

*М.Г. ПАНТЕЛЯТ*, канд. фіз.-мат. наук, НТУ "ХПІ"

*Ю.В. ГУРЕНЦОВ*, студент, НТУ "ХПІ"

## **МЕТОДИКА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РОЗПОДІЛУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ІНДУКЦІЙНОЇ КУХОННОЇ ПЛИТИ**

В статті запропонована методика чисельного аналізу розподілу електромагнітного поля побутової індукційної плити. Математична модель електромагнітних процесів в конструкціях, що розглядаються, представляє собою підсистему рівнянь Максвелла в диференційній формі без урахування струмів зсуву. Розрахунок електромагнітного поля виконується у двовимірній постановці методом скінчених елементів з використанням векторного магнітного потенціалу. У загальному випадку, враховуються магнітні властивості феромагнітних матеріалів магнітопроводу індукційної плити та посуду, що нагрівається. Чисельні дослідження планується виконувати з використанням пакета програм EleFAnT2D, розробленого в Інституті основ та теорії електротехніки Технічного університету м. Грац, Австрія.

**Ключові слова:** індукційна кухонна плита, електромагнітне поле, комп'ютерне моделювання, метод скінчених елементів

**Вступ.** В основу принципу дії побутових індукційних кухонних плит покладено розігрів металевого посуду вихровими струмами, які створюються електромагнітним полем частотою 20-100 кГц [1, 2]. В роботі [3] авторами виконано огляд конструкцій сучасних індукційних плит, а також розроблено та апробовано інженерну методику розрахунку та проектування основного конструктивного елементу такої плити – індуктору (плоскої ановиткової або багатовиткової котушки, при протіканні по якій змінного струму створюється електромагнітне поле, яке індуктує в свою чергу вихрові струми в посуді, що нагрівається). Основні результати розрахунку індуктора (геометрія, електричні та енергетичні величини, кількість витків) повинні бути перевірені та уточнені шляхом комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного (а потім і температурного) поля індукційної плити в процесі її експлуатації. На першому етапі досліджень доцільно побудувати та використовувати математичну модель та методику чисельного аналізу електромагнітних процесів в індукційних плитах. Наступним кроком є комп'ютерне моделювання зв'язаних (мультифізичних) електромагнітних та теплових явищ, що мають місце в процесі роботи індукційних кухонних плит, з урахуванням їх взаємного впливу одне на інше.

**Мета роботи** – розробка математичної моделі та методики

чисельного аналізу розподілу електромагнітного поля індукційної кухонної плити.

Отримані результати комп'ютерного моделювання будуть проаналізовані в наступних роботах.

**Математична модель електромагнітних процесів в індукційних плитах.** На погляд авторів, математична модель повинна мати наступні основні елементи:

- основні рівняння (або система рівнянь), що описують явище або процес, що досліджується (в нашому випадку – розподіл електромагнітного поля побутової індукційної кухонної плити);

- обґрунтовані припущення, що дозволяють спростити рівняння, що підлягає або підлягають розв'язанню;

- геометрія об'єкта, що досліджується (в нашому випадку – конструкція індукційної кухонної плити), та міркування, що дозволяють її спростити (наприклад, умови симетрії конструкції, що розглядається);

- початкові та граничні умови;

- властивості матеріалів конструкції та їх нелінійні характеристики (у випадку індукційної плити – електрофізичні властивості: величини питомої електричної провідності матеріалів, а також основні криві намагніченості магнітом'яких феромагнітних матеріалів або залежності магнітної проникності матеріалів від напруженості магнітного поля; явище магнітного гістерезису не враховується);

- величини, що характеризують "зовнішній вплив" на об'єкт дослідження або зовнішні навантаження та їх джерела (у випадку індукційної плити: амплітудне значення сили струму або щільності струму в індукторі, а також частота електромагнітних коливань).

Розглянемо послідовно побудову математичної моделі електромагнітних процесів в індукційних кухонних плитах.

1) Розподіл нестационарного електромагнітного поля у просторі та часі у загальному випадку описується системою рівнянь Максвелла у диференційній формі [4, 5]. Оскільки частота електромагнітних коливань в індукційних плитах не перевищує 100 кГц, доцільно знехтувати струмами зсуву та розв'язувати наступну підсистему рівнянь Максвелла з урахуванням лише струмів провідності (без урахування струмів зсуву) [4, 5]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\mathbf{H}$  – вектор напруженості магнітного поля;  $\mathbf{B}$  – вектор індукції магнітного поля;  $\mathbf{E}$  – вектор напруженості електричного поля;  $\mathbf{J}$  – вектор щільності струмів провідності.

Система рівнянь (1) доповнюється так званими матеріальними рівняннями, які визначають електрофізичні властивості матеріалів [4, 5]:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \gamma\mathbf{E},\end{aligned}\tag{2}$$

де  $\mu$  – магнітна проникність матеріалу;  $\gamma$  – питома електрична провідність матеріалу.

2) Математичне моделювання розподілу електромагнітного поля індукційної кухонної плити потрібно розпочати у двовимірній постановці (значно більш складна тривимірна постановка та відповідне програмне забезпечення можуть бути використані пізніше для уточнення отриманих результатів) у декартовій системі координат. Розрахунок електромагнітного поля доцільно виконувати з використанням векторного магнітного потенціалу  $A$ , який визначається виразом [4, 5]:

$$\mathbf{B} = \text{rot } A\tag{3}$$

та на відміну від векторів  $\mathbf{H}$  та  $\mathbf{B}$  має лише одну (а не дві) просторову компоненту  $A(x,y,t) = A_z(x,y,t)$ . При цьому робиться припущення, що вектор щільності струмів провідності  $\mathbf{J}$  також має лише одну відповідну компоненту, тобто електричний струм у конструкції протікає у напрямку, перпендикулярному перетину конструкції, що розглядається.

Розподіл у просторі та часі єдиної компоненти векторного магнітного потенціалу описується у декартовій системі координат наступним нестационарним рівнянням у часткових похідних [4]:

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_0,\tag{4}$$

де  $J_0$  – щільність струму стороннього джерела.

Оскільки при математичному моделюванні електромагнітного поля в індукційних кухонних плитах розглядається сталий режим роботи плити (струм та електромагнітне поле змінюються у часі за гармонійним законом), рівняння (4) доцільно представити та розв'язувати у комплексній формі [4]:

$$j\omega\gamma\dot{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \right) + \dot{J}_0,\tag{5}$$

де  $j$  – уявна одиниця;  $\omega=2\pi f$  – кругова частота;  $f$  – частота струму в індукторі індукційної плити.

3)Рівняння (5) розв'язується з метою розрахунку просторового розподілу електромагнітного поля у так званій індукторній системі індукційної кухонної плити. За аналогією з промисловими індукційними нагрівачами [6], індукторна система індукційної плити, схематично зображена на рис. 1, складається з наступних конструктивних елементів:

- одновитковий або багатовитковий плоский індуктор 1 (на рис. 1 в якості приклада зображено одновитковий індуктор);
- посуд, що нагрівається, 2;
- магнітопровід 3;
- діелектрик (повітря) 4;
- штучна віддалена границя 5 у діелектрику (повітрі), на якій задано нульові граничні умови для векторного магнітного потенціалу (див. нижче).

Спрощена розрахункова область, зображена на рис. 1, побудована з урахуванням наявної геометричної симетрії конструкції, а також симетричного розподілу електромагнітного поля в ній: віссю симетрії є вертикальна вісь ординат  $Oy$ , отже розрахунок виконується лише для половини індукторної системи, що дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати, необхідні для комп'ютерного розв'язання задачі.

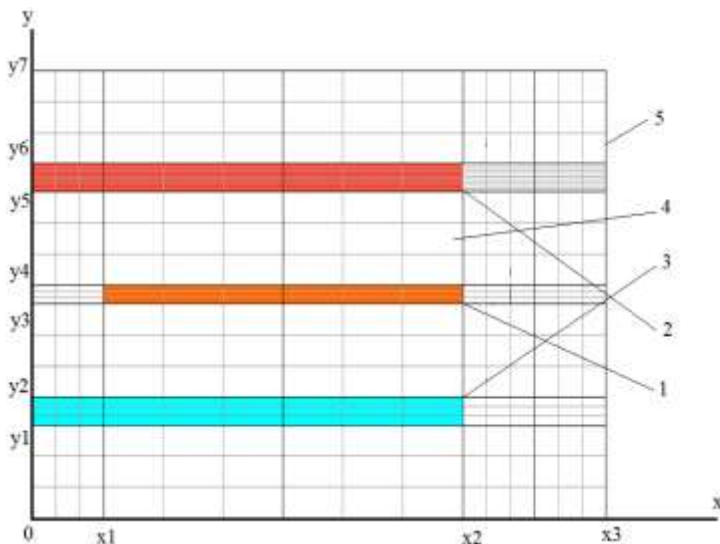


Рис. 1 – Розрахункова модель індукторної системи побутової індукційної плити

4) Рівняння у часткових похідних (5) розв'язується за наступними граничними умовами (див. рис. 1):

- на горизонтальній вісі абсцис  $Ox$ : нульова гранична умова
- $$A = 0, \quad (6)$$

(у припущенні, що електромагнітне поле індуктора 1 повністю екранується феритовим магнітопроводом 3);

- на вертикальній вісі ординат  $Oy$ : природна гранична умова симетрії [4, 7, 8]:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

де  $n$  – зовнішня нормаль до вісі ординат  $Oy$ , отже умова (7) приймає вигляд

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

- на штучних віддалених границях 5 у діелектрику (повітрі) 4: нульові граничні умови (6), що описують згасання електромагнітного поля на достатньо далекій відстані від індуктора 1.

5) Для чисельного розв'язання рівняння (5) потрібно задати у вихідних даних наступні електрофізичні властивості матеріалів конструкції, зображеної на рис. 1:

- величини питомої електричної провідності  $\gamma$  провідникових матеріалів, з яких виготовлено індуктор 1, посуд 2 та магнітопровід 3;

- магнітна проникність  $\mu$  матеріалів:

– величина магнітної проникності матеріалу індуктора 1, який, як правило, виготовляється з міді (іноді з інших немагнітних матеріалів), дорівнює магнітній проникності вакуума:  $\mu = \mu_0$ ;

– для діелектричних матеріалів, враховуючи повітря 4, також  $\mu = \mu_0$ ;

– величина магнітної проникності феромагнітних матеріалів, з яких виготовляють посуд 2 та магнітопровід 3, суттєво нелінійно залежить від напруженості магнітного поля  $H$  [9, 10]. Оскільки посуд, що нагрівається, а також магнітопроводи, що застосовуються в індукційних плитах, виготовляються з магнітом'яких матеріалів, явище магнітного гістерезису при виконанні розрахунків не враховуємо. Для кожного феромагнітного матеріалу у вихідних даних потрібно задати нелінійну основну криву намагнічування  $B(H)$  або безпосередньо залежність магнітної проникності від напруженості магнітного поля  $\mu(H)$ . Для виконання попередніх "оціночних" розрахунків можливо розв'язання лінійної задачі з постійним

(осередненим за кривою намагнічування) значенням магнітної проникності  $\mu = \mu_a = \text{const}$  для кожного магнітом'якого матеріалу.

6) при розв'язанні рівняння (5) в якості правої частини задається величина амплітуди щільності струму відповідної частоти в індукторі.

**Методика чисельного розв'язання задачі.** Сформульовану вище двовимірну задачу комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного поля побутових індукційних плит, що включає рівняння (5) з граничними умовами (6)-(8), доцільно розв'язувати добре розвинутим методом скінчених елементів [7-10]. Відповідні варіаційні формулювання та чисельні процедури докладно описано у [7-10]. Сучасні ефективні ітераційні алгоритми розв'язання нелінійних задач з урахуванням залежності магнітної проникності від напруженості магнітного поля  $\mu(H)$  наведено та детально проаналізовано в [9, 10].

Для комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного поля побутових індукційних плит використовується пакет програм EleFAnT2D, розроблений в Інституті основ та теорії електротехніки Технічного університету м. Грац, Австрія [11]. Можливо також використання іншого програмного забезпечення (наприклад, [8]), призначеного для розрахунку електромагнітних полів у двовимірній постановці.

**Структура вихідних даних для виконання розрахунків.** Для комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного поля побутової індукційної плити, тобто для чисельного розв'язання рівняння (5) з граничними умовами (6)-(8) стосовно розрахункової області, яка зображена на рис. 1, у вихідних даних необхідно задати наступне:

1) геометричні розміри половини конструкції індукторної системи індукційної кухонної плити  $x_1$ ,  $x_2$  та  $y_1$ - $y_6$  (див. рис. 1). Рекомендації щодо вибору відстані  $x_3$  та  $y_7$  до віддаленої границі 5 (див. рис. 1) наведено у [12, 13];

2) величини питомої електричної провідності  $\gamma$  провідникових матеріалів, з яких виготовлено індуктор 1, посуд 2 та магнітопровід 3 (див. рис. 1);

3) магнітні властивості феромагнітних матеріалів, з яких виготовляють посуд 2 та магнітопровід 3 (див. вище); в якості приклада на рис. 2 наведено основну криву намагніченості однієї з магнітом'яких сталей [14];

4) величину амплітуди щільності струму та частоту струму в індукторі 1.

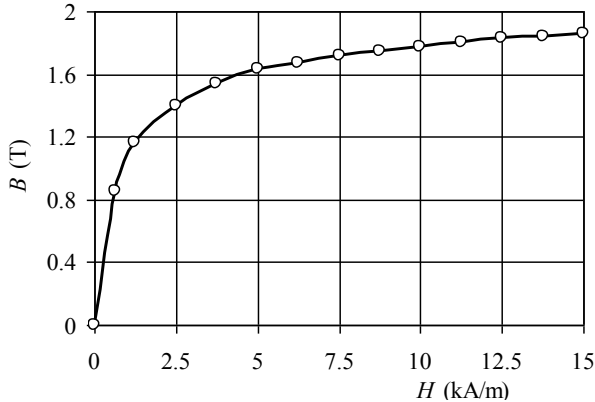


Рис. 2 – Основна крива намагніченості вуглецевої сталі марки CSN 12 040 виробництва Чехії [14]

### Структура результатів обчислень.

1) Безпосередні результати комп'ютерного моделювання – просторовий розподіл комплексного векторного магнітного потенціалу (див. рівняння (5)). Отже, у вузлах просторової скінченоеlementної сітки розрахункової області (див. рис. 1) обчислюються величини дійсної та уявної частин векторного магнітного потенціалу  $A_R(x,y)$  та  $A_I(x,y)$  відповідно, а також його модулю:

$$A(x, y) = \sqrt{A_R^2(x, y) + A_I^2(x, y)}. \quad (9)$$

2) За результатами розрахунку векторного магнітного потенціалу обчислюється просторовий розподіл дійсної та уявної частин, а також модуля просторових компонент  $B_r(x,y)$  та  $B_z(x,y)$  комплексного вектора індукції магнітного поля. Для цього використовується формула (3). Далі, розраховується розподіл відповідних компонент вектора напруженості магнітного поля за формулою:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu. \quad (10)$$

3) Результати, отримані стосовно векторного магнітного потенціалу, дозволяють також розрахувати просторовий розподіл дійсної та уявної частин, а також модуля щільності вихрового струму в посуді, що нагрівається, а також в індукторі та магнітопроводі [8]:

$$\mathbf{J}_e = -j\omega\gamma\mathbf{A}. \quad (11)$$

4) З використанням обчисленого розподілу модуля щільності вихрового струму розраховується щільність теплових втрат (потужність внутрішніх джерел тепла) в посуді, що нагрівається, та в магнітопроводі [8]:

$$Q = \frac{|j_e|^2}{\gamma}, \quad (12)$$

отриманий просторовий розподіл якої в подальшому використовується в якості вихідної інформації для комп'ютерного аналізу теплового стану посуду та магнітопроводу в процесі роботи індукційної плити.

**Виконання розрахунків.** Чисельні дослідження розподілу електромагнітного поля індукційних кухонних плит розпочато під час переддипломної практики студентів кафедри "Електричні апарати" Електромашинобудівного факультету Національного технічного університету "ХПІ" в Інституті основ та теорії електротехніки Технічного університету м. Грац, Австрія з використанням пакета програм EleFAnT2D [11], розробленого у зазначеному Інституті. Виконання розрахунків планується продовжити на кафедрі "Електричні апарати" Національного технічного університету "ХПІ" за допомогою вказаного програмного забезпечення, люб'язно наданого розробниками. Отримані результати комп'ютерного моделювання будуть проаналізовані в наступних роботах.

**Висновки.** У роботі побудовано математичну модель та методику чисельного аналізу розподілу електромагнітного поля індукційної кухонної плити у двовимірній постановці методом скінчених елементів. Враховуються магнітні властивості феромагнітних матеріалів магнітопроводу індукційної плити та посуду, що нагрівається, а також інші особливості фізичних процесів у конструкціях, що розглядаються. Детально розглянуто структуру вихідних даних та результатів обчислень. Отримані результати розрахунків будуть проаналізовані в наступних роботах.

**Список літератури:** 1. TechNOVO. Web. <http://technovo.com.ua/shop/category/plity-indukcionnye-nastolnye/?gclid=CfuHsNC3tbwCFdShtAodAG4Acw>. 2. Ebay. Web. <http://www.ebay.de/bhp/induktionskochfeld>. 3. Пантелят М.Г., Гуренцов Ю.В., Трофімов А.В. Методика розрахунку індукторів індукційних кухонних плит // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2014. – № 20(1063). – С. 13-24. 4. Демирчян К.С. Моделирование магнитных полей. – Л.: Энергия, 1974. – 288 с. 5. Biró O., Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents // IEEE Transactions on Magnetics. – 1989, v. 25, No. 4. – P. 3145-3159. 6. Кувалдин А.Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 200 с. 7. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с. 8. Pantelyat M.G., Féliachi M. Magneto-thermo-elastic-plastic simulation of inductive heating of metals // The European Physical Journal Applied Physics. – 2002. – v. 17. – P. 29-33. 9. Biró O., Preis K., Richter K.R. Various FEM formulations for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media // IEEE Transactions on Magnetics. – 1995, v. 31, No. 3. – P. 1307-1312. 10. Pantelyat M.G. Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1999, v. 10. – P. 185-192. 11. Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik. Web. <<http://www.igte.tugraz.at/de/elefant/elefant.html>>. 12. Pantelyat M.G. New boundary conditions in FEM solution of 2D quasi-static electromagnetic fields //



Electromagnetic Fields in Electrical Engineering. Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics. – Amsterdam: IOS Press, 2002. – v. 22. – P. 122-125. **13.** Пантелят М.Г. Анализ осесимметричных квазистационарных элеткромагнитных полей с использованием граничных условий третьего рода // Технічна електродинаміка. – 2003, №6. – С. 17-20. **14.** Doležel I., Karban P., Mach F. Induction heating of rotating nonmagnetic billet in magnetic field produced by high-parameter permanent magnets // Електротехніка і електромеханіка. – 2014. – № 2. – С. 32-36.

**Bibliography (transliterated):** **1.** TechNOVO. Web. <<http://technovo.com.ua/shop/category/plity-indukcionnye-nastolnye/?gclid=CluHsNC3tbwCFdShtAodAG4Acw>>. **2.** Ebay. Web. <<http://www.ebay.de/bhp/induktionskochfeld>>. **3.** Pantelyat M.H., Hurentsov Yu.V., Trofimov A.V. Metodyka rozrakhunku induktoriv induktsiynykh kukhonnnykh plyt. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Problemy udoskonalennya elektrychnykh mashyn i aparativ. Teoriya i praktyka.* Kharkov: NTU "KhPI", 2014. No 20(1063). 13-24. Print. **4.** Demirchjan K.S. Modelirovanie magnitnyh polej. – Leningrad: Jenergiya, 1974. 288 p. Print. **5.** Biró O., Preis K. "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents". *IEEE Transactions on Magnetics.* 1989, Vol. 25, No. 4. 3145-3159. Print. **6.** Kuvaldin A.B. Indukcionnyj nagrev ferromagnitnoj stali. MMoscow: Energoatomizdat, 1988. Print. **7.** Sil'vester P., Ferrari R. Metod konechnykh jelementov dlja radioinzhenеров i inzhenerov-elektrikov. – Moscow: Mir, 1986. – 229 p. Print. **8.** Pantelyat M.G., Féliachi M. "Magneto-thermo-elastic-plastic simulation of inductive heating of metals". *The European Physical Journal Applied Physics.* 2002. Vol. 17. P. 29-33. Print. **9.** Biró O., Preis K., Richter K.R. "Various FEM formulations for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media". *IEEE Transactions on Magnetics.* 1995, Vol. 31, No. 3. 1307-1312. Print. **10.** Pantelyat M.G. "Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials". *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics.* 1999, Vol. 10. 185-192. Print. **11.** Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik. Web. <<http://www.igte.tugraz.at/de/elefant/elefant.html>>. **12.** Pantelyat M.G. "New boundary conditions in FEM solution of 2D quasi-static electromagnetic fields". *Electromagnetic Fields in Electrical Engineering. Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics.* Amsterdam: IOS Press, 2002. Vol. 22. 122-125. Print. **13.** Panteljat M.G. "Analiz osesimmetrichnyh kvazistacionarnykh jeletkromagnitnyh polej s ispol'zovaniem granichnyh uslovij tret'ogo roda". *Technical electrodyamics.* 2003, No. 6. 17-20. Print. **14.** Doležel I., Karban P., Mach F. "Induction heating of rotating nonmagnetic billet in magnetic field produced by high-parameter permanent magnets". *Electrical Engineering & Electromechanics.* 2014. No. 2. 32-36. Print.

Надійшла (received) 15.09.14



**Пантелят Михайло Гаррійович**, старший викладач кафедри "Електричні апарати" Національного технічного університету "ХПІ". В 1985 р. закінчив Харківський політехнічний інститут за спеціальністю "Інженерна електрофізика". Кандидат фізико-математичних наук (1991 р., спеціальність "Механіка деформівного твердого тіла"). Основні наукові інтереси: комп'ютерне моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів в електромагнітних пристроях різного призначення.



**Гуренцов Юрій Володимирович**, студент електромашинобудівного факультету Національного технічного університету "ХПІ", група ЕМБ-20АМ. Область інтересів – дослідження, розрахунок і проектування сучасної електрообутової техніки.