УДК 681.5.01

Ю. И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»;
А. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»

СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ В СЕТЯХ ПОСТАВОК С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО СПРОСА

Рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами в сетях поставок со структурными ограничениями в условиях действия неопределенного стохастического спроса. Закон управления строится в виде линейной обратной связи по отклонению текущего уровня запасов от страхового уровня, который вычисляется в режиме *on-line* на основании данных об объемах прошлых продаж. На основе метода инвариантных эллипсоидов задача представляется в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления сводится к задачам одномерной выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования.

Ключевые слова: сеть поставок, стратегия управления запасами, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

Введение. Сеть поставок представляет собой систему, состоящую из совокупности взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распределение ресурсов с целью удовлетворения потребительского спроса [1]. Обычно сеть поставок представляют в виде ориентированного графа, вершины которого, соответствующие узлам сети, определяют виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

С точки зрения управления сетью поставок объемы спроса, поступающие из внешней среды и формирующие неуправляемые потоки в сети, можно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий.

В настоящее время для синтеза стратегии управления запасами с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления (*Model Predictive Control, MPC*) [2], который позволяет строить управление как в программном виде, так и в виде обратной связи, а также учитывать ограничения на состояния и управления. Однако, на практике, как правило, отсутствует информация, необходимая для построения адекватной модели спроса, которая используется при реализации прогнозирующего управления.

В работе [3] была предложена концепция «неизвестных, но ограниченных» воздействий (*unknown-but-bounded inputs, UBB*). Отметим, что начиная с [3] описание возмущений с помощью концепции *UBB* широко используется во многих областях и приложениях теории автоматического управления. При этом соответствующая модель *UBB* спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

Альтернативой использованию детерминированных моделей является подход на основе моделей со стохастическим спросом, критерием перехода к которым считается значение коэффициента вариации (отношение среднеквадратического отклонения к среднему спросу), превышающее значение 0,2 [4].

В работах, использующих *MPC*-стратегию, стохастические аддитивные возмущения рассматриваются как независимые и одинаково распределенные случайные величины (*independent and identically distributed, i.i.d.*) с известной функцией распределения. Однако на практике очень сложно получить плотность распределения спроса ввиду неконтролируемого изменения механизма ее формирования по множеству трудно прогнозируемых причин. В связи с этим возникает необходимость разработки методов управления запасами в условиях отсутствия какой-бы то ни было априорной информации о внешнем спросе.

В задачах управления запасами наиболее естественно контролировать текущий спрос по уровню продаж. В литературе подход, в соответствии с которым решение о размерах пополнения запасов принимается в каждый момент времени, основываясь только на данных об объемах прошлых продаж, получил название «*censored demand*» [5].

Одним из подходов к данной проблематике в современной теории управления является концепция инвариантных множеств [6]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. В работе [7] на основе *MPC*-подхода предложена стратегия управления, которая гарантирует ограниченность состояний замкнутой системы путем оценки множества достижимости с помощью построения вложенных эллипсоидальных множеств. Однако, полученная стратегия применима лишь в случае, когда ограничения на состояния и управления являются симметричными относительно начала координат (то есть допускают отрицательные значения), в то же время для задач управления сетями поставок характерно наличие жестких структурных несимметричных ограничений.

Целью настоящей работы является синтез стратегии управления запасами в сетях поставок со структурными ограничениями в условиях неопределенного стохастического спроса при наличии асимметричных ограничений на состояния и управления.

Постановка задачи. Для математического описания управляемой сети поставок используется дискретная модель в пространстве состояний. Переменными состояний являются наличные уровни запаса ресурсов. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами сети в текущем периоде.

Предполагается, что структура сети поставок известна, состояния доступны непосредственному измерению, а длительности транспортировки ресурсов между узлами и длительности переработки ресурсов, известны и кратны выбранному периоду дискретизации. Тогда сеть поставок описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbf{R}^n$ и $u(k) \in \mathbf{R}^m$ – векторы состояний и управляющих воздействий;

$d(k) \in \mathbf{R}^q$ – вектор внешних возмущений, элементы которого рассматриваются как *i.i.d.* случайные величины с неизвестной функцией распределения;

Λ – максимальное значение запаздывания управляемых потоков среди всех пар взаимосвязанных узлов сети;

$B_t \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $t = \overline{0,\Lambda}$ – матрицы влияния управлений;

$E \in \mathbf{R}^{n \times q}$ – матрица влияния возмущений.

Очевидно, что структура сети определяется матрицами B_t, E, методика построения которых изложена в работе [8].

В процессе функционирования системы должны выполняться заданные структурные ограничения:

$$x(k) \in X = \{x \in \mathbf{R}^n : \ 0 \le x \le x^+\}, \tag{2.a}$$

$$u(k) \in U = \{u \in \mathbf{R}^m : \ 0 \le u \le u^+\}, \tag{2.b}$$

где x^+ и u^+ – векторы, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и максимальные объемы транспортировок, которые считаются заданными.

Множества X, U представляют собой ограниченные многогранники, которые определяются пересечением конечного числа замкнутых полупространств, т.е. представляют собой компактные выпуклые множества, при этом $0 \notin \operatorname{int}(X)$, $0 \notin \operatorname{int}(U)$.

Для системы (1) рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами, которая для любого начального состояния $x(0) \in X$ и неопределенного стохастического внешнего спроса обеспечивает:

1) минимизацию квадратичного критерия качества, задающего суммарные потери от отклонения текущего уровня запасов ресурсов от выбранного страхового уровня;

2) асимптотическую устойчивость замкнутой системы;

3) выполнение ограничений на состояния и управления (2).

Условие существования стратегии управления. Первым этапом решения задачи управления является преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздываний на основе расширения вектора состояний [3] путем включения в него векторов объемов ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки $\xi(k)=\left[x(k)^{\mathrm{T}},\ u(k-1)^{\mathrm{T}},\ u(k-2)^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ u(k-\Lambda)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$.

Тогда уравнения «расширенной» модели сети поставок примут вид:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1)=A\xi(k)+Bu(k)+Gd(k),\\ &x(k)=C\xi(k), \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицы $A\in\mathbf{R}^{(n+\Lambda m)\times(n+\Lambda m)}$, $B\in\mathbf{R}^{(n+\Lambda m)\times m}$, $G\in\mathbf{R}^{(n+\Lambda m)\times q}$, $C\in\mathbf{R}^{n\times(n+\Lambda m)}$ имеют соответствующую блочную структуру [8].

Необходимыми условиями существования стратегии управления, обеспечивающей для любого $k\ge 0$ полное удовлетворение спроса, являются [9]:

1) условие управляемости пары матриц (A,B);

2) условие достаточности ресурсов управления, которое допускает следующую геометрическую интерпретацию: выпуклый многогранник, описывающий влияние внешних возмущений, находится строго внутри выпуклого многогранника, описывающего ограничения на ресурсы управления:

$$ED\subset -BU, \tag{4}$$

где D – множество, аппроксимирующее множество возможных значений внешнего спроса $d(k),\ k\ge 0$.

Согласно теореме об аппроксимации произвольных выпуклых множеств, не обладающих свойством симметрии относительно начала координат [10], множество значений внешнего спроса может быть аппроксимировано эллипсоидом:

$$E\left(d^*(k),\,P_d(k)\right)=\left\{d\in\mathbf{R}^q:\ \left(d(k)-d^*(k)\right)^{\mathrm{T}}P_d(k)^{-1}\left(d(k)-d^*(k)\right)\le 1\right\}, \tag{5}$$

где $d^*(k)\in\mathbf{R}^q$ – вектор, определяющий центр эллипсоида, элементы которого вычисляются как средние значения объемов прошлых продаж $d(k-1),d(k-2),\ldots,d(0)$;

$P_d(k)\in\mathbf{R}^{q\times q}$ – матрица, диагональные элементы которой определяют полуоси эллипсоида и вычисляются на основании значений дисперсии объемов прошлых продаж.

Поскольку предполагается, что внешний спрос на каждый вид ресурсов является дискретной случайной величиной с одинаковыми вероятностями появления различных значений, то для вычисления его средних значений может быть применена следующая формула:

$$d^*(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} d(i). \tag{6}$$

Тогда для вычисления средних значений спроса в режиме *on-line* предлагается рекуррентная формула:

$$d^*(k) = \frac{k-1}{k} d^*(k-1) + \frac{1}{k} d(k-1), \quad d^*(1) = d(0). \tag{7}$$

Для вычисления несмещенной оценки дисперсии спроса применяется формула:

$$D^*(k) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(d(i) - d^*(k)\right)^2, \tag{8}$$

которая может быть представлена в рекуррентном виде:

$$D^*(k) = \frac{k-2}{k-1} D^*(k-1) + \frac{1}{k-1}\left(d(k-1) - d^*(k)\right)^2, \quad D^*(1) = 0. \tag{9}$$

После вычисления дисперсии спроса вычисляется матрица аппроксимирующего эллипсоида:

$$P_d(k) = \mathrm{diag}\left(q^2 D_1^*(k), \ldots, q^2 D_q^*(k)\right). \tag{10}$$

Синтез базовой *MPC*-стратегии управления. Базовый метод синтеза *MPC*-стратегии управления [2] основан на решении оптимизационной задачи, в которой последовательность управляющих воздействий вычисляется в каждый дискретный момент времени так, чтобы минимизировать некоторую функцию стоимости, которая определяется прогнозируемыми состояниями системы в течение некоторого временного горизонта. После определения последовательности управляющих воздействий только первый ее элемент используется в качестве управления в текущий момент времени. Затем измеряется новое состояние системы и процедура повторяется, используя принцип отступающего горизонта.

Поскольку имеют место ограничения (2), то найти общее решение оптимизационной задачи в аналитическом виде невозможно, поэтому задача представляется в виде задачи квадратичного программирования (*Quadratic Programming*) и решается численно в режиме *on-line*.

Известно [2], что базовая *MPC*-стратегия управления с конечным значением горизонта прогнозирования не гарантирует устойчивость по Ляпунову замкнутой системы. В результате возникает необходимость модификации подхода для синтеза стабилизирующего управления запасами в сетях поставок в случае бесконечного временного горизонта.

Синтез стабилизирующего управления на основе метода инвариантных эллипсоидов. Целью является построение закона управления, который должен обеспечивать стабилизацию замкнутой системы, а также подавление влияния неизвестного внешнего спроса $d(k) \in E\left(d^*(k), P_d(k)\right)$ путем минимизации функционала, построенного для инвариантного множества состояний системы.

Выберем закон управления аналогично случаю детерминированного спроса [11] в виде линейной обратной связи по сигналу рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса:

$$u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*(k)\right), \quad k \geq 0, \tag{11}$$

где $\xi^*(k)$ – вектор, определяющий уровень страховых запасов (*safety stock level*) в момент времени k, значения которого вычисляются на основе данных об объемах прошлых продаж с учетом теоремы об аппроксимации произвольных выпуклых множеств:

$$\xi^*(k) = \left[x^*(k)^{\mathrm{T}}, \ldots, x^*(k)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, \quad x_i^*(k) = \begin{cases} q d_i^*(k), & i = \overline{1, q}, \\ (I - \Pi)^{-1}\bar{d}, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \quad \bar{d}_j = \begin{cases} d_j^*(k) + \sqrt{D_j^*(k)}, & j = \overline{1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}, \end{cases} \tag{12}$$

где Π – технологическая матрица, значение элемента $\Pi_{i,j}$ которой равно количеству единиц ресурса i, необходимого для производства единицы ресурса j.

Тогда расширенную модель замкнутой системы для управления (11) представим в виде:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = A_f\left(\xi(k) - \xi^*(k)\right) + A\xi^* + G\left(d(k) - d^*(k)\right) + Gd^*(k), \\ &x(k) = C\xi(k), \quad A_f = A + BK. \end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что вектор выходов $x(k)$ модели (13) является вектором состояний исходной модели сети поставок (1).

Стабилизирующие *MPC*-алгоритмы, как правило, основаны на оценивании верхнего граничного значения показателя качества с помощью функции Ляпунова.

Запишем критерий качества в случае бесконечного горизонта:

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k) - \xi^*(k)\right)^{\mathrm{T}} R_\xi \left(\xi(k) - \xi^*(k)\right) + u(k)^{\mathrm{T}} R_u u(k)\right), \tag{14}$$

где $R_\xi \succ 0, R_u \succ 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей.

Определим «смещенную» квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (13):

$$V\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)=\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)^{\mathrm{T}}P\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right),\ \ P=P^{\mathrm{T}}\succ 0. \tag{15}$$

Известно, что существование невозрастающей функции Ляпунова (15) для всех моментов времени $k \geq 0$, то есть выполнение следующего условия

$$\begin{gathered} V\left(\xi(k+1)-\xi^*(k+1)\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)\leq \\ -\left(\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)^{\mathrm{T}}R_\xi\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)+u(k)^{\mathrm{T}}R_u u(k)\right) \end{gathered} \tag{16}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (13).

Если (16) выполняется, тогда можно показать, что $V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\geq \max\limits_{d(k)\in E\left(d^*(k),\, P_d(k)\right)} J_\infty(k)$, то есть функция (15) дает оценку сверху значения критерия качества в случае бесконечного горизонта (14), определенного матрицами R_ξ, R_u [12].

Тогда задача синтеза управления сводится к вычислению управляющего воздействия, которое минимизирует значение функции Ляпунова $u(k)=\arg\min\limits_{u(k)\in U} V\left(\xi(k)-\xi^*\right)$ или к эквивалентной задаче вычисления минимального скалярного значения $\gamma > 0$ такого, что

$$\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)^{\mathrm{T}}P\left(\xi(k)-\xi^*(k)\right)\leq\gamma,\ \ k\geq 0.$$

В соответствии с [12] введем матричную переменную

$$Q=\gamma P^{-1} \tag{17}$$

и получим эквивалентную задачу

$$\min_Q \gamma, \quad \text{при условии} \quad \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}Q^{-1}\left(\xi(k)-\xi^*\right)\leq 1, \tag{18}$$

которую можно трактовать как задачу минимизации по критерию следа инвариантного эллипсоида для системы (13). Используя лемму Шура, задачу (18) можно представить в виде задачи полуопределенного программирования:

$$\min_Q \gamma, \quad \text{при условии} \quad Q\succ 0,\ \begin{bmatrix} 1 & \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\xi(k)-\xi^*\right) & Q \end{bmatrix}\succeq 0. \tag{19}$$

По аналогии с [11] представим условие (16), а также ограничения (2) в виде линейных матричных неравенств. Чтобы матричные неравенства оказались линейными относительно матриц Q и $K(k)$, согласно [12] вводится матричная переменная $Y = K(k)Q$. Тогда задача синтеза управления заключается в вычислении матрицы коэффициентов обратной связи $K(k)$, которая для любого начального состояния $x(0) \in X$ и произвольного внешнего спроса $d(k) \in E\left(d^*(k), P_d(k)\right)$ стабилизирует замкнутую систему (13) и обеспечивает минимизацию функции Ляпунова (15). Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

Теорема. Рассмотрим систему (1) с ограничениями (2) и пусть матрицы $P = \gamma Q^{-1}$ и $K(k) = YQ^{-1}$ получены в результате решения задач одномерной выпуклой оптимизации по скалярному параметру α и полуопределенного программирования вида:

$$\min_{\alpha,Q,Y} \gamma, \quad \text{при условии} \quad Q \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \left(\xi(k) - \xi^*(k)\right)^{\mathrm{T}} \\ * & Q \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & (AQ+BY)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & QR_\xi^{1/2} & Y^{\mathrm{T}} R_u^{1/2} \\ * & 0 & 0 & (A-I)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & G & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & P_d(k)^{1/2} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{\gamma}{\alpha} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \gamma I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma\left(u^+{}_j\right)^2 & Y_j \\ * & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j = \overline{1,m}, \qquad \begin{bmatrix} \gamma\left(x^+{}_l\right)^2 & C_l \\ * & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \quad l = \overline{1,n}.$$

Если задача (20) имеет решение, то система (1), замкнутая с помощью закона управления (11) для любого начального состояния $x(0) \in X$ и неопределенного стохастического внешнего спроса $d(k) \in E\left(d^*(k), P_d(k)\right)$, является асимптотически устойчивой и удовлетворяет ограничениям (2).

Доказательство теоремы приведено в работе [11].

После решения задачи (20) найденное управляющее воздействие $u(k) = K(k)\left(\xi(k) - \xi^*(k)\right)$ применяется для управления сетью поставок в момент времени k. В следующий момент времени измеряется новое значение вектора состояний $\xi(k+1)$ и соответствующие задачи полуопределенного программирования и одномерной выпуклой оптимизации решаются в режиме *on-line* для вычисления нового значения матрицы $K(k)$.

Численный пример. В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [4]. Модель сети описывается графом $G(V,E)=(V=\{1,2,3\},E=\{(2,1),(2,3),(3,1)\})$. Заданы значения времени выполнения заказа в узлах сети: $T_1=T_2=2$, $T_3=1$ и времени транспортировки ресурсов между узлами сети: $T_{2,1}=T_{3,1}=T_{2,3}=1$. По формуле $\Lambda_i=\max\{T_{j,i}+T_i,\ i,j=\overline{1,3}\}$ определим величины запаздывания материальных потоков всех узлов сети, в результате получим $\Lambda=3$.

Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции $\Pi_{i,j}$, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i.

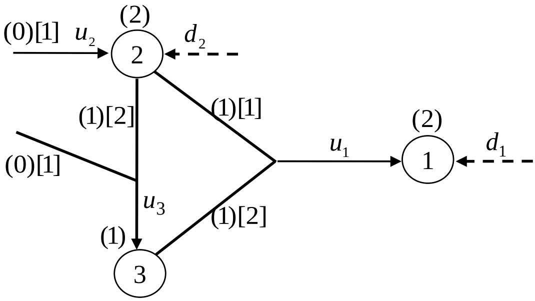


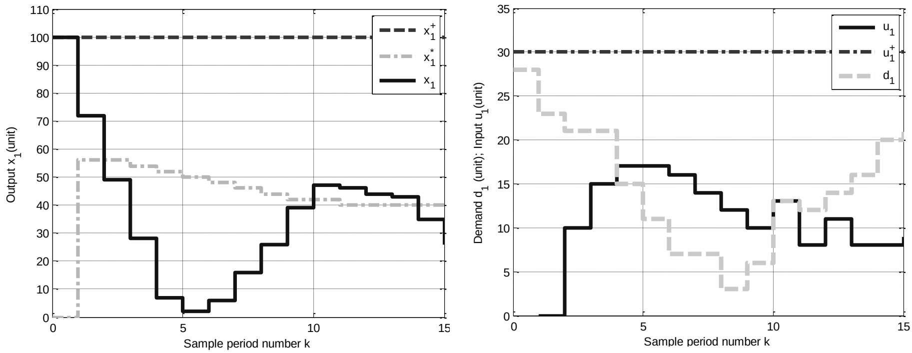
Рис. 1 – Графическое представление модели сети поставок

Специфика рассматриваемой сети в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

Заданы максимальные вместительности хранилищ сети и объемы транспортировок $x^+=[100 \quad 400 \quad 100]^{\mathrm{T}}$, $u^+=[30 \quad 200 \quad 50]^{\mathrm{T}}$, а также начальные условия $x(0)=[100 \quad 350 \quad 80]^{\mathrm{T}}$.

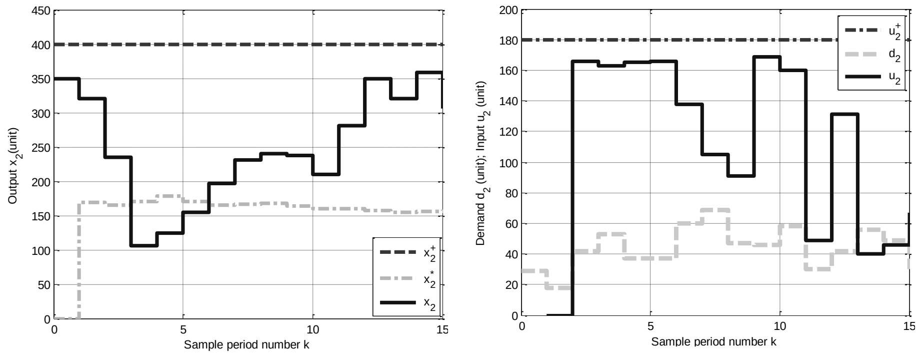
В результате проверки установлено, что пара матриц (A, B) является управляемой, а условие существования стратегии управления (4) выполняется. Весовые матрицы выбраны равными $R_\xi = \mathrm{diag}(r_\xi, \ \ldots, r_\xi)$, $R_u = \mathrm{diag}(r_u, r_u, r_u)$, где $r_\xi = 40, r_u = 5$.

Численное решение задачи получено с помощью свободно распространяемого пакета CVX for MATLAB [13]. Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Значения внешнего спроса моделировались как нормально распределенные случайные величины с изменяющимся средним значением $d_1 \to N(mean_1, 4), \ mean_1 \in [25, 5]$, $d_2 \to N(mean_2, 15), \ mean_2 \in [25, 45]$. Результаты моделирования при $\alpha = 0.999$ представлены на рис. 2-4.



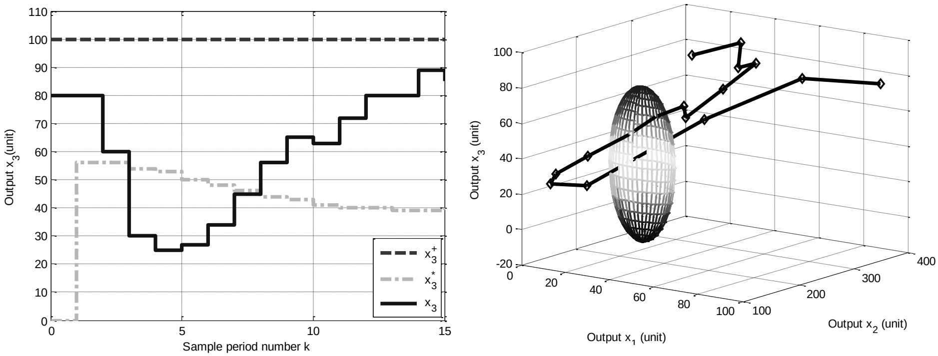
а *б*

Рис. 2 – Для узла 1: *а* – значения наличного и страхового уровней запасов; *б* – значения управляющих воздействий и внешнего спроса



а *б*

Рис. 3 – Для узла 2: *а* – значения наличного и страхового уровней запасов; *б* – значения управляющих воздействий и внешнего спроса



а *б*

Рис. 4: *а* – значения наличного и страхового уровней запасов узла 3;
б – фазовая траектория системы и инвариантный эллипсоид,
полученный на одном из шагов

Выводы. В работе предложен подход к решению задачи синтеза стратегии управления запасами в сетях поставок в условиях действия неопределенного стохастического спроса при наличии ограничений на состояния и управления. Соответствующий закон управления строится в виде линейной обратной связи по сигналу рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса.

Значения страховых уровней запаса ресурсов оказывают существенное влияние на величину управляющих воздействий и качество функционирования всей системы. Их вычисление осуществляется в режиме *on-line* на основании данных об объемах прошлых продаж в предположении, что внешний спрос на каждый вид ресурсов является дискретной случайной величиной с одинаковыми вероятностями появления различных значений.

Для подавления влияния внешнего спроса на уровень наличных запасов, одновременно с обеспечением устойчивости замкнутой системы, применена методика инвариантных эллипсоидов, которая позволила сформулировать задачу в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления свести к задачам полуопределенного программирования и одномерной выпуклой оптимизации. Результаты численного моделирования свидетельствуют об эффективности предложенного подхода

Список литературы: **1.** *Лотоцкий В. А.* Модели и методы управления запасами / *В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель*. – М. : Наука, 1991. – 189 с. **2.** *Bemporad A.* Robust model predictive control: a survey / *A. Bemporad, M. Morari* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1999. – Vol. 245. – P. 207–226. **3.** *Bertsekas D. P.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / *D. P. Bertsekas, I. Rhodes* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128. **4.** *Рыжиков Ю. И.* Теория очередей и управление запасами / *Ю. И. Рыжиков*. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с. **5.** *Huh W. T.* A nonparametric asymptotic analysis of inventory planning with censored demand / *W. T. Huh, R. Paat //* Mathematics of Operations Research. – 2009. – Vol. 34. –

P. 103–123. **6.** *Blanchini F.* Set theoretic methods in control / *F. Blanchini, S. Miani.* – Boston: Birkhauser. – 2008. **7.** *Cannon M.* Probabilistic constrained MPC for multiplicative and additive stochastic uncertainty / *M. Cannon, B. Kouvaritakis, D. Ng //* IEEE Trans. Autom. Control. – 2009. – Vol. 54(7). – P. 747–753. **8.** *Дорофеев Ю. И.* Анализ распределенных сетей поставок как объектов автоматического управления / *Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2012. – № 29. – С. 15–22. **9.** *Blanchini F.* Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / *F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Trans. on robotics and automation. – 1997. – Vol. 13. – P. 633–645. **10.** *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / *Ф. Л. Черноусько*. – М. : Наука, 1988. – 320 с. **11.** *Lyubchyk L. M.* Robust model predictive control of constrained supply networks via invariant ellipsoids technique / *L. M. Lyubchyk, Y. I. Dorofieiev, A. A. Nikulchenko* // Proc. IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control MIM'2013. – 2013. – P. 1618–1623 // URL: http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/60351.html. **12.** *Kothare M. V.* Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities / *M. V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari* // Automatica. – 1996. – Vol. 32(10). – P. 1361–1379. **13.** *Grant M.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / *M. Grant, S. Boyd* // URL: http://cvxr.com/cvx.

Надійшла до редколегії 11.10.2013

УДК 681.5.01

Стабилизирующее управление запасами в сетях поставок с ограничениями в условиях неопределенного стохастического спроса / Ю. И. Дорофеев, А. С. Куценко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 62 (1035). – С. 3–14. – Бібліогр.: 13 назв.

Розглядається задача синтезу стратегії управління запасами в мережах поставок зі структурними обмеженнями в умовах дії невизначеного стохастичного попиту. Закон управління будується у вигляді лінійного зворотного зв'язку за відхиленням поточного рівня запасів від страхового рівня, який обчислюється в режимі *on-line* на підставі даних про обсяги минулих продажів. На основі методу інваріантних еліпсоїдів задача видається в термінах лінійних матричних нерівностей, а синтез управління зводиться до задач одновимірної опуклою оптимізації та напіввизначеного програмування.

Ключові слова: мережа поставок, стратегія управління запасами, метод інваріантних еліпсоїдів, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.

The inventory control strategy synthesis problem in the supply network with structural constraints under an uncertain stochastic demand is considered. The control law is constructed in the form of linear feedback based on mismatch between the current state and safety stock level, which is calculated *on-line* on the basis of censored demand data. The control problem is represented in terms of the Linear Matrix Inequalities based on the Invariant Ellipsoids method, and the control synthesis is reduced to the Semi-Definite Programming and the one-dimensional convex optimization.

Keywords: supply network, inventory control strategy, invariant ellipsoids method, linear matrix inequality, semi-definite programming.