамический привод, имеющий конструкцию, показанную на рис. 1. Расчеты были проведены при следующих параметрах:

- система "катушка-диск" без ферромагнитных элементов;
- толщина медного диска  $d = 2\text{мм}$ ;
- $b = 10\text{мм}$ ,  $r_1 = 27\text{мм}$ ,  $r_2 = 11\text{мм}$ ,  $h_0 = 8,2\text{мм}$ ;

- количество витков в катушке  $w = 28$ ;
- ток в катушке изменяется по синусоидальному закону с периодом 0,4 мс,  $I_m = 2400$  А.

Также для данного привода экспериментально определялась максимальная величина электродинамической силы отталкивания  $F_m$  диска при одном импульсе разрядного тока, протекающего через катушку. Параметры экспериментальной установки приведены в таблице 1.

Таблица 1.

|   |       |
|---|-------|
| Напряжение заряда конденсатора $U$ , В                            | 1080  |
| Емкость конденсатора $C$ , мкФ                                    | 200   |
| Масса подвижной части привода $m$ , кг                            | 0,492 |
| Длительность импульса разрядного тока в катушке $\Delta t_m$ , мс | 0,235 |
| Время максимума разрядного тока в катушке $\Delta t_1$ , мс       | 0,1   |
| Длительность спада разрядного тока в катушке $\Delta t_2$ , мс    | 0,135 |
| Жесткость возвратной пружины $k$ , Н/м                            | 2000  |
| Длина хода подвижной части привода $x_m$ , мм                     | 6,5   |
| Максимальное значение импульса механической силы $F_m$ , Н        | 1363  |

На рис. 2 приведены результаты расчетов распределения давления в объеме диска, созданное электродинамической силой в различные моменты времени. Границей заштрихованной области в сечении диска является давление 10 кПа. Также в каждый момент времени указаны максимальная достигаемая величина давления и элементарный диск, в котором это максимальное давление возникает.

Продольной штриховкой обозначена область давления, отталкивающего диск, а поперечной – область давления, притягивающего диск. Волна давления, притягивающего диск, возникает от фазового сдвига проникающих в диск волны магнитного потока и волны наведенного в диске вихревого тока. Физически это объясняется соотношением величин активного  $R_2$  и индуктивного  $X_2$  сопротивлений диска. При проектировании необходимо стремиться к выполнению условия  $X_2 \gg R_2$  при достижении как можно меньшей величины  $R_2$ .

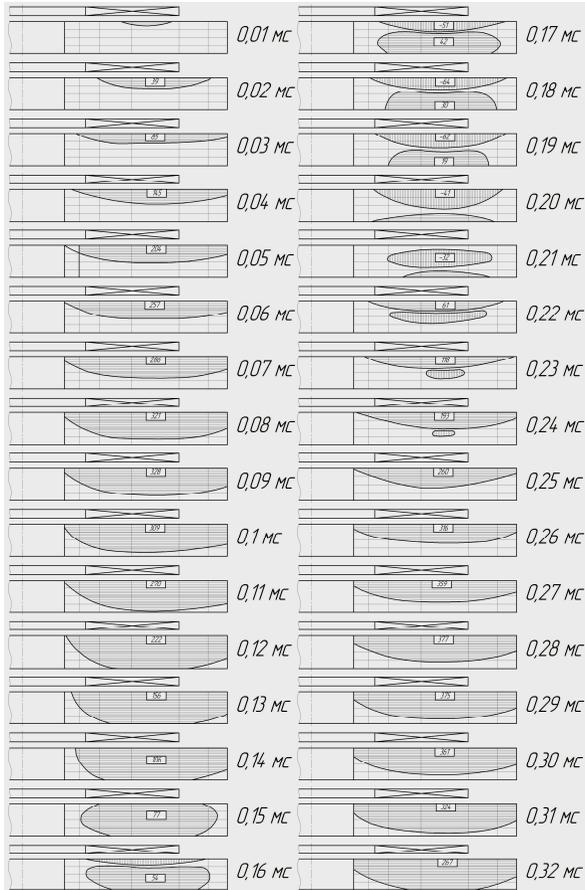


Рис. 2.

Изначально расчеты были проведены для диска без осевого отверстия (8 расчетных узлов). Результаты приведены для 7, т. к. по результатам расчетов было получено, что значение электродинамической силы в области диска, примыкающей к его оси незначительно. Практически это значит, что подобные приводы без ущерба для развиваемой электродинамической силы отталкивания могут изготавливаться с осевым отверстием в диске.

Наглядно видна сложная пространственно – временная картина распределения вихревого тока в диске. Есть области диска, где одновременно протекают токи в различных направлениях с различными фазами.

Расчетная (первый импульс) и экспериментальная величина амплитуды импульса электродинамической силы довольно близко совпадают (расхождение – 5,7%). Расчетное значение максимальной величины импульса силы больше, чем значение, полученное экспериментально (см. табл. 1). Качественно эта погрешность объясняется погрешностью экспериментального определения максимальной величины импульса силы. Данный эксперимент проводился следующим образом.

Для создания импульса тока в индукторе используется разряд конденсатора. При помощи безиндуктивного шунта фиксируется одиночный импульс разрядного тока в индукторе; фиксируется максимальная величина перемещения подвижной части  $x_m$ , исходя из которой рассчитывается импульс силы. Проблема заключается в том, что мы не знаем точно при проведении эксперимента формы действующего импульса силы и задаем его приближенно в виде, показанном на рис. 3.

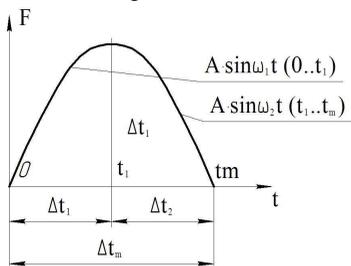


Рис. 3.

Предполагаем, что импульс силы действует в том же временном интервале, что и импульс разрядного тока, протекающий через катушку и экспериментально полученный на осциллограмме. Для нашего примера расчета это значит, что длительность импульса силы равна 0,235 мс. Передний и задний фронты импульса силы соответственно представлены синусоидами различной частоты. Эти частоты отличаются незначительно.

На рис. 4 показан расчетный график импульса силы для сравниваемого дискового привода. Реальный график силы по своей форме и длительности действия отличается от формы, принятой для экспериментального определения максимума импульса силы. Очевидно, что при экспериментальном определении максимальной величины импульса силы мы получаем в какой-то степени завышенное значение. Это говорит в пользу нашего расчета. Ошибку можно оценить проведя более точные расчеты движения диска на основе полученной в расчете формы импульса силы.

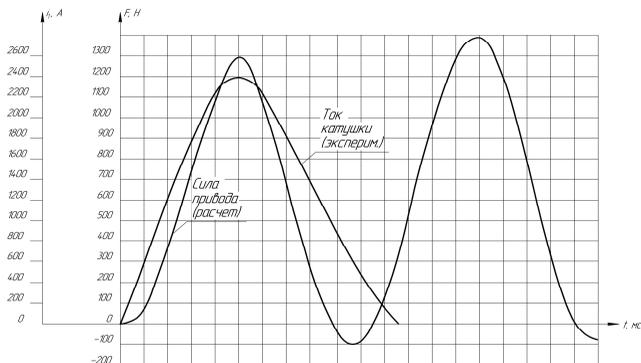


Рис. 4.

Эти расчеты на основе применения интеграла Дюамеля для представления расчетного импульса силы должны быть в дальнейшем проведены.

**Выводы.** Расчет импульса силы, развиваемого приводом, на основе теории диффузии магнитного поля в токопроводящий лист, дает возможность учесть влияние фазовых сдвигов, отраженных волн магнитного поля во время переходного процесса на интегральное значение силы. Полученный результат дает хорошее совпадение с экспериментом, расхождение между амплитудными значениями импульса силы, полученными расчетным и экспериментальным путем для данной конструкции составила 5,7%.

**Список источников информации:** 1. Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. – Л.: Энергоатомиздат, 1981. – 200 с. 2. Янке Е., Энде Ф., Лещи Ф. Специальные функции. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1968. – 344 с. 3. Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля. – Харьков, 1979.



**Степаненко Александр Александрович**, преподаватель-стажер. Защитил диплом магистра в НТУ "ХПИ" по специальности Техника и электрофизика высоких напряжений в 2008 г. Научные интересы связаны с вопросами кабельной техники, расчета и проектирования электродинамических устройств.

Поступила в редколлегию 22.04.2010