УДК 519.6

Л. Б. КАЩЕЕВ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»,
И. Г. ПАРХАТСКАЯ, студентка НТУ «ХПИ»,
С.Н. КОВАЛЕНКО, ХНТУСХ им. П. Василенко

ПОИСК КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ СНИМАЕМЫХ «ПРОБОК» В ВЕРШИНАХ ГРАФА

В статье предлагаются методы нахождения кратчайшего пути на графе в условиях частичной проходимости вершин. Предложенное решение представляет собой модификацию жадного алгоритма и алгоритма Дейкстра.

У статті пропонуються методи знаходження найкоротшого шляху на графі в умовах часткової прохідності вершин. Запропоноване рішення є модифікацією жадібного алгоритму і алгоритму Дейкстра.

In clause the methods of a presence(finding) of the shortest way on the column in conditions of partial passableness of tops are offered. The offered decision represents updating greedy algorithm and algorithm Dijkstra.

Постановка задачи. Дан неориентированный связный взвешенный граф без кратных ребер. Среди m вершин графа выделено две – A и B, между которыми предстоит построить маршрут минимального веса. Граф двухроматический – его вершины относятся к двум подмножествам – проходимые вершины (на рисунке белого цвета) и непроходимые (на рисунке черного цвета). Через «пробку» проведения маршрута невозможно, но не следует рассматривать такую вершину как полный разрыв маршрута: при проведении маршрута от A к B по условию можно удалить k пробок, сделав этот участок графа проходимым. Требуется провести кратчайший маршрут от A к B, сняв при этом не более k пробок. В принципе, возможна ситуация, когда вообще нельзя построить маршрут от A к B, снимая k или менее пробок.

Описание алгоритма. Рассмотрим решение задачи на пример графа, представленного на рис. 1, по мере рассмотрения будут отмечены аспекты решения задачи в общем виде. Число пробок, которые можно снять при построении маршрута возьмем равным двум (k=2).

Начнём построение дерева путей из вершины A (на графе это $Г_1$).

Шаг 1. Введём для записи маршрута следующие обозначения:

$$M_{1,2}=(0,\ 1\text{-}2,\ 0);\ V_{1,2}=1.$$

Нижний индекс маршрута включает последовательность номеров всех пройденных вершин (в данном случае пока вершины $Г_1$ и $Г_2$), в скобках через запятую перечислены вершины (проходимая – 0, «пробка» – 1). Суммарный вес маршрута имеет такой же индекс, как и сам маршрут – перечень пройденных вершин. Вес каждого ребра – 1, т.е. решается задача на минимизацию количества пройденных ребер, алгоритм вполне работоспособен и для идеальных весов ребер. Вес проходимой вершины – 0, вес пройденной «пробки» - некая константа на порядок большая, чем суммарный вес ребер в графе. Формируем два списка:

- список просмотренных вершин $S_{просм}$=(1);
- список «замеченных» при просмотре вершин $S_{замеч}$=(2).

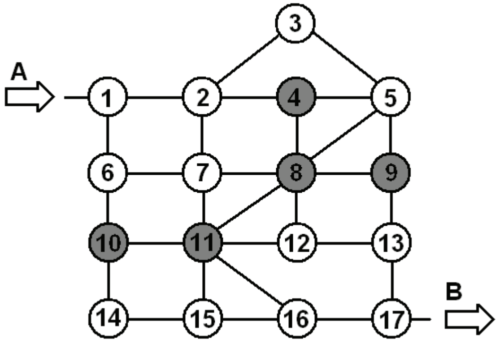

Рис. 1. Пример сети (граф с проходимыми вершинами и «пробками»)

Но из вершины $Г_1$ возможен маршрут не только в $Г_2$, но и в вершину $Г_6$. Так что выполняем те же действия и для того направления:

M1,6=(0, 1-6, 0); V1,6=1; $S_{просм}$.=(1); $S_{замеч}$.=(2,6).

В данном случае все ребра из вершины 1 просмотрены, и мы включаем вершину 1 в список уже просмотренных вершин.

Шаг 2. Просмотр вершины $Г_2$.

$M_{1,2,3}$=(0, 1-2, 0, 2-3, 0); $V_{1,2,3}$=2.

$M_{1,2,4}$=(0, 1-2, 0, 2-4, 1); $V_{1,2,4}$=102; $S_{просм.}$=(1,2); $S_{замеч}$=(6,3,4).

Обратим внимание, что вершина 2 просмотрена и перешла из списка замеченных вершин в список просмотренных. Маршрут $M_{1,2,4}$ проходит через «пробку», потому в списке элементов маршрута стоит 1, а вес добавлено 100. Важный момент алгоритма: он рассматривает все смежные вершины графа. Т.е. следовало бы вести маршрут $M_{1,2,1}$, но, судя по списку индексов, у маршрута вершина $Г_1$ – это пункт, откуда мы прибыли и ее рассматривать нецелесообразно. В отличие от алгоритма Дейкстра здесь приходится вести маршруты в уже просмотренные вершины. Поясним это примером на рис.2. Для графа в этом примере, если б мы исключили все просмотренные

вершины, то вершины $Г_6$ была бы просмотрена раньше $Г_7$, был бы получен кратчайший маршрут $M_{1,3,6}$, но с одной пробкой, а более длинный маршрут без пробки $M_{12,3,5,7,6}$ не строился б, поскольку вершина $Г_6$ рассмотрена ранее и не включалась бы в последующие маршруты. Эти рассуждения справедливы только для графов с «обычными» проходимыми вершинами. В нашей же задаче выбор маршрута 1-3-6… может привести к превышению количества допустимо снимаемых «пробок». Поэтому следует в качестве промежуточных пунктов маршрутов примерять и уже просмотренные вершины. Для графа на рис.2 в дальнейшем рассмотрении примут участие оба варианта маршрута – и 1-3-6…, и 1-2-4-5-7-6… В зависимости от того, укладывается ли число снятых «пробок» в заданное k? Будет выбран тот или иной участок маршрута.

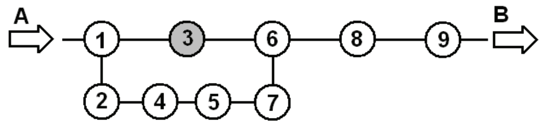

Рис. 2. Пример двух маршрутов – с «пробкой» и без

Таким образом, каждой вершине фактически может быть приписан список маршрутов, по которым она может быть достигнута из стартовой точки. Программно можно не приписывать вершинам графа списки, а хранить их в едином списке маршрутов, контролируя их вес (а, следовательно, и число «пробок»), первый и последний индекс при M.

Шаг 3. Просмотр вершины $Г_6$ (при выборе очередной вершины для просмотра принцип first-in-first-out)

M1,6,7=(0, 1-6, 0, 6-7, 0); V1,6,7=2. M1,6,10=(0, 1-6, 0, 6-10, 1); V1,6,10=102;

$S_{просм.}$=(1,2,6); $S_{замеч}$=(3,4,7,10).

Шаг 4. Просмотр вершины $Г_3$.

$M_{1,2,3,5}$=(0, 1-2, 0, 2-3, 0, 3-5, 0); $V_{1,2,3,5}$=3;

$S_{просм.}$=(1,2,6,3); $S_{замеч}$=(4,7,10,5).

Шаг 5. Просмотр вершины $Г_4$.

$M_{1,2,4,5}$=(0, 1-2, 0, 2-4, 1, 4-5, 0); $V_{1,2,4,5}$=103.

$M_{1,2,4,8}$=(0, 1-2, 0, 2-4, 1, 4-8, 0); $V_{1,2,4,8}$=103;

$S_{просм.}$=(1,2,6,3,4); $S_{замеч}$=(7,10,5,8).

Маршрут $M_{1,2,4,5}$ отбрасываем и более на рассматриваем – он приводит нас к вершине 5, но при этом требует снятия одной «пробки». В эту же вершину мы можем попасть маршрутом $M_{1,2,3,5}$. Количество снятых «пробок» легко отслеживается путем целочисленного деления на выбранную константу – «вес пробки» (в данном примере 100).

Шаг 6. Просмотр вершины $Г_7$.

$$M_{1,6,7,8}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1);\ V_{1,6,7,8}=103.$$

$$M_{1,6,7,11}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1);\ V_{1,6,7,11}=103;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7);\ S_{замеч}=(10,5,8,11).$$

Шаг 7. Просмотр вершины $Г_{10}$.

$$\underline{M}_{1,6,10,11}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}10,\ 1,\ 10\text{-}11,\ 1);\ V_{1,6,10,11}=203.$$

Маршрут $M_{1,6,10,11}$ отбрасываем и более не рассматриваем, поскольку у нас есть маршрут $M_{1,6,7,11}$ равного веса ребер, но с меньшим числом «пробок». Если сравнивать их веса, то $V_{1,6,10,11}=203$, а $V_{1,6,7,11}=103$, следовательно, $M_{1,6,7,11}$ при одинаковом количестве ребер требует снятия на одну «пробку» меньше. Отброшенные маршруты помечаем подчеркнутым шрифтом.

$$M_{1,6,10,14}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}10,\ 1,\ 10\text{-}14,\ 0);\ V_{1,6,10,14}=103;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10);\ S_{замеч}=(5,8,11,14).$$

Шаг 8. Просмотр вершины $Г_5$.

$$\underline{M}_{1,2,3,5,8}=(0,\ 1\text{-}2,\ 0,\ 2\text{-}3,\ 0,\ 3\text{-}5,\ 0,5\text{-}8,1);\ V_{1,6,10,11}=104;$$

В данном случае маршрут $M_{1,2,3,5,8}$ отбрасываем, поскольку у нас есть вариант с весом 103 – $M_{1,2,3,5}$ (был еще вариант маршрута через «пробку» $M_{1,2,4,8}$, но мы его отбросили еще на пятом шаге).

$$M_{1,2,3,5,9}=(0,\ 1\text{-}2,\ 0,\ 2\text{-}3,\ 0,\ 3\text{-}5,\ 0,5\text{-}9,1);\ V_{1,6,10,14}=104;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5);\ S_{замеч}=(8,11,14,9).$$

Шаг 9. Просмотр вершины $Г_8$.

$$\underline{M}_{1,6,7,8,5}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,8\text{-}15,0);\ V_{1,6,7,8,15}=104;$$

Есть маршрут $M_{1,2,3,5}$ весом $V_{1,2,3,5}=3$, полученный на четвертом шаге (на ребро меньше и без «пробки»). Потому $\underline{M}_{1,6,7,8,5}$ отбрасываем.

$$\underline{M}_{1,6,7,8,9}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,8\text{-}9,1);\ V_{1,6,7,8,9}=204.$$

Маршрут $\underline{M}_{1,6,7,8,9}$ равен по числу ребер маршруту $M_{1,2,3,5,9}$,но $\underline{M}_{1,6,7,8,9}$ проходит через две вершины-«пробки», тогда как $M_{1,2,3,5,9}$ – только через одну. $\underline{M}_{1,6,7,8,9}$ Отбрасываем.

$$M_{1,6,7,8,11}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,8\text{-}11,1);\ V_{1,6,7,8,11}=204;$$

$$M_{1,6,7,8,12}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,0,7\text{-}8,1,8\text{-}12,0);\ V_{1,6,7,8,12}=104;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8);\ S_{замеч}=(11,14,9,12).$$

Шаг 10. Просмотр вершины $Г_{11}$.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,8}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,11\text{-}8,1);\ V_{1,6,7,11,8}=204.$$

На шестом шаге получен $M_{1,6,7,8}$, весом $V_{1,6,7,8}=103$. Потому $\underline{M}_{1,6,7,11,8}$ отбрасываем.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,10}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,11\text{-}10,1);\ V_{1,6,7,11,10}=204.$$

На третьем шаге получен $M_{1,6,10}$,весом $V_{1,6,10}=102$. Потому $\underline{M}_{1,6,7,11,10}$ отбрасываем.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,12}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,11\text{-}12,0);\ V_{1,6,7,11,12}=104.$$

Маршрут $\underline{M}_{1,6,7,11,12}$ по числу ребер и «пробок» равен маршруту $M_{1,6,7,8,12}$. А поскольку он «не лучше» уже найденного, то мы более его не рассматриваем.

$$M_{1,6,7,11,15}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,11\text{-}15,0);\ V_{1,6,10,15}=104;$$

$$M_{1,6,7,11,16}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,0,7\text{-}11,1,11\text{-}16,1);\ V_{1,6,10,14,16}=204;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11);\ S_{замеч}=(14,9,12,15,16).$$

Шаг 11. Просмотр вершины $Г_{14}$.

$$\underline{M}_{1,6,10,14,15}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}10,\ 1,\ 10\text{-}14,\ 0,\ 14\text{-}15,\ 0);\ V_{1,6,10,14}=104;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14);\ S_{замеч}=(9,12,15,16).$$

Этот просмотр не добавляет вершин в список «замеченных», кроме того $\underline{M}_{1,6,10,14,15}$, имеет такой же вес, как и $M_{1,6,7,11,15}$, то есть он не улучшает решения, а потому отбрасывается.

Шаг 12. Просмотр вершины $Г_9$.

$$\underline{M}_{1,2,3,5,9,8}=(0,\ 1\text{-}2,\ 0,\ 2\text{-}3,\ 0,\ 3\text{-}5,\ 0,\ 5\text{-}9,\ 1,\ 9\text{-}8,\ 1);\ V_{1,2,3,4,9,13}=204.$$

На шестом шаге получен $M_{1,6,7,8}$, весом $V_{1,6,7,8}=103$. Потому $\underline{M}_{1,2,3,5,9,8}$ отбрасываем.

$$M_{1,2,3,5,9,13}=(0,\ 1\text{-}2,\ 0,\ 2\text{-}3,\ 0,\ 3\text{-}5,\ 0,\ 5\text{-}9,\ 1,\ 9\text{-}13,\ 0);\ V_{1,2,3,4,9,13}=105;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14,9);\ S_{замеч}=(12,15,16,13).$$

Шаг 13. Просмотр вершины $Г_{12}$.

$$\underline{M}_{1,6,7,8,12,11}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,\ 8\text{-}12,\ 0,\ 12\text{-}11,\ 1);\ V_{1,6,7,8,12,11}=205.$$

На шестом шаге получен $M_{1,6,7,8}$, весом $V_{1,6,7,8}=103$. Потому $\underline{M}_{16,7,8,12,11}$ отбрасываем.

$$\underline{M}_{1,6,7,8,12,13} = (0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,\ 8\text{-}12,\ 0,\ 12\text{-}13,\ 0);\ V_{1,6,7,8,12,13}=105;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14,9,12);\ S_{замеч}=(15,16,13).$$

Маршрут $\underline{M}_{1,6,7,8,12,13}$ равен по весу маршруту $M_{1,2,3,5,9,13}$, полученному на двенадцатом шаге, решение не лучше и из рассмотрения исключается.

Шаг 14. Просмотр вершины $Г_{15}$.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,15,14}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,\ 11\text{-}15,\ 0,\ 15\text{-}14,\ 0);\ V_{1,6,7,11,15,14}=105.$$

На седьмом шаге получен $M_{1,6,10,14}$, весом $V_{1,6,10,14}=103$. Поэтому $\underline{M}_{1,6,7,11,15,14}$ отбрасываем.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,15,16} = (0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,\ 11\text{-}15,\ 0,\ 15\text{-}16,\ 1);\ V_{1,6,7,11,15,16}=205;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14,9,12,15);\ S_{замеч}=(16,13).$$

Этот маршрут на одно ребро больше, чем маршрут $M_{1,6,7,11,16}$ (соответственно вес 205 больше 204), из решения исключается.

Шаг 15. Просмотр вершины $Г_{16}$.

$$M_{1,6,7,11,15,16,11}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,\ 11\text{-}15,\ 0,\ 15\text{-}16,\ 1,\ 16\text{-}11,\ 1);$$

Поскольку вершина $Г_{11}$ уже встречалась на маршруте, то есть получен цикл, что не соответствует определению маршрута на графе, то мы ее не рассматриваем.

$$\underline{M}_{1,6,7,11,15,16,17}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}11,\ 1,\ 11\text{-}15,\ 0,\ 15\text{-}16,\ 1,\ 16\text{-}17,0);$$

$$V_{1,6,7,11,15,16,17}=206;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14,9,12,15);\ S_{замеч}=(13,17).$$

Шаг 16. Просмотр вершины $Г_{13}$.

$$\underline{M}_{1,6,7,8,12,13,9} = (0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,\ 8\text{-}12,\ 0,\ 12\text{-}13,\ 0,\ 13\text{-}9,\ 1);\ V_{1,6,7,8,12,13,9}=206;$$

На восьмом шаге получен $M_{1,2,3,5,9}$, весом $V_{1,2,3,5,9}=104$. Потому $\underline{M}_{1,6,7,8,12,13,9}$ отбрасываем.

$$M_{1,6,7,8,12,13,17}=(0,\ 1\text{-}6,\ 0,\ 6\text{-}7,\ 0,\ 7\text{-}8,\ 1,\ 8\text{-}12,\ 0,\ 12\text{-}13,\ 0,\ 13\text{-}17,\ 0);$$

$$V_{1,6,10,11,15,16,17}=106;$$

$$S_{просм.}=(1,2,6,3,4,7,10,5,8,11,14,9,12,15,13);\ S_{замеч}=(17).$$

Полученный маршрут $M_{1,6,7,8,12,13,17}$ на одну «пробку» меньше полученного на пятнадцатом шаге $\underline{M}_{1,6,7,11,15,16,17}$, потому отбрасываем старый маршрут $M_{1,6,7,11,15,16,17}$.

Шаг 17 (последний). Поскольку в списке не просмотренных вершин осталась только вершина семнадцать, задача считается решенной. Решение - маршрут, доведенный до семнадцатой вершины: $M_{1,6,7,8,12,13,17}$. Маршрут имеет вес 106 – включает шесть ребер и требует прохождения через одну «пробку».

Выводы. Предложенный алгоритм, в принципе, не определяет всех оптимальных маршрутов, а лишь находит количество ребер и снятых «пробок» на оптимальном маршруте и предлагает пример одного из таких маршрутов. Процесс поиска числа ребер и «пробок» на оптимальном маршруте изобразим деревом решений, имеющим явную аналогию с «методом ветвей и границ».

Список литературы: ***1.*** Тябин К. Лабиринт // Наука и жизнь.– 1989.– № 7.– С. 64. ***2.*** Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб. .– М. .– Харьков: Питер.– 2001.– С. 304

Поступила в редколлегию 05.02.09