УДК 519.681

О.В.СЕРАЯ, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Запропоновано метод отримання Парето-оптимальної безлічі розв'язань транспортної задачі по критеріях «сумарна вартість – максимальний час перевезень», яка забезпечує вибір компромісного розв'язання.

Предложен метод получения Парето-оптимального множества решений транспортной задачи по критериям «суммарная стоимость – максимальное время перевозок», которое обеспечивает выбор компромиссного решения.

The method of receipt Pareto - optimum great number of decisions of a transport task which provides the choice of compromise decision on criteria a «total cost - maximal time of transportations» is offered.

Введение. В практике планирования и организации транспортировок грузов традиционно используются две разные математические модели: транспортная задача по критерию стоимости (при этом минимизируется суммарная стоимость перевозок) и транспортная задача по критерию времени (при этом минимизируется максимальная из продолжительностей перевозок). Эти задачи альтернативны в том смысле, что их оптимальные планы, как правило не совпадают (кратчайший по времени маршрут не обязательно самый дешевый). Технологии решения этих задач хорошо отработаны [1-3] и конструктивно учитывают специфику и особенности постановок каждой из них. По этой причине они принципиально различны и их объединение в единую вычислительную процедуру очень проблематично. Вместе с тем при решении практических задач транспортной логистики возникает потребность в решении, например, таких задач: а) найти план перевозок, минимизирующий суммарную стоимость перевозок при условии, что наибольшая продолжительность из них не превосходит заданную; б) найти план транспортировок, минимизирующий максимальную из продолжительностей перевозок, при условии, что их суммарная стоимость не превосходит заданную. Разработка метода решения таких задач представляет теоретический и практический интерес.

Цель статьи - разработка технологии отыскания компромиссного решения транспортных задач линейного программирования по критериям – суммарная стоимость и максимальная продолжительность транспортировки.

Постановка задачи. Пусть имеется m центров – поставщиков груза и n центров его потребления. При этом заданы:

a_i - объем груза, который нужно перевезти от i -го поставщика;

b_j - объем груза, который нужно привезти к j -му потребителю;

c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю;

t_{ij} - продолжительность соответствующей транспортировки.

Введем набор $X = (x_{ij})$, где

x_{ij} - объем груза, планируемого для перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Сформулируем критерии эффективности плана транспортировок X:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} , \qquad (1)$$

$$T(X) = \max_{i,j}\{t_{ij} \cdot \delta(x_{ij})\}, \qquad (2)$$

$$\delta(x_{ij}) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_{ij} = 0, \\ 1, \text{ если } x_{ij} > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Искомый план транспортировок должен удовлетворять ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \; i = 1,2,...,m , \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \; j = 1,2,...,n , \qquad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 , \; i = 1,2,...,m , \; j = 1,2,...,n . \qquad (6)$$

При этом предполагается, что выполняется условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

и, кроме того, продолжительность транспортировки от i-го поставщика к j-му потребителю не зависит от объема перевозки x_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Поставим задачу разработки метода отыскания плана транспортировок $X = (x_{ij})$, удовлетворяющего ограничениям (4) – (6) и компромиссно минимизирующего критерии (1), (2).

Основные результаты. Рассмотрим следующую итерационную процедуру решения задачи.

Итерация 1. С использованием стандартных методов решается транспортная задача по критерию стоимости:

найти план $X = (x_{ij})$, минимизирующий (1), удовлетворяющий ограничениям (4) – (6) и, кроме того, дополнительному ограничению

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}^{(1)} , \qquad (7)$$

$$h_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 0, \; t_{ij} > t_{\max}^{(1)} = \max\limits_{i,j}\{t_{ij}\}, \\ M, \; t_{ij} \leq t_{\max}^{(1)}, \end{cases} \qquad (8)$$

$$M = max\left\{\max_i a_i , \max_j b_j\right\} . \qquad (9)$$

Условие (7) фактически не накладывает никаких ограничений на искомый план, так как, в соответствии с (8) $h_{ij}^{(1)} \equiv M$, причем M достаточно велико.

Пусть $X^{(1)} = (x_{ij}^{(1)})$ - решение задачи (1), (4) – (9). Рассчитаем

$$t_{max}^{(2)} = \max_{(i,j)\in N^{(1)}}\{t_{ij}\}, \quad N^{(1)} = \{(i,j) : x_{ij}^{(1)} > 0\}.$$

Понятно, что значение $t_{max}^{(2)}$ определяется самой продолжительной из ненулевых транспортировок, соответствующих плану $X^{(1)}$. Зададим теперь

$$h_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, \; t_{ij} > t_{max}^{(2)}, \\ M, \; t_{ij} \leq t_{max}^{(2)}, \end{cases} \qquad (10)$$

и введем ограничение

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}^{(2)} , \; i = 1,2,...,m , \; j = 1,2,...,n . \qquad (11)$$

Первая итерация завершена.

Итерация 2. Вновь решается транспортная задача: найти план $X = (x_{ij})$, минимизирующий (1) и удовлетворяющий ограничениям (4) - (6), (11). Понятно, что ограничение (11), заменившее виртуальное ограничение (8), запрещает использовать в новом плане транспортировок те из них, продолжительность реализации которых превосходит $t_{max}^{(2)}$. В результате решения задачи получаем новый план $X^{(2)} = (x_{ij}^{(2)})$, с использованием которого находим

$$t_{max}^{(3)} = \max_{(i,j)\in N^{(2)}}\{t_{ij}\}, \quad N^{(2)} = \{(i,j) : x_{ij}^{(2)} > 0\} \cup N^{(1)} ,$$

$$h_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{max}^{(3)}, \\ M, \ t_{ij} \le t_{max}^{(3)}, \end{cases}$$

обеспечивающих формирования нового ограничения

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}^{(3)}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n.$$

Вторая итерация завершена.

Последующие итерации во всем повторяют уже описанные, за исключением правила коррекции соотношений, используемых при формировании дополнительного ограничения. После проведения k итераций, перед очередной $(k+1)$-й итерацией вычисляются

$$t_{max}^{(k+1)} = \max_{(i,j)\in N^{(k)}} \{t_{ij}\}, \quad N^{(k)} = \{(i,j): x_{ij}^{(k)} > 0\} \cup N^{(k-1)}, \tag{12}$$

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} 0, \ t_{ij} > t_{max}^{(k+1)}, \\ M, \ t_{ij} \le t_{max}^{(k+1)}, \end{cases} \tag{13}$$

и задается новое ограничение

$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}^{(k+1)}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n. \tag{14}$$

Процедура продолжается до тех пор, пока после проведения очередной, например, q-й, итерации число разрешенных элементов плана не станет меньше минимально возможного, равного $m+n-1$.

В результате реализации этой процедуры получим совокупность пар:

$$\left(L\left(X^{(1)}\right), t_{max}^{(1)}\right), \left(L\left(X^{(2)}\right), t_{max}^{(2)}\right), ..., \left(L\left(X^{(q)}\right), t_{max}^{(q)}\right). \tag{15}$$

Легко показать, что эта совокупность точек образует Парето-оптимальное множество, то есть для произвольной точки $\left(L\left(X^{(k)}\right), t_{max}^{(k)}\right)$ из этого множества не существует какой-либо другой минорирующей точки $\left(L\left(X^{(l)}\right), t_{max}^{(l)}\right)$ такой, что одновременно выполняются неравенства

$$L\left(X^{(l)}\right) < L\left(X^{(k)}\right),$$

$$t_{max}^{(l)} < t_{max}^{(k)}. \tag{16}$$

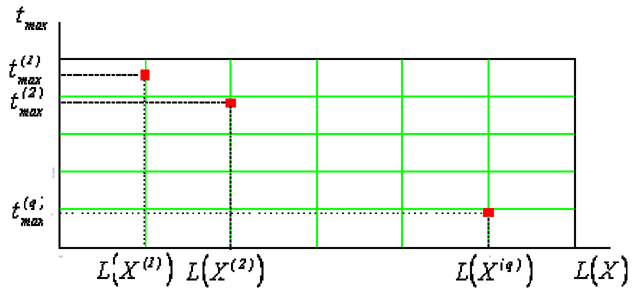
Действительно, описанная выше процедура формирования точек из совокупности (15) такова, что для всех $l < k$

$$L\left(X^{(l)}\right) \le L\left(X^{(k)}\right), \ t_{max}^{(l)} \ge t_{max}^{(k)}. \tag{17}$$

Напротив, для всех $l > k$ имеет место

$$L\left(X^{(l)}\right) \ge L\left(X^{(k)}\right), \ t_{max}^{(l)} \le t_{max}^{(k)}. \tag{18}$$

Таким образом, обязательное выполнение неравенств (17) и (18) для всех $l \ne k$ исключает возможность реализации (16). Графическое отображение Парето-оптимального множества (15) представлено на рисунке.



Парето-оптимальное множество решений задачи.

Понятно, что более полное Парето-оптимальное множество будет получено, если на каждой итерации из матрицы возможных назначений исключать элемент, для которого продолжительность перевозки является максимальной. При этом решение транспортной задачи по критерию стоимости приведет к плану, на котором суммарная стоимость перевозок будет не лучше, а максимальная продолжительность перевозок – не хуже, чем на предыдущей итерации.

Выводы. Таким образом, предложен метод решения двухкритериальной транспортной задачи. Описанная процедура позволяет отыскивать любое из альтернативных решений: а) план перевозок, обеспечивающий минимальную суммарную стоимость перевозок при условии, что продолжительность максимальной из них не превосходит заданную; б) план, минимизирующий максимальную из продолжительностей перевозок при условии, что суммарная их стоимость не превосходит заданную.

Список литературы: ***1.*** *Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа / *Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн.* – М.: Наука, 1969. – 384с. ***2.*** *Вагнер Г.* Основы исследования операций / *Г. Вагнер*. Т.1.: пер. с англ. – М.: МИР, 1972. – 335с. ***3.*** *Раскин Л.Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования / *Л.Г. Раскин., О.И. Кириченко.* – М.: Радио и связь, 1982. – 240с.

Поступила в редколлегию 19.01.09