

**В.В. ЛИТВИНЕНКО**, ассистент, НТУ "ХПИ", Харьков  
**И.Ф. ГОРНЫЙ**, студент, НТУ "ХПИ", Харьков  
**М.С. ДОРОШЕНКО**, студент, НТУ "ХПИ", Харьков

## **ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМ**

Приведено результати аналізу кола розряду конденсатора на котушку по схемі з напівпровідниковими ключовими елементами. Встановлено обмеження щодо вибору контурів цього кола з позицій теорії графів. Приведено порівняння результатів розрахунку складових струму в котушці з експериментальними даними.

Приведены результаты анализа цепи разряда конденсатора на катушку по схеме с полупроводниковыми ключевыми элементами. Установлены ограничения по выбору контуров этой цепи с позиций теории графов. Проведено сравнение результатов расчета составляющих тока в катушке с экспериментальными данными.

**Введение.** Индукционно-динамические приводы (ИДП) в настоящее время широко используются в быстродействующих автоматических выключателях (АВ) [1]. В состав ИДП входит электромагнит, содержащий катушку, диск (якорь), магнитную систему, а также конденсаторная батарея (конденсатор) и система управления, обеспечивающая запуск процесса разряда конденсатора. Процесс разряда конденсатора может быть различным: периодическим, аperiodическим и комбинированным [2]. В общем случае моделирование процессов в электромагнитной системе ИДП представляет собой сложную математическую задачу, приближенное решение которой возможно с использованием только численных методов [3, 4]. Это объясняется сложностью модели [2, 5], наличием в схеме разряда конденсатора полупроводниковых элементов (тиристорного ключа, шунтирующего диода и др.), а также магнитной системы с нелинейными характеристиками [6]. Формирование уравнений математической модели ИДП в известных публикациях [7-10] выполняется на основе схем замещения электрической цепи и механической системы. При этом значительная часть подготовительной работы для расчетов модели, включая выбор контуров цепи, выполняется вручную и в этом случае определяющим фактором

является квалификация исследователя. Преодолеть этот недостаток можно было бы путем формализации процесса формирования уравнений с использованием теории графов для электрической цепи [11]. Однако при этом возникают сложности в случае, когда полупроводниковые элементы заменяются ключевыми элементами. Нарботки в области моделирования процессов в индукционно-динамических системах огромны. Достаточно полный обзор приведен в работе [7]. Однако полностью решенной эту задачу считать нельзя, так как большая часть результатов получена исключительно численными методами, что не позволяет использовать полученные решения в подобных задачах.

**Цель работы** – определение особенностей электрической цепи разряда конденсатора на катушку индуктивности в индукционно-динамическом приводе, содержащей полупроводниковые ключевые элементы.

**Электрическая схема замещения цепи разряда.** Типичная схема замещения цепи разряда с полупроводниковыми элементами показана на рис. 1 [7].

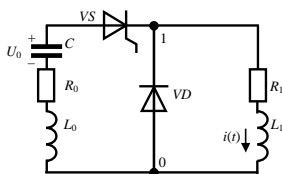


Рис. 1.

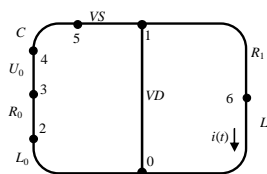


Рис. 2.

Обозначения на схеме:  $C$  – емкость конденсатора;  $R_0$ ,  $L_0$  – сопротивление токопроводящих элементов цепи разряда конденсатора и его индуктивность;  $R_1$ ,  $L_1$  – сопротивление и индуктивность катушки;  $VS$  – тиристор системы управления разрядом конденсатора;  $VD$  – шунтирующий диод; 1, 2 – узлы схемы (точки электрического контакта);  $U_0$  – напряжение предварительно заряженного конденсатора;  $i(t)$  – ток катушки.

Граф этой схемы построен на рис. 2. Компоненты графа имеют те же обозначения, что и элементы электрической схемы, а точки соединений компонент пронумерованы от 0 до 6. В случае точных моделей компонент графа, включая тиристор и диод, структура связей этого графа устанавливается на основе законов Кирхгофа. Однако в большинстве практических применений эти элементы рассматриваются как ключи, исключающие протекание тока в разомкнутом состоянии. С учетом этого схему на рис. 1

можно представить в виде, приведенном на рис. 3. В исходном состоянии шунтирующий диод  $VD$  рассматривается как замкнутый ключ, представленный на схеме размыкающим контактом  $VD$ , а тиристор  $VS$  – разомкнутым ключом, представленным замыкающим контактом  $VS$ . По условиям работы схемы на рис. 1 при открытии тиристора  $VS$  ток не протекает по шунтирующему диоду  $VD$ , а при закрытии тиристора диод открывается. На схеме рис. 3 эта связь состояний контактов  $VS$  и  $VD$  показана в виде пунктирной линии.

**Особенности моделирования цепи с ключевыми элементами.**

Анализ схемы на рис. 3 показывает, что в контуре, образованном ключами  $VS$  и  $VD$  ток не протекает ни при каких условиях. В этом заключается первая особенность рассматриваемой схемы цепи разряда конденсатора с ключами. Как следствие этого, схема на рис. 3 фактически является *одноконтурной*, состав последовательно включенных элементов которой меняется с помощью ключей. В этом заключается вторая особенность этой схемы.

С учетом этих особенностей должна строиться и математическая модель для данной схемы.

В общем случае имеет смысл составить такое уравнение для полного набора элементов, что соответствует внешнему контуру на рис. 3, который образуется при открытии тиристора  $VS$ . Это первое состояние одноконтурной цепи длится до момента времени, когда происходит переключение ключей схемы:  $VD$  – открывается и  $VS$  – закрывается. Во втором состоянии схемы состав элементов контура уменьшается и на рис. 3 соответствует элементам  $R_1, L_1$ . Таким образом, единственный контур цепи может находиться

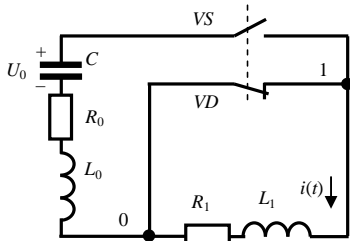


Рис. 3

в двух рабочих состояниях, разделенных моментом времени переключения ключей схемы, который можно обозначить  $t_1$ . Общее уравнение для двух состояний контура может быть описано уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа и содержащим коммутационную функцию ( $\delta$ -функцию) [12]:

$$u_C(t) \cdot \delta(t_1) + u_L(t) + u_R(t) = 0, \quad (1)$$

где  $\delta(t_1)$  – обобщенная функция, принимающая значение 1 либо 0 соответственно для первого и второго состояния контура,

$$\delta(t_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq t_1; \\ 0 & \text{при } t > t_1; \end{cases} \quad (2)$$

$u_C(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $u_R(t)$  – падения напряжения на элементах преобразованной схемы цепи с суммарными величинами соответственно емкости, индуктивности и активного сопротивления.

Анализ уравнения (1) показывает, что параметр  $t_1$  заранее не известен, обобщенная функция  $\delta(t_1)$ , представленная соотношением (2), не определена. В теории электрических цепей функции  $u_C(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $u_R(t)$  могут быть описаны в классе аналитических функций. Однако наличие не определенной обобщенной функции в уравнении (1) не позволяет построить его решение в классе обобщенных либо аналитических функций. В этом случае приходится строить решение по интервалам, отдельно для первого и второго состояний, используя аналитические функции.

*Первое состояние контура* может быть описано уравнением, полученным из (1) при  $\delta(t_1)=1$  и условии  $t \leq t_1$ :

$$u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) = 0. \quad (3)$$

Компонентные уравнения для элементов  $L$ ,  $C$ ,  $R$  контура, входящие в (3), представляются в виде аналитических функций [11]:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt; \quad u_R(t) = Ri(t), \quad (4)$$

где  $L$  – полная индуктивность контура,  $L = L_0 + L_1$ ;  $C$  – емкость контура;  $R$  – полное сопротивление контура,  $R = R_0 + R_1$ .

С использованием (4) соотношение (3) преобразуется к виду [13]:

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является интегро-дифференциальным уравнением. Построение решения уравнения (5) возможно с использованием методов аналитических функций, либо численными методами. Для построения решения с помощью метода аналитических функций можно выбрать в качестве неизвестного напряжение на емкости  $u_C(t)$ , поскольку в рассматриваемом случае переходный процесс обусловлен преобразованием электрической энергии, запасенной конденсатором, в магнитную энергию. Компонентное уравнение для емкости имеет вид [11]:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (6)$$

Система уравнений (5) и (6) может быть решена подстановкой (6) в (4), что приводит к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0. \quad (7)$$

Поскольку искомая функция  $u_C(t)$  зависит только от одного параметра ( $t$ ), то для однозначности решения уравнения (7) необходимо задать дополнительные условия в одной точке (задача Коши):

$$t = 0; \quad u_C(0) = U_0; \quad \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C}. \quad (8)$$

В теории дифференциальных уравнений решение задачи Коши с дополнительными условиями (8) строится в комплексной области и может быть представлено в виде [11]:

$$u_C(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (9)$$

где  $C_1, C_2$  – константы (постоянные интегрирования);  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни характеристического уравнения

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0, \quad (10)$$

определяемые по формуле

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{D} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad (11)$$

Знак детерминанта  $D$  в (11) определяет тип корней: комплексные корни при  $D < 0$  и действительные – при  $D \geq 0$ . В свою очередь, комплексные корни определяют периодический характер переходного процесса, а действительные – аperiodический.

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий. В данном случае  $i(0) = 0$ , а начальные условия представляются в виде:

$$u_C(0) = U_0; \quad \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

Соотношения (12) позволяют определить постоянные интегрирования:

$$C_1 = -U_0 \frac{\lambda_2}{2\sqrt{D}}; \quad C_2 = U_0 \left( 1 + \frac{\lambda_2}{2\sqrt{D}} \right) \quad D \neq 0. \quad (13)$$

С учетом (6) и (9) ток  $i_I(t)$  контура в первом состоянии равен

$$i_I(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (14)$$

Момент времени  $t_1$  окончания процесса в первом состоянии контура определяется из условия, что в процессе разряда конденсатора его

напряжение снизилось до нуля,

$$u_C(t_1) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) – нелинейное алгебраическое уравнение, решаемое численными методами.

*Второе состояние контура* также отвечает уравнению, полученному из (1) при  $\delta(t_1) = 0$  и условии  $t > t_1$ :

$$u_L(t) + u_R(t) = 0, \quad (16)$$

где  $u_L(t)$ ,  $u_R(t)$  – падения напряжения на индуктивности и активном сопротивлении катушки.

Компонентные уравнения (4) для этого состояния контура имеют вид:

$$u_L(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt}; \quad u_R(t) = R_1 i(t). \quad (17)$$

С учетом (17) уравнение (16) переходного процесса контура во втором состоянии преобразуется к виду [13]:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0, \quad (18)$$

которое является дифференциальным уравнением первого порядка, в отличие от интегро-дифференциального уравнения (5). Его решение строится по аналогии с решением уравнения (5) с использованием единственного граничного условия

$$i_I(t_1) = I_1, \quad (19)$$

где  $I_1$  – значение тока в момент перехода состояния контура из первого во второе.

Решение дифференциального уравнения (18) с учетом граничного условия (19) известно [13] и имеет вид:

$$i_{II}(t) = C_3 e^{\lambda_3 t}, \quad (20)$$

где  $C_3$  – константа (постоянная интегрирования) и  $\lambda_3$  – корень характеристического уравнения, которое записывается по аналогии с (10):

$$L\lambda_3 + R = 0. \quad (21)$$

Формулы для определения  $\lambda_3$  и  $C_3$ , полученные с учетом (19)-(21), имеют вид:

$$\lambda_3 = -R/L; \quad C_3 = I_1 e^{-\lambda_3 t_1}. \quad (22)$$

Как видно из (20) переходный процесс тока во втором состоянии контура является чисто аperiodическим.

**Компьютерное моделирование.** В качестве примера проведен расчет тока разряда катушки, при следующих параметрах цепи:  $C = 660$  мкФ;  $R_0 = 0$ ;  $L_0 = 0$ ;  $R_1 = 0,126$  Ом;  $L_1 = 8,6 \cdot 10^{-5}$  Тл;  $U_0 = 270$  В.

Расчет тока проведен с использованием математического пакета Maple [14]. В первом состоянии контура определитель  $D$  в (11) является отрицательной величиной и равен  $-2,2012 \cdot 10^{-7}$ , что определяет периодический переходный процесс. Расчетное время коммутации контура из первого состояния во

второе  $t_1 = 4,2251 \cdot 10^{-4}$  с.

Во втором состоянии контура процесс является аperiodическим, подчиняющимся закону спадающей экспоненты с постоянной времени  $\tau$ , равной  $\tau = 1/\lambda_3 = 6,8254 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>.

Результаты расчета составляющих токов  $i_I(t)$  и  $i_{II}(t)$  по соотношениям (14) и (20) приведены на рис. 4 в виде составного графика функции тока  $i(t)$ :

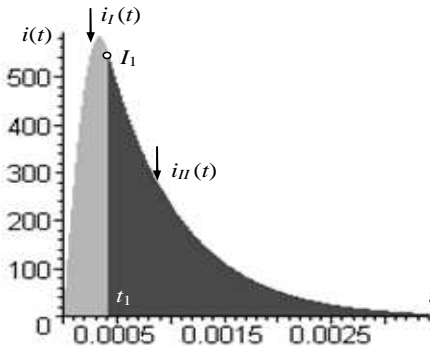


Рис. 4

$$i(t) = i_I(t) + i_{II}(t). \quad (23)$$

**Экспериментальные данные.** На рис. 5 приведена конструкция экспериментального образца катушки. Обозначения на рисунке: 1 – катушка; 2 – измерительная катушка, выводы которой предназначены для подключения к вольтметру.

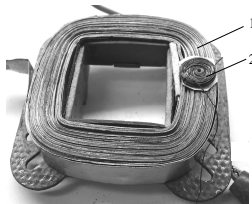


Рис. 5.

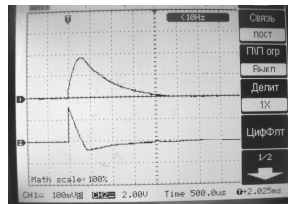


Рис. 6.

Катушка 1 выполнена из медной ленты, навитой на квадратный каркас. Параметры катушки: высота катушки – 10 мм; толщина катушки – 10 мм; толщина ленты катушки – 0,1 мм; количество витков катушки – 45.

При экспериментальных исследованиях контролировались ток катушки и ЭДС в ней с помощью измерительной катушки 2. Кривые тока и ЭДС регистрировались с помощью осциллографа Rigol-DS 5022M. Результаты эксперимента приведены на рис. 6: на верхней осциллограмме (1) показана кривая тока катушки, на нижней (2) – ЭДС.

Анализ осциллограмм на рис. 4 показывает, что форма кривой составного тока полностью совпадает с расчетной кривой (23). Время коммутации, определенное по нижнему излому кривой ЭДС на осциллограмме (2) на рис. 6, совпадают в пределах точности измерений.

### **Выводы.**

1. В электрических схемах замещения цепей с ключевыми элементами возможность выбора независимых контуров ограничивается физическими соображениями. Это ограничение необходимо учитывать при использовании методов исследования цепей, в которых выбор независимых контуров является формальной операцией, например, при использовании метода графов. Рассмотренная схема с полупроводниковыми элементами (ключами) по внешним признакам является двухконтурной, но наличие ключей приводит к тому, что схема является одноконтурной, так как по контуру, формально образованному ветвями с двумя ключевыми элементами, ток не протекает ни при каких условиях.

2. В рассмотренной схеме разряда конденсатора с ключевыми элементами, применяемой в индукционно-динамическом приводе коммутационных электрических аппаратов, однополярный импульс разрядного тока является составным. Он состоит из двух соприкасающихся участков, один из которых характеризует ток разряда конденсатора (периодический процесс в большинстве случаев), а второй характеризует рассеяние магнитной энергии катушкой (аперiodический процесс).

3. Рассмотрен коммутационный процесс разряда конденсатора на катушку индуктивности по схеме с ключевыми элементами в виде двух этапов, характеризующих два состояния одного контура. Предложено описание токов для обоих состояний контура в виде аналитических функций. Результаты исследований подтверждены экспериментально.

4. Результаты исследований могут быть использованы при моделировании процессов в цепях с ключевыми элементами и определении характеристик и параметров цепи путем использования аналитических функций, характеризующих процессы в цепях.

**Список литературы:** 1. *Лядова Л.Л., Сивков А.П.* Расчет индукционно-



динамических приводов быстродействующих автоматических выключателей // Электротехника. – 1991. – Vol. 27. – №1. – P. 634-638. **2.** Могилевский Г.В. Гибридные электрические аппараты низкого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 232 с. **3.** Widner M.M. WARP-10: A numerical simulation model for the cylindrical reconnection launcher // IEEE. Transaction on magnetics. – 1981. **4.** Антонюк О.А., Бондалетов В.Н., Гусаров А.А. Исследование индукционно-динамических систем с магнитопроводом на ЭВМ // Техническая электродинамика. – 1982. – №4. – С. 76-81. **5.** Чемерис В.Т., Васьковский Ю.Н., Петровский В.П. и др. Физическое моделирование особенностей ускорения якоря в импульсном электромеханическом преобразователе индукционного типа // Техническая электродинамика. – 1986. – №3. – С. 66-71. **6.** Воздвиженский В.А., Сидоров В.А. Характеристики электродинамического привода со стальным магнитопроводом // Электротехника. – 1979. – №1. – С. 33-37. **7.** Болюх В.Ф., Даныко В.Г. Лінійні електромеханічні перетворювачі імпульсної дії. – Монографія. – Харків: НТУ "ХПІ", 2006. – 260 с. **8.** Балтаханов А.М., Бондалетов В.Н. Расчет электромагнитных и электромеханических переходных процессов в индукционно-динамических системах // Электричество. – 1981. – № 1. – С. 64-67. **9.** Болюх В.Ф., Даныко В.Г., Любимова Л.А. Электромагнитные процессы в заторможенном электромеханическом импульсном преобразователе индукционного типа // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2001. – №5. – С. 21-28. **10.** Серета О.Г. Оптимізація індукційно-динамічного розчеплювача з метою підвищення струмообмежуючої здатності швидкодіючих автоматичних вимикачів: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.09.01 / НТУ "ХПІ". – Харків, 2002. – 18 с. **11.** Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975. – 768 с. **12.** Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1971. – 512 с. **13.** Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. **14.** Матросов А.В. Марле б. Зешение задач высшей математики и механики. – СПб.:БХВ-Петербург, 2001.– 528 с.

*Поступила в редколлегию 01.09.2010*