

Н.П. КУНДЕНКО, канд. техн. наук, ХНТУСХ, Харьков
В.С. ЛУПИКОВ, д-р техн. наук, проф., зав. каф., НТУ "ХПИ",
Харьков

РАСЧЕТЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ В КРИО- КОНСЕРВИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Analytical parities for computation of oscillatory speed and superfluous pressure, resulting diffractions of an acoustic wave on biological object are received characterising the cryo-preserving environment.

Получены аналитические формулы для расчета колебательной скорости и избыточного давления, возникающие в крио – консервирующей среде в результате дифракции акустической волны на биологическом объекте.

Отримано аналітичні формули для розрахунку коливальної швидкості та надлишкового тиску, що виникають у крио-консервуючому середовищі, в результаті дифракції акустичної хвилі на біологічному об'єкті.

Постановка проблемы. Одним из определяющих факторов при определении скорости микропотоков [1] является колебательная скорость частиц среды в окрестности граничной поверхности биологического объекта. Однако, на практике геометрические размеры биологического объекта могут быть значительно (на несколько порядков) меньше длины звуковой волны. В качестве крио-консервирующей среды рассматривается сплошная среда с заданными значениями плотности, скорости звука и вязкости. Биологические объекты моделируются геометрическими телами в виде шара и эллипсоида вращения (вытянутый сфероид). На поверхностях этих тел ставится граничное условие: равенство нулю, суммы давления возбуждающей звуковой волны и избыточного давления, возникающего в результате дифракции звуковой волны на биологическом объекте. Процесс воздействия звуковой волны на биологический объект описывается краевой задачей линейной акустики.

Анализ литературы. В [1, 2, 4, 8, 9], проведен анализ моделирования процесса массопереноса частиц крио – консервирующей среды к поверхности биологического объекта, при этом решающую роль играют скорости микропотоков, возникающих при наличии звуковой волны. Одним из определяющих факторов при определении скорости микропотоков является колебательная скорость частиц среды в окрестности граничной поверхности биологического объекта. В [2] разработан алгоритм, который позволяет при любых соотношениях между

длиной звуковой волны и геометрическими размерами биологического объекта рассчитать с помощью компьютера колебательную скорость и избыточное давление. Однако, на практике геометрические размеры биологического объекта могут быть значительно (на несколько порядков) меньше длины звуковой волны.

Цель статьи – рассчитать аналитические выражения для колебательной скорости и избыточного давления в окрестности границы биологического объекта, позволяющие проводить расчеты колебательной скорости с погрешностью, не превышающей 10 %.

Расчет колебательной скорости. Основой для расчета является система уравнений [2] для потенциала колебательной скорости.

$$y^m + \bar{D}^m y^m = U^m. \quad (1)$$

Далее, будем рассматривать два типа биологических объектов, а именно: шар – моделирующий эмбрион и эллипсоидальный сфероид – моделирующий спермий.

Потенциальную функцию U^s колебательной скорости можно представить в виде

$$U^s(x, y, z) = \int_0^\pi d\tau \int_{-\pi}^\pi \rho(\tau) \sqrt{\dot{\rho}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)} \psi(\tau, \varphi) G(kR(\tau, \varphi, x, y, z)) \quad (2)$$

где

$$R(\tau, \varphi, x, y, z) = [(\rho(\tau) \cos \varphi - x)^2 + (\rho(\tau) \sin \varphi - y)^2 + (z - z(\tau))^2]^{1/2}.$$

Параметрические функции $z(\tau)$ и $\rho(\tau)$ определяются по следующим формулам

$$\rho(\tau) = \begin{cases} R \sin \tau & - \text{шар}, \\ r(\tau) \cos \tau & - \text{эллипсоидальный сфероид}, \end{cases} \quad (3)$$

$$z(\tau) = \begin{cases} R \cos \tau & - \text{шар}, \\ r(\tau) \sin \tau & - \text{эллипсоидальный сфероид}, \end{cases} \quad (4)$$

Функция $X(\tau, \varphi)$ может быть представлена в следующем виде

$$X(\tau, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \sum_{n=|m|} X_m^n \bar{P}_n^{|m|}(\cos \tau), \quad (5)$$

где коэффициенты X_m^n выражаются через решение системы уравнений (1) по формуле

$$X_n^m = (n + 0,5)^{1/2} y_n^m. \quad (6)$$

Таким образом, определив y_m^n из системы уравнений (1) согласно формулам (4) и (5) получаем значение потенциала колебательной скорости в любой точке крио-консервирующей среды вне биологического объекта. Подставим (5) в (4) и поменяем порядки суммирования и интегрирования. Тогда с учетом (6) будем иметь

$$U^s(x, y, z) = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} (n+0.5)^{1/2} y_n^m \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho(\tau) \sin \tau} e^{im\varphi} \times \\ \times P_n^{|m|}(\cos \tau) G(kR(\tau, \varphi, x, y, z)) d\tau d\varphi \quad (7)$$

Выражение (7) является основой для получения приближенных формул для колебательной скорости и избыточного давления в окрестности биологического объекта.

Будем предполагать, что длина возбуждающей звуковой волны значительно (на порядок) превосходит максимальный геометрический размер биологического объекта. В этом случае систему уравнений (1) можно решить методом последовательных приближений [5, 6]

С учетом выше изложенного, формула (7) примет вид

$$U^s = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+0.5)^{1/2} U_n^0 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho(\tau) \sin \tau} \bar{P}_n^0(\cos \tau) d\tau \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} G(kR(\tau, \varphi, x, y, z)) d\varphi \quad (8)$$

Теперь рассмотрим случай биологического объекта в виде шара (модель эмбриона). Воспользуемся известным представлением [7, 8]

$$e^{ikR \cos \tau} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+0.5)^{1/2} \psi_m(kR) \bar{P}_m^0(\cos \tau), \quad (9)$$

где $\psi_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{m+1/2}(x)$, $J_{m+1/2}(x)$ – функция Бесселя первого рода $(m+1/2)$ -го порядка.

С учетом (9) после ряда элементарных преобразований [7] получаем следующее выражение для потенциала колебательной скорости

$$U^s(r, \Theta) = -2A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+0.5)^{1/2} \varphi_m(kR)}{\varphi_m(kR)} \varphi_m(kr) \bar{P}_m^0(\cos \Theta) \quad (10)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$, r, Θ, φ – сферические координаты с началом координат совпадающие с центром эмбриона, $\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{m+1/2}^{(1)}(x)$, $H_{m+1/2}^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля $(m + 0.5)$ -го порядка.

Для дальнейшего упрощения (10), воспользуемся асимптотическими разложениями для функций $\varphi_m(kR)$ и $\psi_m(kR)$ при $kR \rightarrow 0$, [7]

$$U^s(r, \Theta) \cong -A \frac{R}{r} e^{ikr}. \quad (11)$$

Эта формула справедлива с точностью до членов порядка $(kR)^3$. Получаем приближенное выражения для реального значения потенциала U^s колебательной скорости

$$U^s = -\frac{A e^{-\alpha r} R}{r} \cos(k_0 r - \omega t). \quad (12)$$

Здесь α – коэффициент затухания, который согласно [1] имеет вид

$$\alpha = \frac{8\pi^2 f \eta}{3c_0^3 \rho_0}, \quad (13)$$

где f – частота возбуждающей звуковой волны ($\omega = 2\pi f$), ρ_0 и η – соответственно плотность и динамическая вязкость криоконсервирующей среды.

После ряда элементарных преобразований получаем выражение для расчета избыточного давления и колебательной скорости

$$P - P_0 = \frac{RA}{r} e^{-\alpha r} [-\omega \sin(k_0 r - \omega t) + \gamma \sin(k_0 r - \omega t)], \quad (14)$$

$$U^s = -\frac{AB e^{-\alpha \frac{(r_1+r_2)}{2}}}{r_1+r_2} \cos\left(k_0 \frac{(r_1+r_2)}{2} - \omega t\right) \quad (15)$$

Таким образом, потенциал колебательной скорости для эллипсоидального сфероида по своей структуре подобен потенциалу для шара. В самом деле, из (15) следует, что при больших расстояниях от границы эллипсоидального сфероида, когда выполняется

$r_1 + r_2 \cong 2r = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, потенциал (15) преобразуется к виду

$$U^s = -\frac{AR e^{-\alpha r}}{r} \cos(k_0 r - \omega t), \quad (16)$$

$$R = \frac{2a}{2 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что потенциал колебательной скорости эллипсоидального сфероида на больших расстояниях ($r_1 + r_2 \cong 2r$) совпадает с потенциалом колебательной скорости сферы, с радиусом, задаваемым по формуле (17). Определим теперь поле скорости

$$\vec{v} = \frac{AB \vec{r} e^{-\alpha \frac{(r_1+r_2)}{2}}}{\rho_0 r_1 r_2} \left[\cos \left(k_0 \frac{(r_1+r_2)}{2} - \omega t \right) \left(\frac{1}{r_1+r_2} + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{k_0}{2} \sin \left(k_0 \frac{(r_1+r_2)}{2} - \omega t \right) \right], \quad (18)$$

где $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты декартовой системы координат с началом совпадающим с центром симметрии эллипсоидального сфероида. Аналогично (14) легко получить выражение для расчета избыточного давления

$$P - P_0 = \frac{AB e^{-\alpha \frac{(r_1+r_2)}{2}}}{r_1 r_2} \left[\gamma \cos \left(k_0 \frac{(r_1+r_2)}{2} - \omega t \right) - \omega \sin \left(k_0 \frac{(r_1+r_2)}{2} - \omega t \right) \right] \quad (19)$$

Эти формулы являются основой для анализа процесса массопереноса частиц крио-консервирующей среды к поверхности биологических объектов при наличии акустических колебаний.

Выводы. Получены аналитические формулы для расчета колебательной скорости и избыточного давления, возникающие в крио-консервирующей среде в результате дифракции акустической волны на биологическом объекте. Установлено, что амплитуда колебательной скорости у поверхности биологического объекта экспоненциально уменьшается с увеличением коэффициента затухания крио-

консервирующей среды и прямо-пропорциональна амплитуде акустической волны и обратно пропорциональна линейному размеру биологического объекта.

Список литературы: 1. *Кунденко Н.П.* Особенности распространения ультразвука в биологической среде // *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. – Сер.: Актуальні питання енергетики і прикладної біофізики в агропромисловості. – Мелітополь: ТДАУ. – 2011. – Вип. 11. – Том 4. – С. 181-186. 2. *Кунденко Н.П.* Математическое моделирование процесса воздействия акустического поля на криоконсервирующую среду с биологическим объектом // *Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенко*. – Сер.: Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України. – Харків: ХНТУСГ. – 2011. – Вип. 117. – С. 140-142. 3. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. – М.: ИЛ, 1956. – 726 с. 4. *Скучик Е.* Основы акустики. – М.: Мир, 1976. – Т. 2. – 542 с. 5. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 632 с. 6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 7. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 312 с. 8. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с. 9. *Бурдуков А.П., Накоряков В.Е.* О переносе массы в звуковом поле // *ПМТФ*. – 1965. – Т. 2. – № 2. – С. 1236-1242.

*Поступила в редколлегию 16.12.2011
Рецензент д.т.н., проф. Болюх В.Ф.*