УДК 681.5.01

Ю. И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ В ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Рассматривается задача синтеза стабилизирующего управления запасами в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и структурных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий. Управление строится в виде линейной нестационарной обратной связи с использованием дискретного аналога производной вектора состояний. Для оценивания множества достижимости замкнутой системы применяется понятие инвариантного эллипсоида. С помощью техники линейных матричных неравенств задача синтеза управления сведена к совокупности задач полуопределенного программирования. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: управление запасами, множество достижимости, инвариантный эллипсоид, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

Введение. Среди основных направлений современной теории управления выделяется проблема синтеза автоматических систем в условиях неполной информации о параметрах объекта и внешних возмущающих воздействиях. Она является наиболее сложной в теоретическом плане и в то же время часто встречается в практических приложениях.

Такая задача возникает, например, при синтезе стратегии управления запасами в системе производства-хранения-распределения материальных ресурсов. Целью функционирования такой системы является полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при условии минимизации собственных издержек. Издержки связаны с необходимостью создания и хранения запасов материальных ресурсов.

Управление запасами заключается в определении моментов времени и объемов заказов на их восполнение. Из всего многообразия моделей управления запасами можно выделить два основных типа [1]: модель оптимального размера заказа и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера в моменты времени, определяемые в соответствии с выбранной стратегий. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией. Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией управления запасами. В данной работе рассматривается модель периодической проверки.

Для математического описания систем управления запасами применяются динамические сетевые модели, в которых используется представление

© Ю. И. Дорофеев, 2014

системы в виде ориентированного графа, вершины которого определяют виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Современная теория предлагает алгоритмы оптимального управления как детерминированными, так и стохастическими динамическими сетями. Однако детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы. При этом во многих случаях нет оснований или недостаточно информации, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные, то есть адекватно описываемые теоретико-вероятностными моделями. Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

В работе [2] предложен подход, основанный на концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий. Авторы предполагают, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству, и предлагают моделировать неопределенность спроса в виде интервала, в границах которого спрос произвольным образом принимает свои значения.

В настоящее время существуют различные подходы к решению задачи синтеза систем управления в условиях неопределенности. Один из них основан на применении производной вектора состояний в законе управления [3]. Наиболее существенное развитие в рамках данного подхода получил метод локализации [4], в соответствии с которым управление формируется не только в функции вектора состояний, но и в функции вектора, содержащего производные компонент вектора состояний. Сущность данного метода состоит в организации в системе специального «быстрого» контура, что позволяет формировать желаемые динамические свойства при неполной информации о параметрах объекта и внешних возмущениях.

Целью настоящей работы является разработка на основе принципа локализации нового метода синтеза стабилизирующего управления запасами для класса линейных дискретных систем производства-хранения-распределения ресурсов, которые функционируют в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса.

Постановка задачи. Рассмотрим систему управления запасами, представленную в виде динамической сети, состоящей из n узлов, в дискретном времени. Переменными состояний являются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами в текущем периоде, а возмущениями являются объемы спроса на ресурсы, которые поступают извне.

Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Для описания транспортных запаздываний используется модель дискретной задержки. Предполагается, что значения интервалов времени, определяющих длительность транспортировки ресурсов между узлами сети $T_{i,j},\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j$, и переработки ресурсов в узлах $T_i,\ i=\overline{1,n}$, известны и кратны периоду дискретизации. Тогда математическая модель сети описывается разностным уравнением с запаздыванием:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)+\sum_{t=0}^{\Lambda}\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{u}(k-t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}(k),\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}(k)\in\boldsymbol{R}^n$ – вектор состояний;

$\boldsymbol{u}(k)\in\boldsymbol{R}^m$ – вектор управляющих воздействий;

$\boldsymbol{d}(k)\in\boldsymbol{R}^q$ – вектор внешних возмущений;

Λ – целочисленная переменная, кратная периоду дискретизации, определяющая максимальное значение запаздывания управляемых потоков между всеми парами связанных узлов сети.

Значения матриц $\boldsymbol{B}_t,\ \boldsymbol{E}$ определяются структурой сети и формируются в соответствии с методикой, изложенной в работе [5]. В процессе функционирования системы должны выполняться следующие ограничения:

$$\boldsymbol{x}(k)\in X=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n:\ 0\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{x}^{\max}\right\},\quad \boldsymbol{u}(k)\in U=\left\{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^m:\ 0\le\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{u}^{\max}\right\}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x}^{\max}$, $\boldsymbol{u}^{\max}$ – векторы, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и объемы транспортировок, которые считаются заданными.

Относительно внешнего спроса известно лишь то, что он произвольным образом принимает значения из заданного множества:

$$\boldsymbol{d}(k)\in D=\left\{\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{R}^q:\ 0\le\boldsymbol{d}^{\min}\le\boldsymbol{d}\le\boldsymbol{d}^{\max}\right\},$$

где $\boldsymbol{d}^{\min}$, $\boldsymbol{d}^{\max}$ – векторы, которые предполагаются известными.

Для системы (1) рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами, которая для любого начального состояния $\boldsymbol{x}(0)\in X$ и внешнего спроса $\boldsymbol{d}(k)\in D$ обеспечивает полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса на ресурсы при условии минимизации критерия качества, определяющего собственные издержки, а также асимптотическую устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2).

Синтез стабилизирующего управления. Первым этапом решения задачи синтеза управления является преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний $\xi(k) = \left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k), \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k-1), \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k-2), \ldots, \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)\right]^{\mathrm{T}}$ [6].

Тогда уравнения расширенной модели сети примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \boldsymbol{A}\xi(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{d}(k), \\ \boldsymbol{x}(k) &= \boldsymbol{C}\xi(k), \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицы $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{N\times m}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{N\times q}$, $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{n\times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [5].

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, уравнение которого имеет вид

$$E(\boldsymbol{d}_c, \boldsymbol{P}_d) = \left\{\boldsymbol{d}(k) \in \boldsymbol{R}^q : \ \left(\boldsymbol{d}(k) - \boldsymbol{d}_c\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_d^{-1}\left(\boldsymbol{d}(k) - \boldsymbol{d}_c\right) \le 1\right\}. \tag{4}$$

Параметры эллипсоида $\boldsymbol{P}_d \in \boldsymbol{R}^{q\times q}$, $\boldsymbol{d}_c \in \boldsymbol{R}^q$ определяются путем решения задачи полуопределенного программирования (ПОП) аналогично [7].

Будем строить закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов, а также сигналу, который представляет дискретный аналог производной вектора состояний. Для этого вычислим первую разность по k вектора состояний расширенной модели и представим ее в следующем виде:

$$\xi(k-1) - \xi(k-2) = \left(\xi(k-1) - \xi^*\right) - \left(\xi(k-2) - \xi^*\right),$$

где $\xi^* = \underbrace{\left[\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}}\right]}_{\Lambda+1}^{\mathrm{T}}$ – составной вектор, в котором элементы вектора $\boldsymbol{x}^*$ определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений спроса с учетом величины запаздывания управляемых потоков и продуктивной модели Леонтьева:

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}\right)^{-1}\boldsymbol{d}^*, \quad \boldsymbol{d}_i^* = \begin{cases} \Lambda_i \boldsymbol{d}_i^{\max}, & i = \overline{1, q}, \\ 0, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \quad \Lambda_i = \max\left\{T_{j,i} + T_i, \, i, j = \overline{1, n}, \, j \ne i\right\}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности;

$\boldsymbol{\Pi} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ – технологическая матрица, значение элемента $\boldsymbol{\Pi}_{ij}$ которой равно количеству единиц ресурса i, необходимого для производства единицы ресурса j;

Λ_i – величина запаздывания управляемых потоков узла i.

Закон управления будет иметь вид:

$$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}_0(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)+\boldsymbol{K}_1(k)\left(\xi(k-1)-\xi^*\right)-\boldsymbol{K}_2(k)\left(\xi(k-2)-\xi^*\right), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{K}_0(k),\ \boldsymbol{K}_1(k),\ \boldsymbol{K}_2(k)\in\boldsymbol{R}^{m\times N}$ – матрицы коэффициентов обратной связи.

Введем блочную матрицу $\boldsymbol{K}(k)=\left[\boldsymbol{K}_0(k)\ \boldsymbol{K}_1(k)\ -\boldsymbol{K}_2(k)\right]$, составной вектор $\boldsymbol{v}(k)=\left[\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}},\left(\xi(k-1)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}},\left(\xi(k-2)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, и перепишем закон управления (6) в виде:

$$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{v}(k)\,. \tag{7}$$

Введем блочную матрицу $\boldsymbol{A}_B=\left[\boldsymbol{A}\ 0\ 0\right]$ и представим расширенную модель замкнутой системы для управления (7) в следующем виде:

$$\xi(k+1)=\left(\boldsymbol{A}_B+\boldsymbol{BK}(k)\right)\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{A}\xi^*+\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{d}(k)-\boldsymbol{d}_c\right)+\boldsymbol{Gd}_c\,. \tag{8}$$

Выполним аппроксимацию множества X допустимых значений состояний эллипсоидом, у которого вектор координат центра совпадает с вектором $\boldsymbol{x}^*$, а матрица $\boldsymbol{P}_x$ вычисляется на основании вектора $\boldsymbol{x}^{\max}$:

$$\boldsymbol{P}_x=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{4}\left(\min\left\{\boldsymbol{x}_1^*,\ \boldsymbol{x}_1^{\max}-\boldsymbol{x}_1^*\right\}\right)^2,\ldots,\frac{1}{4}\left(\min\left\{\boldsymbol{x}_n^*,\ \boldsymbol{x}_n^{\max}-\boldsymbol{x}_n^*\right\}\right)^2\right). \tag{9}$$

Синтез стабилизирующих алгоритмов управления, как правило, основывается на оценивании верхнего граничного значения критерия качества с помощью функции Ляпунова. Запишем критерий качества в случае бесконечного временного горизонта:

$$J_\infty(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{W}_u\boldsymbol{u}(k)\right), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{W}_\xi\in\boldsymbol{R}^{N\times N},\boldsymbol{W}_u\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы.

Первое слагаемое в выражении (10) определяет размеры штрафов за отклонение наличных уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов. Тогда задача синтеза управления, которое минимизирует издержки системы, сводится к решению минимаксной задачи:

$$\boldsymbol{u}(k)=\arg\min_{\boldsymbol{u}(k)\in U}\,(\max_{\boldsymbol{d}(k)\in E(\boldsymbol{d}_c,\boldsymbol{P}_d)}J_\infty(k))\,. \tag{11}$$

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (8):

$$V\left(\xi(k)-\xi^*\right)=\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{P}(k)\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (12) в силу системы (8) и потребуем, чтобы значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью:

$$V\left(\xi(k+1)-\xi^*\right)-V\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le -J_\infty(k)\,. \tag{13}$$

Если (13) выполняется, то следуя [8], можно показать, что функция Ляпунова (12) $\forall k\ge 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (10):

$$\max_{\boldsymbol{d}(k)\in E(\boldsymbol{d}_c,\boldsymbol{P}_d)} J_\infty(k)\le V\left(\xi(k)-\xi^*\right). \tag{14}$$

Тогда, в соответствии с (14), задача (11) эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова

$$\boldsymbol{u}(k)=\arg\min_{\boldsymbol{u}(k)\in U} V\left(\xi(k)-\xi^*\right),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна задаче вычисления минимального скалярного значения $\gamma(k)>0$ такого, что $\forall k\ge 0$ выполняется неравенство:

$$\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le\gamma(k)\,.$$

В соответствии с [8] введем матричную переменную $\boldsymbol{Q}(k)=\gamma(k)\boldsymbol{P}^{-1}(k)$ и получим эквивалентную задачу:

$$\begin{gathered}\gamma(k)\to\min_{\boldsymbol{Q}(k)}\\ \text{при ограничениях }\ \gamma(k)>0,\quad \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le 1,\end{gathered} \tag{15}$$

которую можно трактовать как задачу минимизации инвариантного эллипсоида, который аппроксимирует множество достижимости замкнутой системы (8) при действии возмущений $\boldsymbol{d}(k)\in E(\boldsymbol{d}_c,\boldsymbol{P}_d)$. С помощью леммы Шура [9] нестрогое неравенство в (15) представим в виде линейных матричных неравенств (ЛМН) и получим задачу ПОП:

$$\begin{gathered}\gamma(k)\to\min_{\boldsymbol{Q}(k)}\\ \text{при ограничениях }\ \gamma(k)>0,\quad \boldsymbol{Q}(k)\succeq 0,\quad \begin{bmatrix}1 & \left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}}\\ \left(\xi(k)-\xi^*\right) & \boldsymbol{Q}(k)\end{bmatrix}\succeq 0.\end{gathered}$$

Следуя [8], введем матричную переменную $\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{K}(k) \cdot \text{block diag}\big(\boldsymbol{Q}(k), \boldsymbol{Q}(k), \boldsymbol{Q}(k)\big)$.

Используя S–процедуру [9] неравенство (13), гарантирующее убывание с течением времени значения функции Ляпунова (12), и неравенство (4), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий множество D значений внешних воздействий, представим в виде ЛМН с помощью методики, изложенной в работе [10]. Также представим в виде ЛМН ограничения на значения состояний и управляющих воздействий (2). Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

Теорема. Пусть матрицы $\hat{\boldsymbol{Q}}(k)$, $\hat{\boldsymbol{Y}}(k)$ получены в результате решения следующей оптимизационной задачи

$$\gamma(k) \to \min_{\boldsymbol{Q}(k), \boldsymbol{Y}(k), \alpha} \tag{16}$$

при ограничениях на матричные переменные $\boldsymbol{Q}(k)$, $\boldsymbol{Y}(k)$ и скалярные параметры α, $\gamma(k)$:

$$\alpha > 0, \quad \gamma(k) > 0, \quad \boldsymbol{Q}(k) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \big(\xi(k) - \xi^*\big)^{\mathrm{T}} \\ \big(\xi(k) - \xi^*\big) & \boldsymbol{Q}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag}\big(\boldsymbol{Q}(k), 0, 0\big) & 0 & 0 & \big(\boldsymbol{A}_B \boldsymbol{Q}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}(k)\big)^{\mathrm{T}} & 0 & \text{diag}\big(\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{W}_{\xi}^{\frac{1}{2}}, 0, 0\big) & Y^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{W}_u^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \big(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\big)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A}_B \boldsymbol{Q}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}(k) & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} & \boldsymbol{G} & \boldsymbol{Q}(k) & \gamma(k)\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_d^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(k)\boldsymbol{P}_d^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \gamma(k)\alpha\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \text{diag}\big(\boldsymbol{W}_{\xi}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}(k), 0, 0\big) & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{W}_u^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_x & \gamma(k)\boldsymbol{C} \\ \gamma(k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{v}(k) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{\max}\boldsymbol{v}^{+}(k)\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(k) & \boldsymbol{Y}(k) \\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(k) & \text{block diag}\big(\boldsymbol{Q}(k), \boldsymbol{Q}(k), \boldsymbol{Q}(k)\big) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{20}$$

где «$^{+}$» – псевдообращение Мура-Пенроуза.

Если задача (16)–(20) имеет решение, то система (3), замкнутая с помощью закона управления (7), для любого начального состояния $\boldsymbol{x}(0) \in X$ и внешнего возмущения $\boldsymbol{d}(k) \in E(\boldsymbol{d}_c, \boldsymbol{P}_d)$ является асимптотически устойчивой, а регулятор с матрицей

$$\left[\boldsymbol{K}_0(k)\;\; \boldsymbol{K}_1(k)\;\; -\boldsymbol{K}_2(k)\right] = \hat{\boldsymbol{Y}}(k)\cdot \text{block diag}\left(\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}(k), \hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}(k), \hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}(k)\right),$$

доставляет минимум инвариантному эллипсоиду для замкнутой системы (8) с ограничениями (2).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в [10] с очевидными техническими изменениями.

Отметим, что задача (16)–(20) может рассматриваться как совокупность задачи одномерной выпуклой оптимизации по параметру α и задачи ПОП.

Численный пример. В качестве примера рассмотрим модель сети, которая описывается графом $G = (\{1,2,3\}, \{(2,1),(2,3),(3,1)\})$ [11]**.** Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции $\boldsymbol{\Pi}_{ij}$, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i.

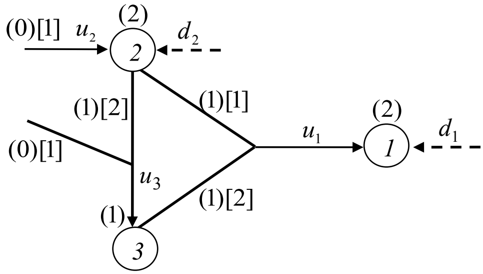


Рис. 1 – Графическое представление модели сети

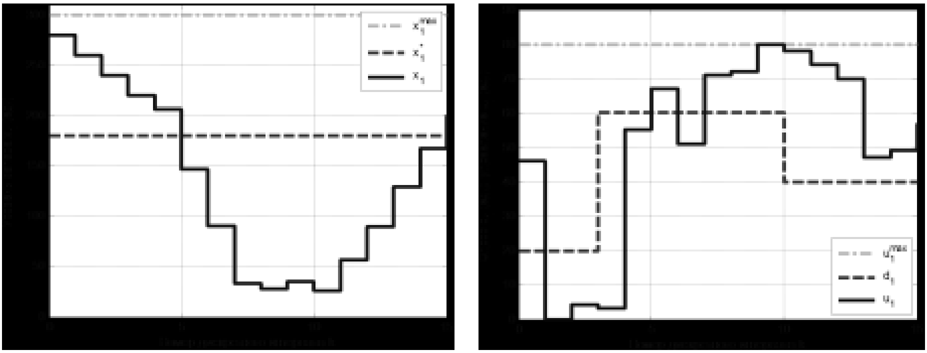
Специфика рассматриваемой сети в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

Заданы структурные ограничения $\boldsymbol{x}^{\max} = [300, 2000, 500]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}^{\max} = [80, 1000, 200]^{\mathrm{T}}$, граничные значения внешнего спроса $\boldsymbol{d}^{\min} = [20, 50]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{d}^{\max} = [60, 100]^{\mathrm{T}}$ и начальные условия $\boldsymbol{x}(0) = [280, 1100, 400]^{\mathrm{T}}$.

После вычисления величины запаздывания материальных потоков всех узлов сети находим максимальное значение $\Lambda = 3$. По формуле (5) вычисляем уровни страховых запасов узлов сети $\boldsymbol{x}^* = [180, 1100, 360]^{\mathrm{T}}$. В результате решения соответствующей задачи ПОП [7] определяем параметры эллипсоида (4), аппроксимирующего множество D значений внешнего спроса, $\boldsymbol{d}_c = [40, 75]^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{P}_d = \mathrm{diag}(800, 1250)$, по формуле (9) вычисляем матрицу эллипсоида, аппроксимирующего множество X допустимых значений состояний, $\boldsymbol{P}_x = \mathrm{diag}(3600, 202500, 14400)$

Диагональные элементы весовых матриц $\boldsymbol{W}_\xi$ и $\boldsymbol{W}_u$ выбраны равными 1.0×10^{-8} и 5.0×10^{-7}, соответственно. Численное решение задачи (16)–(20) получено с помощью свободно распространяемого пакета CVX [12].

Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования для узла 1 при $\alpha = 3.0$ и скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2.



а *б*

Рис. 2 – Графики переходных процессов для узла 1 системы управления запасами:
а – значения наличного и страхового уровней запасов;
б – значения внешнего спроса и управляющих воздействий

Выводы. Предложен подход к решению задачи синтеза стабилизирующего управления запасами в динамических сетях со структурными ограничениями в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса. Закон управления строится в виде линейной нестационарной обратной связи с использованием дискретного аналога производной вектора состояний, что позволяет формировать желаемые динамические свойства замкнутой системы при неполной информации о внешних возмущениях. Для оценивания множества достижимости замкнутой системы применяется понятие инвариантного эллипсоида. С помощью техники линейных матричных неравенств численное решение задачи синтеза сведено к совокупности задач полуопределенного программирования, и опирается на свободно распространяемые программные реализации методов решения задач выпуклой оптимизации.

Список литературы: **1.** *Лотоцкий В. А.* Модели и методы управления запасами / *В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель*. – М. : Наука, 1991. – 189 с. **2.** *Bertsekas D. P.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / *D. P. Bertsekas, I. Rhodes* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128. **3.** *Востриков А. С.* Системы с производной вектора состояния в управлении / *А. С. Востриков, В. И. Уткин, Г. А. Французова* // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 22–25. **4.** *Востриков А. С.* Принцип локализации в задаче синтеза систем автоматического управления / *А. С. Востриков* // Изв. вузов. Сер.: Приборостроение. – 1988. – № 2. – С. 42–49. **5.** *Дорофеев Ю. И.* Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / *Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко* // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16–27. **6.** *Blanchini F.* Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / *F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Trans. on robotics and automation. – 2000. – Vol. 16. – No. 3. – P. 313–317. **7.** *Дорофеев Ю. И.* Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием техники линейных матричных неравенств / *Ю. И. Дорофеев* // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2014. – Вип. 4(41). – С. 34–41. **8.** *Boyd S.* Linear matrix inequalities in system and control theory / *S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan*. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 187 p. **9.** *Баландин Д. В.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / *Д. В. Баландин, М. М. Коган*. – М .: Физматлит, 2007. – 280 с. **10.** *Дорофеев Ю. И.* Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / *Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146–160. **11.** *Blanchini F.* Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / *F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Trans. on robotics and automation. – 1997. – Vol. 13. – P. 633–645. **12.** *Grant M.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / *M. Grant, S. Boyd* // Режим доступа: http://cvxr.com/cvx.

Bibliography (transliterated): **1.** Lototskij, V. A., and A. S. Mandel'. *Modeli i metody upravlenija zapasami*. Moscow: Nauka, 1991. Print. **2.** Bertsekas, D. P., and I. Rhodes. "Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty." IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 16. 1971. 117–128. Print. **3.** Vostrikov, A. S, V. I. Utkin, and G. A. Francuzova. "Sistemi s proizvodnoj vektora sostojanija v upravlenii." *Avtomatika i telemehanika.* No. 3. 1982. 22–25. Print. **4.** Vostrikov, A. S. "Princip lokalizacii v zadache sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija." *Izv. vuzov. Ser.: Priborostroenie*. No. 2. 1988. 42–49. Print. **5.** Dorofieiev, Yu. I., and A. A. Nikulchenko. "Postroenie matematicheskih modelej upravliaemih setej postavok s uchetom zapazdivanij potokov." Sistemni doslidzhennia ta informacijni tehnologii. No. 1. 2013. 16–27. Print. **6.** Blanchini, F., et al. "Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays." IEEE Trans. on robotics and automation. Vol. 16. No. 3. 2000. 313–317. Print. **7.** Dorofieiev, Yu. I. "Sintez sistemy optimal'nogo upravlenija zapasami s diskretnim PID-reguliatorom s ispol'zovaniem tehniki linejnih matrichnih neravenstv." Zbirnik naukovih prac′ Kharkivs'kogo universitetu Povitrianih Sil. Vip. 4(41). 2014. 34–41. Print. **8.** Boyd, S., et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994. Print. **9.** Balandin, D. V., and M. M. Kogan. Sintez zakonov upravlenija na osnove linejnih matrichnih neravenstv. Moscow: Fizmatlit, 2007. Print. **10.** Dorofieiev, Yu. I., L. M. Lyubchyk and A. A. Nikulchenko. "Robastnoe stabilizirujuschee upravlenie zapasami v setiah postavok v uslovijah neopredelennosti vneshnego sprosa i intervalov zaderzhki popolnenija zapasov." Izv. RAN. Teorija i sistemi upravlenija. No. 5. 2014. 146–160. Print. **11.** Blanchini, F., F. Rinaldi and W. Ukovich. "Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs." IEEE Trans. on robotics and automation. Vol. 13. 1997. 633–645. Print. **12.** Grant, M., and S. Boyd. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 <http://cvxr.com/cvx>.

Поступила (received) 05.12.2014