

УДК 681.3.06

Л.Б.КАЩЕЕВ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»,
Я.А.ЗАХАРОВА, студент НТУ «ХПИ»

РАЗРАБОТКА СИСТЕМ МАШИНОЙ ГРАФИКИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО ПОСТРОЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

У статті проілюстрована подібність деяких кривих з формами природних об'єктів. Пропонується оптимальний метод знаходження схожості з формами найбільш поширених квітів і листя.

В статье проиллюстрировано подобие некоторых кривых с формами природных объектов. Предлагается оптимальный метод нахождения сходства с формами наиболее распространенных цветов и листьев.

In the article similarity of some curves is illustrated with the forms of natural objects. The optimum method of finding of likeness with the forms of the most widespread flowers and leaves is offered.

Постановка задачи. Мир природы демонстрирует нам калейдоскоп разнообразия и неповторимости форм объектов. Особенно в растительном мире легко проследить целесообразность той или иной формы стебля, ствола или листьев – всякое тело стремится принять такую форму, при которой оно обеспечивает минимум энергии его поверхности, совместимую с ориентирующими силами.

Симметрия порождающей среды, в которой образуется тело, накладывается на симметрию тела. Получающаяся при этом форма тела

сохраняет те элементы собственной симметрии, которые совпадают с наложенными на него элементами симметрии среды.

И все же формы и цвета живой природы не во всем соответствуют принципу биологической целесообразности, а во многом следуют общим закономерностям гармонии, выявляющимся путем строгого математического анализа.

Сходство формы некоторых кривых с представителями царства растений было замечено еще древнегреческими математиками. Однако ученые того времени прикладывали колоссальные усилия для вывода уравнений кривых, пытаясь повторить формы природных объектов. С развитием компьютерной эпохи просчет коэффициентов и вывод формул облегчен в десятки, а то и сотни раз по трудоемкости и временным ресурсам.

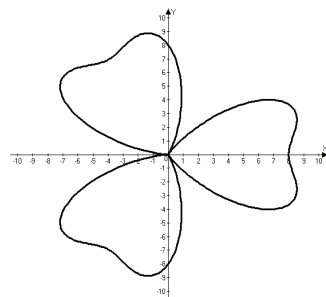
Анализ известных кривых. Сходство формы природных объектов с аналитическими кривыми отмечено исследователями еще до эпохи применения методов компьютерной графики, которые позволили отказаться от индивидуального творческого труда по перебору кривых в пользу итерационного подбора известных формул кривых, отражающих формы наиболее популярные цветов, листьев растений и т.д.

На рис. 1. представлена «Кислица обыкновенная» (еще ее называют трилистником).

Если написать уравнение: $\rho = 4(1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi)$



а)



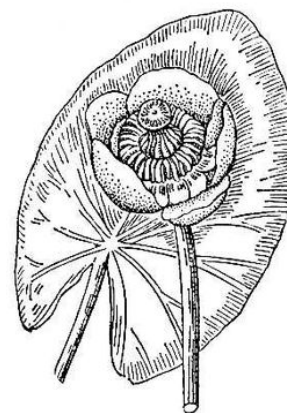
б)

Рис.1. Кислица обыкновенная (а), трилистник (б)

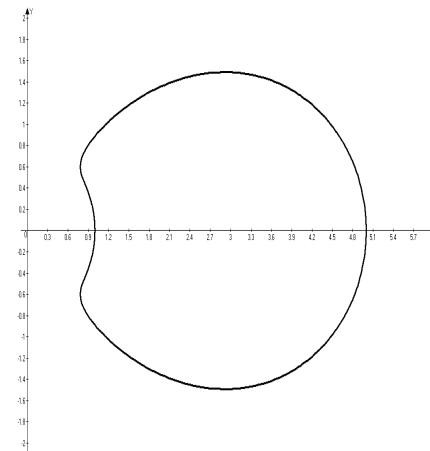
Построенное в полярной системе координат, оно дает кривую, которая в точности воспроизводит формулу листа кислицы (рис.1, б).

Так же похожи очертания «Кубышки желтой» (кувшинки), изображенной на рис. 3, и овала Мюнстера на рис. 4. Эта кривая шестого порядка со сложным уравнением:

$$(x^2 + y^2)^3 - 2ax^3(x^2 + y^2) + (a^2 - r^2)x^4 = 0$$



а)



б)

Рис.2. Кувшинка (а), Овал Мюнстера (б)

Интерес к изучению кривых, утраченный во время средневековья, возродился с открытием метода координат (основы этого метода были изложены Рене Декартом в 1637 году в книге «Геометрия»), который привел к единообразному способу символического задания кривых соответствующими им уравнениями и подготовил открытие анализа бесконечно малых. Новый математический аппарат создал новые возможности для изучения кривых. Многочисленные проблемы механики, астрономии, геодезии, оптики, возникшие в XVII-XVIII веках, стимулировали интерес крупнейших математиков к изучению кривых.

Сам Декарт, применяя метод координат, исследовал кривую, которая получила название «Лепесток жасмина» (рис.5). Уравнение этой кривой:

$$x^2 + y^3 = 3axy$$

Название «Лепесток жасмина» в современной литературе вытеснено другим. Теперь эту кривую называют «Декартов лист» [1].

В XVIII веке итальянский геометр Г.Гранди сделал попытку изобразить уравнения внешние очертания цветов. Семейство кривых, исследуемых Гранди, получило в математике название роз, хотя по виду эти кривые больше напоминают цветы из семейства сложноцветных.

Весь этот «букет» может быть выражен в полярных координатах уравнением:

$$\rho = a \sin k\varphi,$$

где a и k - постоянно положительные числа. Задавая различными значениями числа k , можно получать «цветки» с любым количеством лепестков. Величина a определяет длину лепестка.

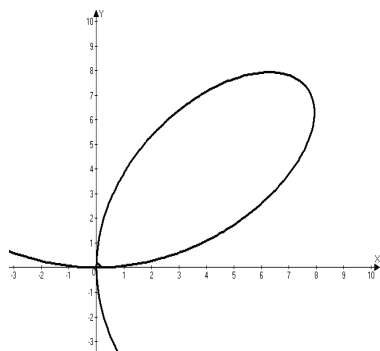


Рис.3. Декартов лист

Задавая различные значения числа k , можно получать «цветки» с любым количеством лепестков (рис. 4).

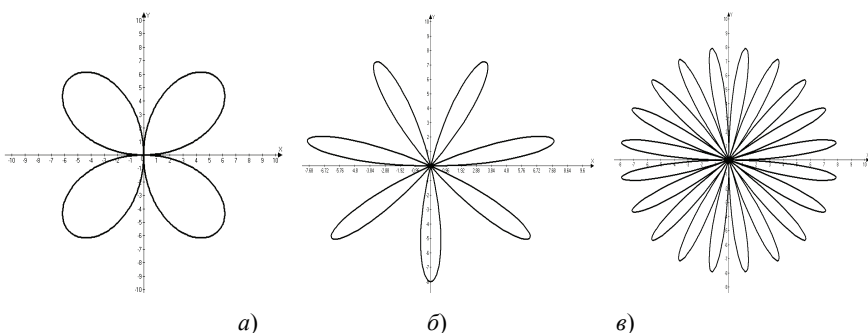


Рис.4. "Роза" при $k = 2$ (а), при $k = 7$ (б), при $k = 10$ (в)

Математическим исследованием формулы цветов и листьев занимался также немецкий геометр Л.Хабенихт. Результаты его исследований опубликованы в сочинении «Аналитические формы листьев» листьев клена, шавеля, ивы. Именно им предложено уравнение формы листа кислицы, график которого показан на рис.1, б. Вот еще одно из уравнений Хабенихта – лист плюща:

$$\rho = 3\left(1 + \cos^2 \varphi\right) + 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 3\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$$

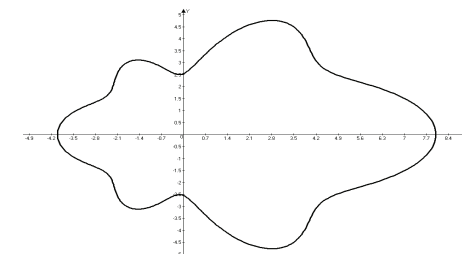


Рис. 5. Лист плюща

Расположение семян растений тоже не раз служило темой математических исследований. Например, установлено, что в корзинке подсолнуха (рис. 6.) семечки расположены по характерным дугам логарифмической спирали. В полярной системе координат логарифмическая спираль выражается уравнением типа $S = a\varphi$, где a – произвольное положительное число. Если $a < 1$, спираль закручивается вокруг центра против часовой стрелки, при $a > 1$ – по часовой стрелке.

Изучение всех этих кривых сыграло немалую роль в развитии математики и техники. Однако эпоха компьютерных технологий позволяет оптимизировать построение множества кривых и с помощью итерационного перебора коэффициентов сопоставлять с природной формой объекта. Это значительно экономит временные ресурсы [2].

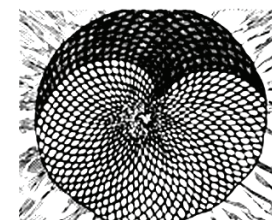


Рис.6. Соцветие подсолнуха

Пример сопоставления кривой с формой листа. Для примера рассмотрим улитку Паскаля (кардиоиду), уравнение которой в полярной системе координат имеет вид:

$$\rho = 2r(1 - \cos \varphi)$$

Варьируя коэффициентом при $\cos(\varphi)$, назовем его условно (a), получаем семейство кривых, отображающее различные формы листьев растений. Отметим прямую зависимость влияния этого коэффициента на степень вогнутости листа (рис. 8).

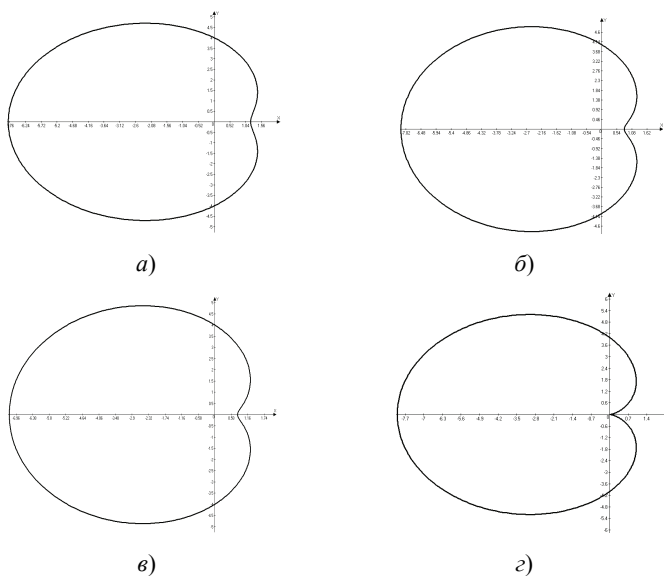


Рис. 8. Кардиоиды при $a = 0.6$ (а), $a = 0.7$ (б), $a = 0.8$ (в), $a = 1$ (г)

Сопоставим эту кривую с наиболее похожим природным объектом растительного мира, например, листом кувшинки (Рис.9).

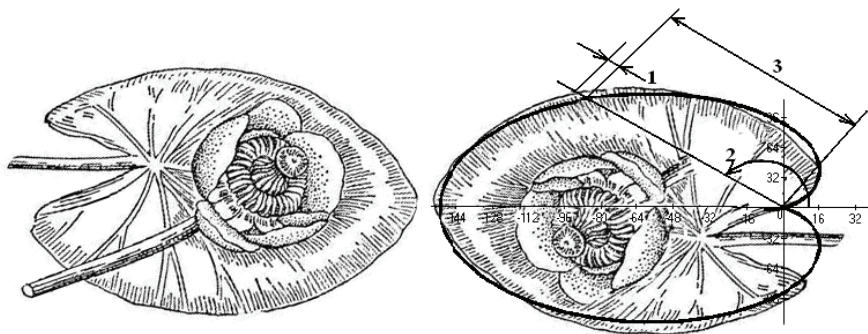


Рис. 9. Сопоставление листа кувшинки с кардиоидой

На рис. 9 обозначено единицей отклонение $-\Delta\rho$, 2 – угол радиус-вектора $-\varphi$, а 3 показывает радиус-вектор $-\rho(\varphi)$.

Проведя N радиус-векторов, находим отклонение полученной кривой от живого очертания формы листка при помощи метода наименьших квадратов.

Выводы. Таким образом, итерационно меняя соответствующие параметры семейства кривых, получаем возможность нахождения оптимального сходства форм с наиболее распространенными цветами, листьями, что дает возможность последующего воспроизведения на обоях, плитке на обложках тетрадей, отказавшись от индивидуальной работы.

Список литературы: 1. Гильде В. Зеркальный мир. – М.: «Мир», 1982. 2. Макушев А.И. Замечательные кривые. – М.: «Наука», 1978.

Поступила в редколлегию 17.02.09