УДК 62-5:620.9

А. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф., зав. каф. САиУ НТУ «ХПИ»;
В. А. КУРКО, студент НТУ «ХПИ»;
С. В. ЛАХНО, соискатель НТУ «ХПИ»

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Розглядаються методи параметричного синтезу лінійних регуляторів, оптимальних по відношенню до заданої множини квадратичних інтегральних критеріїв якості.

Рассматриваются методы параметрического синтеза линейных регуляторов, оптимальных по отношению к заданному множеству квадратичных интегральных критериев качества.

Methods of parameters synthesis linear control systems which optimization great number of quadratic integral criteria of quality, are presents in the article.

Введение. Современная теория управления в отличие от классической, основанной на полной информации о структуре и параметрах математических моделей объекта управления и возмущающих воздействий, характеризуется принципиально новыми подходами к постановке и решению задач управления. В основу современной постановки большинства задач управления положена неопределенность как параметров математической модели объекта и возмущающих воздействий, так и других компонент постановки задачи управления: цели и критерия качества. В основополагающих работах по робастному управлению [1–3] рассмотрены основные идеи, математические постановки и конкретные пути решения ряда поставленных задач в условиях неопределенности. В то же время, в подавляющем большинстве работ в этой области авторы, как правило, ограничиваются неопределенностями математических моделей объектов управления и возмущающих воздействий. В реальных же постановках могут присутствовать и другие неопределенности, такие как неопределенность цели (многоцелевые задачи) или неопределенность критерия качества (многокритериальные задачи оптимального управления). Следует отметить, что многокритериальные постановки задач управления можно разделить на два больших класса. К первому классу могут быть отнесены задачи с критериями, отражающими различные качественные стороны управляемого процесса, такие как расход энергии, быстродействие, точность достижения цели и др. Решению подобных задач посвящена непрерывно развивающаяся теория принятия решений. Другой класс многокритериальных задач связан с неопределенностью параметров критерия качества заданной структуры. К таким критериям относится интегральный квадратичный критерий качества переходных процессов устойчивых динамических систем.

В настоящей работе предлагается расширение классической линейно-квадратичной задачи оптимального управления на случай, когда весовые коэффициенты в критерии качества точно не заданы, а задана некоторая замкнутая область, которой они принадлежат.

Постановка задачи. Линейно-квадратичная задача (LQR) оптимального управления занимает особое место в теории автоматического управления. Этому есть две причины. Во-первых, постановка LQR достаточно прагматична, а ее решение позволяет синтезировать регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы и удовлетворительное качество переходных процессов. Во-вторых, решение LQR достаточно просто реализуется современным программным обеспечением.

В наиболее простой форме LQR формулируется следующим образом.

Пусть задана математическая модель линейного стационарного объекта управления в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in R^l$ – вектор состояния, $u \in R^s$ – вектор управления, A и B – матрицы соответствующих размерностей.

Необходимо для заданного начального значения вектора состояния

$$x(0) = x_0$$

найти закон управления

$$u = u(x(t)),$$

минимизирующий интегральный квадратичный критерий качества

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Qx + u^T Ru\right)dt, \tag{2}$$

где Q и R – заданные симметрические сильвестровы матрицы.

Решение поставленной задачи известно [4] и сводится к решению алгебраического матричного уравнения Риккати-Лурье относительно симметрической матрицы P

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \tag{3}$$

а закон оптимального управления имеет вид

$$u(t) = Kx(t), \tag{4}$$

где K – матричный коэффициент усиления:

$$K = -R^{-1}B^T P.$$

При этом величина квадратичного критерия качества (2) может быть вычислена по формуле

$$J = x_0^T P x_0 . \qquad (5)$$

Как видно из (5), оптимальное значение критерия качества при фиксированных матрицах A и B зависит от весовых матриц Q и R, а также от вектора начального состояния x_0. В общем случае начальное состояние x_0 может принимать различные значения, обусловленные всевозможными воздействиями на управляемый процесс в предшествующий рассматриваемому период времени. В связи с этим вместо локального показателя качества конкретного переходного процесса в виде (5) будем рассматривать множественную оценку $\bar{J}$ величины квадратичного критерия качества на ансамбле траекторий, начальные значения которых находятся внутри единичной гиперсферы

$$S = \left\{ x_0 \middle| x_0^T x_0 \le 1 \right\}. \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться [5], что множественный критерий в этом случае примет вид

$$\bar{J} = \int_S J(x_0) dS = c \cdot trP, \qquad (7)$$

где c – постоянная, зависящая от размерности пространства состояний l.

Таким образом, критерий качества в виде (7) является характеристикой замкнутой системы в отличие от (5), характеризующего конкретный переходной процесс с начальным условием x_0.

Рассмотрим ситуацию, когда весовые матрицы Q и R неопределенны и могут принимать произвольные значения из некоторых допустимых областей

$$Q \in \bar{Q},\ R \in \bar{R}\ ,$$

а допустимые управления принадлежат некоторой замкнутой области $U \subset R^s$.

В этом случае традиционная постановка LQR некорректна и вместо поиска минимума критерия (2) при фиксированных матрицах Q и R необходимо доопределить задачу тем или иным способом.

Одним из таких способов доопределения является поиск закона управления, минимизирующего множественное значение критерия при всех допустимых значениях Q и R в виде

$$\min_{u \in U} \int_{\bar{Q},\bar{R}} \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt dQ dR . \qquad (8)$$

Второй, и общепризнанный подход, состоит в получении гарантированного результата, соответствующего минимаксной стратегии

$$\min_{u \in U} \max_{\bar{Q},\bar{R}} \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt . \qquad (9)$$

Исследование одного из подходов к решению задач (8) и (9) и составляет предмет данной работы.

Параметрический синтез линейного регулятора. Непосредственное решение оптимизационных задач (8) и (9) не представляется возможным. Поэтому, вместо решения (8), (9) будем решать задачу синтеза параметров линейного регулятора в виде (4). Т.е. вместо непосредственного поиска управления в форме $u \in U$ будем отыскивать управление в виде линейной обратной связи по вектору состояния.

Тогда после подстановки (4) в систему уравнений (1) получим математическую модель замкнутого линейной обратной связью по состоянию контура регулирования в виде

$$\dot{x} = \tilde{A} x, \qquad (10)$$

где $\tilde{A} = A + BK.$

Подставим (4) в выражение (2) для критерия качества стабилизации. В результате получим:

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + x^T K^T R K x \right) dt = \int_0^\infty x^T \left(Q + K^T R K \right) x dt.$$

Таким образом, локальный переходный процесс в замкнутой системе оценивается интегральным квадратичным критерием качества, эквивалентным исходному критерию (2)

$$J = \int_0^\infty x^T \tilde{Q} x dt , \qquad (11)$$

где $\tilde{Q} = Q + K^T R K$.

Величина критерия (11) для замкнутой системы (10) находится известными методами и имеет вид

$$J = x_0^T S x_0 , \tag{12}$$

где S – решение матричного уравнения Ляпунова

$$\widetilde{A}^T S + S\widetilde{A} = -\widetilde{Q}. \tag{13}$$

Вместо критерия (12), будем рассматривать его множественную оценку по ансамблю траектории, начальные значения которых находятся в соответствии с (6). По аналогии с (7) эта величина пропорциональна следу матрицы S:

$$\bar{J} = c \cdot trS .$$

Матрицу S можно рассматривать как функцию матричных параметров K, Q и R, из которых K представляет собой закон управления, а Q и R могут принимать произвольные заранее неизвестные значения из $\overline{Q}$ и $\overline{R}$.

Поскольку матричное уравнение (13) линейно относительно S, а матрицы Q и R входят в его правую часть линейно, то зависимость критерия $\bar{J}$ от матриц K, Q и R будет иметь следующую структуру:

$$\bar{J} = \sum_{i,j} a_{ij}(K) q_{ij} + \sum_{i,j} b_{ij}(K) r_{ij}, \tag{14}$$

где $a_{ij}(K)$ и $b_{ij}(K)$ – некоторые нелинейные функции матричного коэффициента усиления K.

Таким образом, задачи (8) и (9) с учетом (14) сводятся к задачам

$$\min_K \int_{\overline{Q},\overline{R}} \left(\sum_{i,j} a_{ij}(K) q_{ij} + \sum_{i,j} b_{ij}(K) r_{ij} \right) dQdR, \tag{15}$$

$$\min_K \max_{Q,R} \left(\sum_{i,j} a_{ij}(K) q_{ij} + \sum_{i,j} b_{ij}(K) r_{ij} \right). \tag{16}$$

При оптимизации в соответствии с (15) или (16) следует учесть дополнительные ограничения, связанные со спецификой матриц K, Q и R.

1. Матрица K должна быть такой, чтобы замкнутая система (10) была устойчивой.

2. Элементы допустимых множеств $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ должны удовлетворять условиям положительной полуопределенности соответствующих квадратичных форм.

Обозначим коэффициенты матрицы K как $k_1, k_2, ..., k_m$, а коэффициенты матриц Q и R как $z_1, z_2, ..., z_r$, $m = ls$, $r = \dfrac{l(l-1) + s(s-1)}{2}$.Тогда (14) можно представить в виде

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^{r} f_i(k_1, k_2, ..., k_m) z_i, \tag{17}$$

где $f_k(k_1, k_2, ..., k_m)$ соответствуют $a_{ij}(K)$ или $b_{ij}(K)$.

Рассмотрим частный, но практически важный случай, когда матрицы Q и R диагональные. В силу требования положительной полуопределенности указанных матриц $z_i \ge 0 \left(i = \overline{1,n},\ n = l + s \right)$. Введем также условие нормировки весовых коэффициентов критерия качества:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 1. \tag{18}$$

Условие нормировки (18) совместно с требованием неотрицательности всех слагаемых z_i задают в пространстве R^n выпуклую многогранную область L, расположенную на гиперплоскости (18), с вершинами l_k в точках с координатами $(\delta_{k1}, \delta_{k2}, ..., \delta_{kn})$, где δ_{kj} – символ Кронекера.

Рассмотрим множественную постановку задачи синтеза параметров регулятора (15), которая с учетом (17) примет вид

$$\min_{k \in \widetilde{K}} \int_L \sum_{i=1}^{n} f_i(k) z_i dL , \tag{19}$$

где $\widetilde{K}$ – допустимое множество величин коэффициентов усиления в цепи обратной связи, удовлетворяющих условиям устойчивости замкнутой системы и физическим ограничениям.

Поверхностный интеграл в (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_L \sum_{i=1}^{n} f_i(k) z_i dL = \sum_{i=1}^{n} f_i(k) \int_L z_i dL .$$

Поскольку область L симметрична относительно переменных z_i, то величина поверхностного интеграла $\int_L z_i dL = const$ и не зависит от индекса i.

Таким образом, сформулированная задача сводится к поиску

$$\min_{k \in \widetilde{K}} \sum_{i=1}^{n} f_i(k).$$

Задача поиска гарантированного результата (16) сводится к решению минимаксной задачи

$$\min_{k \in \widetilde{K}} \max_{z \in L} \sum_{i=1}^{n} f_i(k) z_i, \tag{20}$$

состоящей из двух вложенных задач оптимизации [6].

Рассмотрим задачу максимизации, входящую в (20) и состоящую в нахождении функции

$$\varphi(k) = \max_{z \in L} \sum_{i=1}^{n} f_i(k) z_i \,. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что максимизируемая функция в (21) линейна по переменным z_i, следовательно, ее максимум при фиксированном k находится в одной из вершин многогранника L. Таким образом

$$\varphi(k) = \max_{z \in L} \sum_{i=1}^{n} f_i(k) z_i = \max\{f_1(k), f_2(k), \ldots, f_n(k)\}.$$

Решение задачи (21) дает нам разбиение множества $\widetilde{K}$ на подмножества

$$\widetilde{K}_i = \left\{k \,\middle|\, f_i(k) \geq f_j(k), j = \overline{1, n}, i \neq j\right\}.$$

Следовательно, задача минимизации, входящая в (20),

$$\min_{k \in \widetilde{K}} \varphi(k)$$

распадается на n задач минимизации

$$k^i = \arg \min_{k \in \widetilde{K}_i} f_i(k). \tag{22}$$

Окончательный результат решения минимаксной задачи (20) k^* находится путем сравнения элементов множества решений частных задач минимизации (22) и выбора

$$k^* = \arg\min\left\{ f_1(k^1), f_2(k^2), \ldots, f_k(k^n)\right\}.$$

Решение задачи для системы 2-го порядка. Рассмотрим реализацию разработанных методов применительно к системе стабилизации линейного объекта 2-го порядка, математическая модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{23}$$

Закон управления будем искать в виде

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2, \tag{24}$$

а критерий качества стабилизации выберем в виде

$$J = \int_0^{\infty} \left(z_1 x_1^2 + z_2 x_2^2 + z_3 u^2\right) dt\,, \tag{25}$$

где z_1, z_2, z_3 – неопределенные весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям неотрицательности и нормировки (18).

После подстановки закона управления (24) в (23) и (25) получим матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{Q}$ в виде

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 k_1^2 & z_3 k_1 k_2 \\ z_3 k_1 k_2 & z_2 + z_3 k_2^2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

После подстановки (26) в (13) и решения последнего уравнения относительно матрицы S получим выражение для критерия (17)

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^{3} f_i(k_1, k_2) z_i\,, \tag{27}$$

где $f_1(k_1, k_2) = \dfrac{k_2^2 + 1 - k_1}{k_1 k_2}$, $f_2(k_1, k_2) = \dfrac{k_1 - 1}{k_2}$, $f_3 = \dfrac{k_1 - k_1^2 - k_2^2}{k_2}$.

Множественный подход применительно к (27) приводит к задаче минимизации функции J^* двух переменных k_1, k_2 на допустимом множестве $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ коэффициентов усиления, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы

$$J^* = \sum_{i-1}^{3} f(k_1, k_2)_i = \frac{k_2^2 - 2k_1 + 2k_1^2 - k_1^3 - k_1 k_2^2 + 1}{k_1 k_2}.$$

Результатом минимизации J^* является вектор коэффициентов усиления

$$k_1 = -0{,}68\,,\; k_2 = -1{,}24\,. \tag{28}$$

Применение гарантированного подхода (20) – (22) по отношению к (27) дало следующие результаты:

$$k_1 = -1{,}17\,,\; k_2 = -1{,}61\,. \tag{29}$$

Обсуждение результатов. Преобразуем математическую модель замкнутой системы к форме дифференциального уравнения 2-го порядка, принятой в теории автоматического управления:

$$T^2\ddot{x}_1 + 2T\xi\dot{x}_1 + x_1 = 0\,, \tag{30}$$

где $T = \sqrt{-\dfrac{1}{k_1}}$ – постоянная времени, $\xi = -\dfrac{k_2}{2T}$ – коэффициент демпфирования.

В таблице приведены постоянные времени и коэффициенты демпфирования линейных систем второго порядка (30), соответствующих множественному и гарантированному подходам с коэффициентами усиления в цепи обратной связи (28) и (29) соответственно.

	T	ξ
Множественный подход	1.21	0.51
Гарантированный подход	0.85	0.95

Из таблицы видно, что множественный подход дает в 1,5 раза большее время переходных процессов и более высокую колебательность по сравнению с гарантированным подходом. Это ухудшение переходных процессов при множественном подходе естественно компенсируется уменьшением расходов на управление.

Список литературы: **1.** *Кунцевич В. М.* От проблем управления одним объектом – к проблемам управления классами объектов // Проблемы управления и информатики. – 1994. – № 1–2. – С. 3–14. **2.** *Поляк Б. Т.* Робастная устойчивость и управление / *Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков* – М. : Наука, 2002. – 303 с. **3.** *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К. : Наук. думка, 2006. – 264 с. **4**. *Калман Р. Е.* Очерки по математической теории систем / *П. Л. Фалб, М. Арбиб* – М. : Мир, 1971. – 400 с. **5**. *Костенко Ю. Т.* Об одном подходе к проблеме параметрической оптимизации регулируемых систем / *Ю. Т. Костенко, А. С. Куценко, И. А. Свиридова* // Системный анализ, управление и информационные технологии. Вестник ХГПУ, выпуск 51. – Х. : ХГПУ, 1999. – с. 14–18. **6.** *Демьянов В. Ф.* Введение в минимакс / *В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов В. Н.* – М. : Наука, 1972. – 368 с.

Надійшла до редколегії 05.11.2010