

М.М. РЕЗИНКИНА, д-р техн. наук, вед.н.с., Институт технических проблем магнетизма НАН Украины, Харьков
В.С. ГРИНЧЕНКО, канд. техн. наук, м.н.с., Институт технических проблем магнетизма НАН Украины, Харьков
Н.В. КОНДУСОВА, канд. техн. наук, доц., Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОРОДНОГО СТАТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ СТАЛЬНОЙ КОЛОННЫ

В статье исследованы методы описания искажения однородного статического магнитного поля в окрестности вытянутого сфероида, выполненного из однородного изотропного магнетика. Получены аналитические выражения для распределения магнитного поля в такой системе. Показано, что полученные аналитические выражения могут быть использованы для описания распределения геомагнитного поля при наличии стальной колонны.

Ключевые слова: аналитическая модель, однородное магнитное поле, сфероид, стальная колонна, COMSOL Multiphysics.

Введение. В последнее время большое внимание уделяется проблеме искажения геомагнитного поля (ГМП) стальными конструкциями современных зданий. В [1] представлен анализ допустимых уровней ослабления ГМП и приведены результаты измерений магнитного поля (МП) в жилых и общественных помещениях. Величина искажения ГМП определяется формой и магнитной проницаемостью ферромагнитных конструкций каркаса здания [2]. В [1] предложено рассматривать каркас здания как набор отдельных ферромагнитных элементов (колонн и балок). Если ферромагнитным элементом здания является полая труба, то при моделировании МП она может рассматриваться как однородная колонна с определенной магнитной проницаемостью [3]. В литературе приведены решения задачи об искажении ГМП отдельными ферромагнитными элементами, использующие численные методы: в [4] применялся метод фундаментальных решений, в [5, 6] – метод конечного интегрирования, в [1] распределение магнитной индукции было рассчитано в пакете COMSOL Multiphysics. В тоже время, ГМП является однородным статическим МП, и для некоторых геометрий ферромагнитных элементов распределение поля может быть описано аналитическим выражением.

Целью данной работы является получение аналитических выражений в элементарных функциях, позволяющих в рамках инженерной погрешности определять уровни искажения ГМП отдельными ферромагнитными элементами зданий (колоннами и балками). Для этого в представленной работе аналитически решается задача о вытянутом сфероиде из однородного изотропного магнетика, помещенного в однородное статическое МП. Далее проводится сравнение полученного распределения МП с распределением в окрестности цилиндрической колонны (ее высота равна длине большой оси сфероида, радиус – малой полуоси сфероида, магнитная проницаемость колонны равна магнитной проницаемости сфероида), помещенной в то же внешнее МП.

Вытянутый сфероид в однородном магнитном поле. В работе рассмотрен вытянутый сфероид (a – большая полуось, b – малая полуось) с магнитной проницаемостью μ_1 , помещенный в среду с магнитной проницаемостью μ_2 . Напряженность внешнего однородного статического МП задана вектором \vec{H}_0 . Декартова система координат введена следующим образом: начало системы координат совпадает с центром сфероида, ось x направлена вдоль оси вращения вытянутого сфероида, оси y и z расположены таким образом, чтобы $H_{0z} = 0$ (рис. 1).

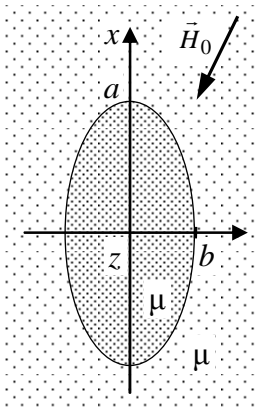


Рис. 1 – Введенная декартова система координат

Задача нахождения скалярного магнитного потенциала φ внутри и снаружи произвольного эллипсоида, помещенного в однородное МП, рассмотрена в [7]. Однако в общем случае в выражения для магнитного потенциала входят собственные интегралы, которые не могут быть вычислены аналитически.

Для рассматриваемого в данной работе вытянутого сфероида в поле \vec{H}_0 выражения для скалярного магнитного потенциала внутри сфероида φ^- и снаружи него φ^+ , приведенные в [7], имеют следующий вид:

$$\varphi^- = - \frac{H_{0x} \cdot x}{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+a^2) \cdot R_s}} - \frac{H_{0y} \cdot y}{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b^2) \cdot R_s}},$$

$$\begin{aligned} \varphi^+ = & -H_{0x} \cdot x \cdot \frac{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{\xi} \frac{ds}{(s+a^2) \cdot R_s}}{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+a^2) \cdot R_s}} - \\ & - H_{0y} \cdot y \cdot \frac{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{\xi} \frac{ds}{(s+b^2) \cdot R_s}}{1 + \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+b^2) \cdot R_s}}, \end{aligned}$$

где $R_s = \sqrt{s+a^2} \cdot (s+b^2)$;

$$\xi = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2(y^2 + z^2)}}{2} -$$

эллипсоидальная координата ($\xi = \text{const}$ – семейство двуполостных гиперболоидов).

Напряженность МП \vec{H} связана со скалярным магнитным потенциалом φ посредством выражения $\vec{H} = -\nabla\varphi$. Проводя дифференцирование φ^- и φ^+ , были найдены выражения для напряженности МП внутри вытянутого сфероида \vec{H}^- :

$$H_x^- = \frac{H_{0x}}{1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(-1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)},$$

$$H_y^- = \frac{H_{0y}}{1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)},$$

$$H_z^- = 0;$$

и вне его \vec{H}^+ :

$$\begin{aligned}
H_x^+ &= H_x^- \cdot \left[1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \left(\frac{2b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(-1 + \frac{a}{\sqrt{\xi + a^2}} \right) + \frac{ab^2 \cdot x \frac{\partial \xi}{\partial x}}{(\xi + a^2)^{3/2} \cdot (\xi + b^2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{ab^2}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{a^2 + \xi} - \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2})}{(\sqrt{a^2 + \xi} + \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a - \sqrt{a^2 - b^2})} \right) \right] + \\
&\quad + H_y^- \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \frac{ab^2 \cdot y \frac{\partial \xi}{\partial x}}{\sqrt{\xi + a^2} \cdot (\xi + b^2)^2}, \\
H_y^+ &= H_x^- \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \frac{ab^2 \cdot x \frac{\partial \xi}{\partial y}}{(\xi + a^2)^{3/2} \cdot (\xi + b^2)} + \\
&\quad + H_y^- \cdot \left[1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(1 - \frac{b^2 \cdot \sqrt{\xi + a^2}}{a \cdot (\xi + b^2)} \right) + \frac{ab^2 \cdot y \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{\xi + a^2} \cdot (\xi + b^2)^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{ab^2}{2(a^2 - b^2)^{3/2}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{a^2 + \xi} - \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2})}{(\sqrt{a^2 + \xi} + \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a - \sqrt{a^2 - b^2})} \right) \right], \\
H_z^+ &= H_x^- \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \frac{ab^2 \cdot x \frac{\partial \xi}{\partial z}}{(\xi + a^2)^{3/2} \cdot (\xi + b^2)} + H_y^- \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \cdot \frac{ab^2 \cdot y \frac{\partial \xi}{\partial z}}{\sqrt{\xi + a^2} \cdot (\xi + b^2)^2},
\end{aligned}$$

где частные производные эллипсоидальной координаты ξ выражаются через декартовы координаты x , y и z следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} = x \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - z^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2(y^2 + z^2)}} \right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = y \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - z^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2(y^2 + z^2)}} \right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} = z \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - z^2 - a^2 + b^2)^2 + 4x^2(y^2 + z^2)}} \right). \end{array} \right.$$

Полученные выражения записаны в элементарных функциях и описывают распределение напряженности МП вокруг вытянутого сфероида, помещенного в однородное статическое МП.

Магнитная индукция внутри и вне сфероида равна, соответственно, $\vec{B}^- = \mu_1 \mu_0 \vec{H}^-$ и $\vec{B}^+ = \mu_2 \mu_0 \vec{H}^+$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Цилиндр в однородном магнитном поле. Для проверки возможности применения полученных выражений для описания искажения ГМП ферромагнитной колонной были приняты следующие параметры системы [1]: длина цилиндрической колонны – $10d$, радиус – $d/2$, где d – длина в относительных единицах, магнитная проницаемость колонны – 100. Полагалось, что колонна располагается в ГМП, вертикальная составляющая которого равняется 46,6 мкТл, горизонтальная – 18,1 мкТл. Распределение магнитного поля в окрестности колонны рассчитано в пакете COMSOL Multiphysics [8]. Для этого была построена трехмерная модель, использовался решатель "Magnetic Fields, No Currents (*mfnc*)", расчетная область представляла собой цилиндр радиусом $15d$ и высотой $40d$ (рис. 2), для ограничения расчетной области использовалась техника "Infinite Element Domains" (IED), толщина IED-области была положена равной $5d$, в модели использовались сетки типа "Free Triangular" и "Mapped" размера "Extra fine" (максимальный размер элемента сетки равнялся $1,4d$, минимальный – $0,06d$). Правильность полученного численного решения была проверена путем его сравнения с решением, получаемым при двойном увеличении размеров расчетной области, и решением, получаемым при использовании более грубой сетки.

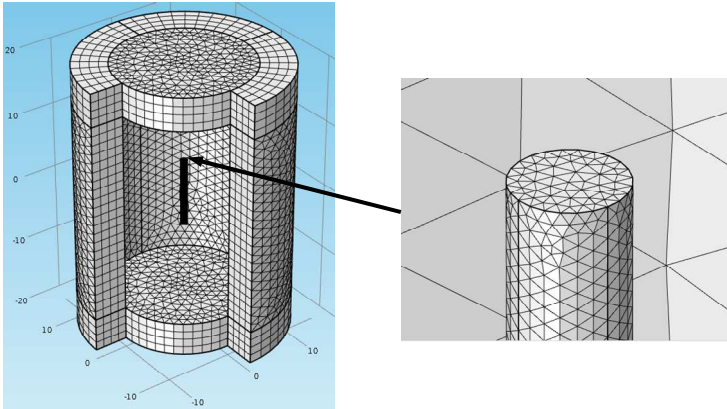


Рис. 2 – Трехмерная модель цилиндрической колонны

Для сравнения результатов численного моделирования с аналитическим расчетом, проведенным для вытянутого сфероида, в полученные в предыдущем разделе выражения были подставлены следующие величины: $a=5d$ (большая полуось сфероида равна половине высоты колонны), $b=d/2$ (малая полуось равна радиусу колонны), $\mu_1=100$ (магнитные проницаемости сфероида и цилиндрической колонны равны), $\mu_2=1$ (для воздушного пространства), $B_{0x}=-46,6$ мкТл, $B_{0y}=-18,1$ мкТл.

На рис. 3 представлены распределения изменения ГМП в относительных единицах ($B_0=50$ мкТл – модуль магнитной индукции ГМП, B – модуль магнитной индукции при внесении в ГМП ферромагнитного элемента): "треугольники" на графиках соответствуют распределению, рассчитанному в пакете COMSOL Multiphysics, сплошные кривые построены при помощи аналитических выражений. Зависимости построены в точках с координатами $x = 0, z = 0$ (рис. 3, а), $x = 2,5d, z = 0$ (рис. 3, б), $x = 5d, z = 0$ (рис. 3, в), $x = 7,5d, z = 0$ (рис. 3, г). Наилучшее совпадение результатов численного моделирования распределения МП при наличии цилиндрической колонны и результатов аналитического расчета распределения МП при наличии вытянутого сфероида наблюдается в центральной области колонны/сфероида (рис. 3, а, б) и в области над этими элементами (рис. 3, г). Замена цилиндрической колонны вытянутым сфероидом (с соответствующими величинами полуосей) вносит погрешность при определении МП в точках этих областей, не превышающую 8 %. В точках, расположенных возле оснований колонны (возле полюсов вытянутого сфероида), погрешность при определении величины МП выше (рис. 3, в). Тем не менее, при удалении

от оси вращения более чем на удвоенный радиус колонны погрешность становится меньше 10 %.

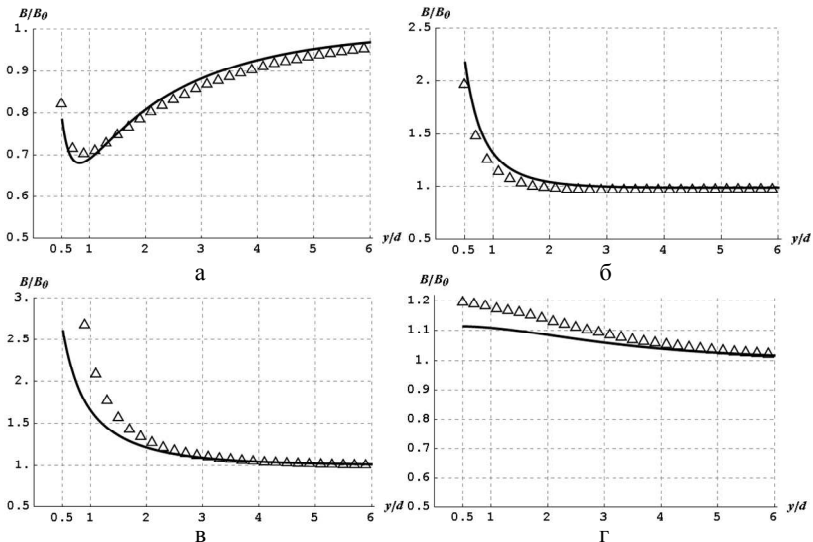


Рис. 3 – Распределения изменения ГМП в относительных единицах построены в точках с координатами: а – $x = 0, z = 0$; б – $x = 2,5d, z = 0$; в – $x = 5d, z = 0$; г – $x = 7,5d, z = 0$.

Выводы. В работе представлено аналитическое решение задачи о распределении МП вокруг вытянутого сфероида, помещенного в однородное статическое МП. Показано, что полученные выражения могут быть использованы для нахождения искажения ГМП стальной колонной. Причем при замене колонны (высоты h , радиуса r) вытянутым сфероидом (с полуосями $a=h/2$ и $b=r$) погрешность в области, удаленной от оси вращения цилиндра/сфероида более чем на $2r$, не превышает 10 %.

Список литературы: 1. Розов В.Ю. Экспериментальные исследования явления ослабления статического геомагнитного поля в помещениях / В.Ю. Розов, Д.Е. Пелевин, С.В. Левина // Электротехніка і електромеханіка. – 2013. – №6. – С. 76-80. 2. Розов В.Ю. Исследование техногенных искажений геомагнитного поля в жилых и производственных помещениях и определение путей их снижения до безопасного уровня / В.Ю. Розов, М.М. Резинкина, Ю.Д. Думанский, Л.А. Гвозденко // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск "Проблеми сучасної електротехніки". – 2008. – Ч. 2. – С. 3-8. 3. Розенблат М.А. Коэффициенты размагничивания стержней высокой проницаемости / М.А. Розенблат // Журнал технической физики. – 1954. – Т. XXIV, Вып. 4. – С. 637-661. 4. Розов

В.Ю. Исследование явления ослабления статического геомагнитного поля стальной колонной / В.Ю. Розов, С.Ю. Реуцкий, С.В. Левина // Технічна електродинаміка. – 2014. – № 1. – С. 12-19. **5.** Резинкина М.М. Расчет трехмерных электрических полей в системах, содержащих тонкие проволоки / М.М. Резинкина // Электричество. – 2005. – № 1. – С. 44-49. **6.** Резинкина М.М. Численное исследование магнитного поля разноразмерных объектов / М.М. Резинкина, В.С. Гринченко, Л.Э. Лобжанидзе // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск "Проблеми сучасної електротехніки". – 2010. – Ч.1. – С. 189-192. **7.** Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Страттон. – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. – 539 с. **8.** Pryor R.W. Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach / R.W. Pryor // – Jones & Bartlett Publishers, 2009. – 852 p.

Bibliography (transliterated): **1.** Rozov V.Ju., Pelevin D.E., Levina S.V. "Experimental investigations of phenomena of static geomagnetic field reducing in premises". *Electrical Engineering & Electromechanics*. No. 6. 2013. 76-80. Print. **2.** Rozov V.Ju., Rezinkina M.M., Dumansky Ju.D., Gvozdenko L.A. "Investigation of geomagnetic field technogenic aberrations in lodgings and industrial premises and determination of ways of their decrease to safety levels". *Technical Electrodynamics*. Part 2. 2008. 3-8. Print. **3.** Rozenblat M.A. "Demagnetization factors of high-penetration bars". *Journal of Technical Physics*. Vol. XXIV, Issue 4. 1954. 637-661. Print. **4.** Rozov V.Ju., Reutsy S.Ju., Levina S.V. "Investigation of phenomena of static geomagnetic field reducing by a steel column". *Technical Electrodynamics*. No. 1. 2014. 12-19. Print. **5.** Rezinkina M.M. "Calculation of 3D electric field in systems with thin wires". *Electricity*. No. 1. 2005. 44-49. Print. **6.** Rezinkina M.M., Grinchenko V.S., Lobzhanidze L.E. "Numerical investigation of magnetic field of objects with different dimensions". *Technical Electrodynamica*. Part. 1. 2010. 189-192. Print. **7.** Stratton J.A. *Electromagnetic Theory*. New York, London: McGraw-Hill, 1941. Print. **8.** Pryor R.W. *Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach*. Jones & Bartlett Publishers. 2009. Print.

Поступила (received) 05.05.2014