УДК 519.7

О. М. НАЗАРЕНКО

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ СЛАБО ФОРМАЛІЗОВАНИХ ПРОЦЕСІВ З НЕВІДОМИМИ ВХОДАМИ

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації лінійної стаціонарної моделі з невідомими входами. Моделювання невідомих входів проводиться згідно принципу мультиплікатора. Траєкторії руху введених керувань розкладаються на трендову та періодичну складові, що дозволяє розв’язати диференціальні рівняння руху в явному вигляді. Параметрична ідентифікація невідомих коефіцієнтів здійснюється методами економетрики при певних обмеженнях на елементи матриць. Апробація побудованих алгоритмів проводиться на реальних статистичних даних.

Ключові слова: специфікація, ідентифікація, циклічний процес, імітація, прогнозування, апробація моделі.

Вступ. Побудова математичних моделей динамічних процесів в техніці та економіці є актуальною і складною проблемою, ефективне розв’язання якої спряжене з певними труднощами не лише зв’язаними з можливістю застосування математичних методів, але і принципово гносеологічного характеру [1, 2]. На відміну від таких природничих наук як фізика і механіка, технічній та економічній науці не вдається встановити фундаментальні і динамічні кількісні закономірності, які зв’язують між собою різноманітні числові показники. Складність, швидка мінливість, присутність не формалізованих і невизначених факторів, обумовлених ірраціональною поведінкою людини, – основні причини, які заважають побудові математичних моделей, що адекватно описують еволюцію технічних та економічних систем.

Дослідження технологічних та економічних процесів, які часто класифікують як слабо формалізовані, повинні, передусім, спиратись на постійний аналіз статистичних даних. Для конструювання динамічних моделей тут необхідно виробити принципи, що спираються на технічні та економічні науки і дозволяють генерувати алгебраїчні та диференціальні рівняння, які однозначно визначають еволюцію досліджуваного процесу [3, 4].

Ключовою проблемою математичного моделювання слабо формалізованих динамічних систем є ідентифікація рівнянь руху, оскільки на практиці вони не специфіковані [5, 6]. Тут невизначеними є не лише фазові координати $\mathbf{k}$, а й розмірність n фазового простору. Крім того, параметри динамічної моделі заздалегідь невідомі і повинен бути розроблений відповідний алгоритм параметричної ідентифікації. Проблема може ускладнюватися тим, що для фазових координат $\mathbf{k}$ і для змінних $\mathbf{I}$, які подаються на вхід динамічної системи, відсутня статистична інформація. У подібних ситуаціях можна використовувати заміщуючі змінні (наприклад, якщо невідомі статистичні дані по фазовим координатам, але відомі дані по їх приростам), а вхідний сигнал $\mathbf{I}(t)$ можна моделювати за допомогою принципів мультиплікатора або акселератора [7], зв’язавши вхід $\mathbf{I}(t)$ лінійною залежністю з деяким вектором $\mathbf{x}(t)$ або $\dot{\mathbf{x}}(t)$ відповідно. Якщо відома статистична інформація $\{\mathbf{x}_t\}$, $t=\overline{1,N}$, то $\mathbf{x}$ виступає у ролі вектора керувань і за його допомогою налаштовують динамічну модель на високі імітаційні властивості [8].

У керованих динамічних системах конструювання закону керування здійснюється за допомогою регулятора, який повинен реалізовувати принцип оберненого зв’язку [9, 10]: вектор керувань $\mathbf{x}$ у кожний момент часу є функцією фазових координат $\mathbf{k}$ та їх похідних $\dot{\mathbf{k}}$.

У реальних умовах окремі елементи динамічної системи взаємодіють між собою, причому ці зв’язки встановлюються протягом тривалого часу її функціонування. Це означає, що параметри диференціальних рівнянь руху задовольняють певним співвідношенням, заздалегідь невідомим. Тому регулятор динамічної системи може складатись з декількох регулюючих пристроїв, кожний з яких відповідає за певну змінну, що характеризує дану систему в цілому, і відносно якої є статистичні дані. На виході регулюючий пристрій повинен генерувати числову інформацію для специфікованих співвідношень між параметрами диференціальних рівнянь. Чим більше регулюючих пристроїв буде використано, тим менше стає число ступенів вільності при ідентифікації невідомих параметрів.

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарну динамічну модель з невідомим входом $\mathbf{I}(t)$ вигляду

$$\dot{\mathbf{k}}(t)+\lambda\mathbf{k}(t)=\mathbf{I}(t),\quad t\in[t_0,\ t_f],\quad \mathbf{k}(t_*)=\mathbf{k}_*. \quad (1)$$

Дана модель широко використовується в макроекономічних дослідженнях і описує інвестиційний розвиток макроекономічної системи [11].

Невідомий вхід $\mathbf{I}(t)$ подамо згідно принципу мультиплікатора [7]:

$$\mathbf{I}(t)=\boldsymbol{R}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

причому на елементи матриці $\boldsymbol{R}$ накладаються обмеження-нерівності:

$$r_{ii}>0;\quad r_{ij}<0,\quad j\neq i,\quad 0<r_j=\sum_{i=1}^{n} r_{ij}<1,\ i,j=\overline{1,n}. \quad (3)$$

При виконанні (3) існує обернена матриця $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{-1}$ [12].

Вибір фазових координат $\mathbf{k}$ та керувань $\mathbf{x}$ залежить від мети дослідження та особливостей даного процесу. Припускаємо, що специфіка статистичної інформації така, що відомі дані $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{\mathbf{n}_t\}$, $t=\overline{1,N}$, де $\mathbf{n}_t=\mathbf{k}_t-\mathbf{k}_{t-1}$. Замість фазових координат $\mathbf{k}$ будемо розглядати заміщуючі змінні $\mathbf{y}$ і використовувати статистичні дані $\{\mathbf{y}_t\}$. Маємо (вектор $\mathbf{k}_0$ заздалегідь невідомий)

$$\mathbf{k}_t=\mathbf{y}_t+\mathbf{k}_0,\ \mathbf{y}_t=\sum_{j=1}^{t}\mathbf{n}_j. \tag{4}$$

Задача полягає у специфікації фазових координат k_i і відповідних керувань x_i $(i=\overline{1,n})$, визначенні розмірності n фазового простору та оцінюванні невідомих коефіцієнтів моделі (1), (2). Оскільки метою дослідження є прогнозування майбутніх станів системи, то ідентифікацію невідомих параметрів $\lambda, \mathbf{k}_0, \boldsymbol{R}$ будемо проводити через призму імітаційних та прогнозних властивостей фазових координат і керувань. Граничні значення диференціальних рівнянь (1) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо $t_*=N+1$, тоді відрізок $[1, N]$ будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_f]$ – періодом прогнозування. При оцінених значеннях невідомих параметрів розв'язок задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості модельних траєкторій на проміжку $[1, t_*)$ і встановлювати прогнозні властивості на відрізку $[t_*, t_f]$. Довжина N періоду ідентифікації повинна бути достатньо великою, щоб на ньому стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. Для даного дослідження важливо, щоб довжина часових рядів задовольняла нерівність $l\geq 55$. Стаціонарність моделі характеризують високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [5, 8]. При виконані умови стаціонарності, оцінену на періоді ідентифікації $[1, N]$ лінійну модель (1) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_f]$ за умови $t_f-t_*\ll N$ в силу інерційності динамічної системи [13].

Метод розв'язання задачі. У випадку стаціонарних слабо формалізованих процесів тенденцію розвитку динамічної системи будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес будемо описувати за допомогою розкладу в ряд Фур'є відхилень статистичних даних відносно відповідного тренду [10]. Тоді траєкторії керувань $\mathbf{x}(t)$ знайдемо після оцінювання регресійної моделі

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_t-\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{b}(t-\bar{t})+\sum_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{a}_k\cos\omega_k t+\boldsymbol{b}_k\sin\omega_k t)+\boldsymbol{v}_t,\\ t=\overline{1,N},\ \omega_k=2\pi k/N,\end{gathered} \tag{5}$$

де ω_k – частота k-ї гармоніки; $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_k$ – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в обрізаний ряд Фур'є; $\boldsymbol{v}_t$ – вектор випадкових збурень. При вказаних значеннях частот вектор середніх значень залишків дорівнює нулю $(\bar{\boldsymbol{v}}=\mathbf{0})$.

Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (5), на які налаштовані гармонічні хвилі, будемо здійснювати за допомогою регулятора, що обчислює сумарне значення $x(t)$ керувань. Для цього складається регресійна модель

$$\begin{gathered}x_t-\bar{x}=b(t-\bar{t})+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t)+v_t,\\ t=\overline{1,N},\quad x(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t),\end{gathered} \tag{6}$$

і за допомогою критерію Стьюдента [14] виділяються значущі гармоніки [10].

Процес виділення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної динамічної системи, проводимо сумісно з визначенням періоду коливань T. Для встановлення оптимального значення N враховуємо поведінку досліджуваної системи поза періодом ідентифікації [1, N]. Для цього використовуємо відому статистичну інформацію відносно x, що передує моменту t_0. Значення t_0 (початок періоду ідентифікації) нам заздалегідь невідоме. Якщо N вибране таким, що модельна траєкторія коливань

$$u(t)=\sum_k(a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t) \tag{7}$$

при $t\leq 0$ змінюється в напрямку статистичних даних u_t $(t=0, -1,\ldots)$, то покладаємо $N = T$.

Якщо за допомогою екстраполяції назад, ми встановили період коливань, то тим самим визначено оптимальний період ідентифікації [1, N]. Вказана процедура дозволяє виділити $n-1$ значущих гармонік, що розповсюджуються у даній системі і, отже, визначена оптимальна розмірність n фазового простору. Специфікація компонент вектора керувань $\mathbf{x}$ проводиться при заданому значенні n. При поділі множини $\mathbf{x}$ на підмножини $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ добиваємось, щоб властиві їм гармонічні коливання налаштовувались на частоти із спектра (5).

Нехай вектор керувань $\mathbf{x}(t)$ дорівнює

$$\mathbf{x}(t)=\bar{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{b}}(t-\bar{t})+\sum_{k=1}^{n-1}(\hat{\boldsymbol{a}}_k\cos\omega_k t+\hat{\boldsymbol{b}}_k\sin\omega_k t). \tag{8}$$

У випадку (8) можна отримати розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) у явному вигляді. Помножимо рівняння (1) на $e^{\lambda t}$ і проінтегруємо його від заданого значення t_* до моменту часу t:

$$\int_{t_*}^{t}e^{\lambda\tau}(\dot{\mathbf{k}}(\tau)+\lambda\mathbf{k}(\tau))d\tau=\int_{t_*}^{t}e^{\lambda\tau}\boldsymbol{R}\mathbf{x}(\tau)\,d\tau.$$

Після деяких перетворень одержуємо

$$\mathbf{k}(t)=e^{-\lambda(t-t_*)}\mathbf{k}_*+\boldsymbol{R}e^{-\lambda t}\int_{t_*}^{t}e^{\lambda\tau}\mathbf{x}(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

У випадку (8) інтеграл в (9) дорівнює

ISSN 2079-0023 (print)
ISSN 2410-2857 (online)

$$\int_{t_*}^{t} e^{\lambda\tau}\mathbf{x}(\tau)d\tau = e^{\lambda t}\mathbf{f}(t)\Big|_{t_*}^{t}, \qquad (10)$$

де $\mathbf{f}(t)$ – відома вектор-функція при заданому розкладі (8) вектора $\mathbf{x}(t)$.

Тоді розв’язок (9) приймає вигляд

$$\mathbf{k}(t) = \boldsymbol{R}\mathbf{f}(t). \qquad (11)$$

Тепер задача зводиться до оцінювання невідомих матриці $\boldsymbol{R}$ і параметра λ. При практичних дослідженнях на елементи матриці $\boldsymbol{R}$ накладаються обмеження вигляду (3). Тому ідентифікація моделі (1) спряжена з деякими труднощами.

Введемо у розгляд регулятор, який у даній роботі буде складатися з двох регулюючих пристроїв, які контролюють зміни сумарних значень y і f. Регресійні рівняння, які відповідають вказаному регулятору, наступні (h_t , w_t – випадкові відхилення):

$$\begin{aligned} y_t - \bar{y} &= \mathbf{r}'\,(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + h_t, \quad t = \overline{1, N}, \\ f(t) - \bar{f} &= \mathbf{q}'(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}) + w_t, \quad t = \overline{1, N}, \end{aligned} \qquad (12)$$

причому на параметри моделей регулюючих пристроїв накладаються обмеження-нерівності

$$\lambda > 0, \quad \mathbf{q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} > \mathbf{0}. \qquad (13)$$

Якщо отримані МНК-оцінки $\hat{\lambda}$, $\hat{\mathbf{q}}$ і $\hat{\mathbf{r}}$, то наступним кроком є оцінювання матриці $\boldsymbol{R}$, що фігурує в (11). Складаємо регресійну модель

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y} = \boldsymbol{R}\,(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + \mathbf{h}_t, \quad t = \overline{1, N}, \qquad (14)$$

де вектор-функція $\mathbf{f}(t)$ визначається з (10) за умови, що вектор керувань $\mathbf{x}(t)$ ідентифікований згідно (8).

Оцінювання регресійної моделі (14) необхідно проводити при обмеженнях на елементи матриці $\boldsymbol{R}$, що випливають з (3) і (12), (13):

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \hat{r}_j;\ \sum_{i=1}^{n} \hat{q}_i r_{ij} = 1;\ r_{ii} > 0; r_{ij} < 0,\ j \neq i,\ i, j = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Практична реалізація алгоритму. Апробація побудованої моделі проводилася на базі статистичних даних макроекономічного розвитку Франції за 1956–2011 рр. [15]. У якості координат фазового вектора $\mathbf{y}$ вибиралися прирости основних фондів (статистичні дані – Gross fixed capital formation), а координатами вектора керувань $\mathbf{x}$ – випуски секторів (статистичні дані – Value added). Чисельний експеримент встановив оптимальне значення об’єму вибірки N = 50, при цьому 1960–2009 рр. – період ідентифікації, 2010–2011 рр. – період прогнозування. Встановлено, що при рівні значущості α=0,005 і числу ступенів вільності l=N–2n економіці Франції властиві чотири значущі гармоніки (k=1, 2, 3, 6): хвиля Кондратьєва (k=1), хвиля Кузнеця (k=3), хвиля Жугляра (k=6) [16], а також проявляє себе хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва (k=2). Отже, макроекономічну систему Франції необхідно ділити на п’ять секторів і налаштування секторів-кандидатів на вказані гармонічні коливання привело до такого оптимального поділу економіки Франції на сектори: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (Service Industries).

Оцінювання моделі (8) дало наступні значення коефіцієнтів детермінації R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл. 1).

Таблиця 1 – Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	∑
R^2	0,5231	0,8548	0,8993	0,8220	0,8756	0,8021

Аналіз табл. 1 показує, що коливання випусків навколо відповідних трендів є відчутними. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань наведені в табл. 2.

Таблиця 2 – Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	k =1	k =2	k =3	k =6	∑
1	0,9523	0,0179	0,0205	0,0020	0,9926
2	0,6319	0,2883	0,0486	0,0072	0,9760
3	0,7604	0,1792	0,0385	0,0035	0,9815
4	0,8661	0,0911	0,0220	0,0045	0,9836
5	0,8174	0,1632	0,0061	0,0017	0,9882
∑	0,8082	0,1596	0,0186	0,0046	0,9909

Як бачимо, хвиля Кондратьєва вносить основний вклад в коливання всіх секторів. Друга хвиля особливо проявляє себе у третьому і п’ятому секторах, а хвиля Кузнеця – у п’ятому. Вклад хвилі Жугляра є меншим у порівнянні з іншими хвилями, але він є значущим у функціях коливань випусків.

Сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань становить від 97,60% (2-й сектор) до 99,26% (1-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків. Якість модельних траєкторій випусків оцінюється в табл. 3.

Таблиця 3 – Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	∑
R^2	0,9992	0,9991	0,9989	0,9989	0,9995	0,9992

На рис.1 приведені графіки модельних кривих валових випусків економіки в цілому (ВВП) та їх коливань. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані безрозмірні шляхом ділення розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості моделі (8).

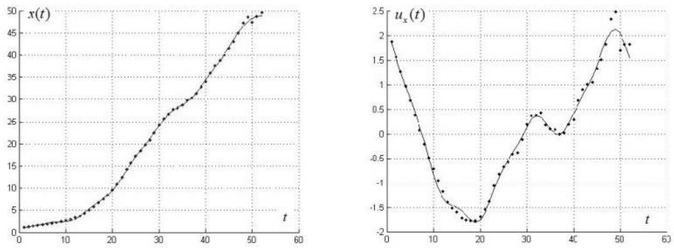

Рис. 1 – Модельні криві ВВП та відповідних коливань за 1960–2011 рр.

Наступним кроком є оцінювання регресійних рівнянь (12), які відповідають першому і другому регулюючим пристроям. МНК-оцінки невідомих коефіцієнтів дорівнюють:

$\hat{\lambda} = 0{,}0177$, $\hat{r}_1 = 0{,}2083$, $\hat{r}_2 = 0{,}2281$, $\hat{r}_3 = 0{,}3390$, $\hat{r}_4 = 0{,}3552$, $\hat{r}_5 = 0{,}2508$, $\hat{q}_1 = 4{,}8017$, $\hat{q}_2 = 4{,}3843$, $\hat{q}_3 = 2{,}9494$, $\hat{q}_4 = 2{,}8151$, $\hat{q}_5 = 3{,}9867$.

При заданому $\hat{\lambda}$ обчислюємо інтеграли, що фігурують в (10), і знаходимо невідому вектор-функцію $\mathbf{f}(t)$. Далі оцінюємо модель (14) при обмеженнях (15) і додаткових обмеженнях на діагональні елементи матриці $\boldsymbol{R}$ (випливають з фізичної сутності задачі):

$$0{,}3 + 0{,}6\,\hat{r}_j < r_{ii} < 0{,}6 + 0{,}3\,\hat{r}_j,$$

У табл. 4 приведені МНК-оцінки елементів $\boldsymbol{R}$.

Таблиця 4 – МНК-оцінки елементів матриці $\boldsymbol{R}$

0,4409	–0,0032	–0,0142	–0,0092	–0,0169
–0,1298	0,5638	–0,0138	–0,1986	–0,1183
–0,0035	–0,0808	0,5428	–0,1144	–0,0967
–0,0177	–0,0414	–0,1688	0,6819	–0,0971
–0,0817	–0,2103	–0,0069	–0,0044	0,5798

Розроблений алгоритм дозволяє оцінити невідомі значення основних фондів (ОФ) у початковий момент часу (4). Ці значення дозволяють відновити невідомі статистичні дані по ОФ. Крім того, згідно моделі (2) можна відновлювати статистичні дані по інвестиціям. Траєкторії ОФ та інвестицій наведені на рис. 2.

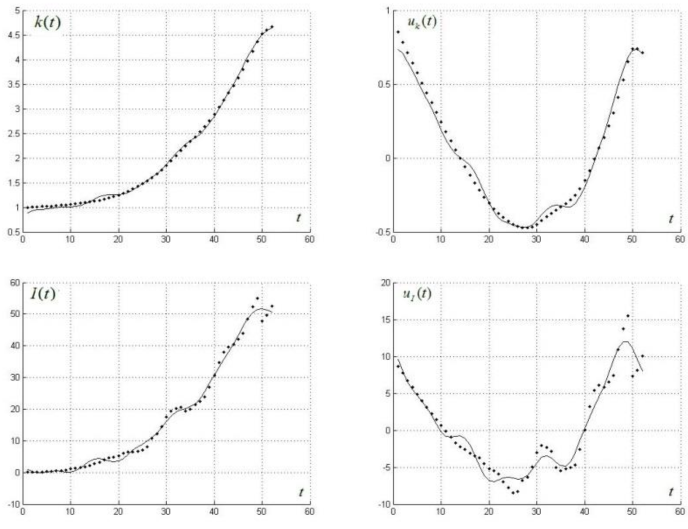

Рис. 2 – Модельні траєкторії ОФ, інвестицій та відповідних коливань

На рис. 2 точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією траєкторії руху (всі дані безрозмірні шляхом ділення на значення у початковому 1960 р.).

Аналіз імітаційних та прогнозних властивостей модельних кривих вказує на їх адекватність статистичним даним.

Висновки. У даній роботі запропоновано алгоритм параметричної ідентифікації стаціонарної динамічної моделі з невідомим входом. Траєкторії руху керувань моделюються за допомогою розкладання на трендову та періодичну складові, що дозволяє розв'язати диференціальні рівняння руху в явному вигляді. Апробація побудованих алгоритмів проводилась на статистичних даних реальної макроекономічної динаміки. Виявлені значущі гармонічні хвилі, характерні для даної системи. На параметри моделі накладалися обмеження-нерівності, що випливають з фізичної сутності задачі. Це дозволило отримати криві фазових координат, керувань і невідомого входу, які мають високоякісні імітаційні та прогнозні властивості, що свідчить про адекватність запропонованої моделі статистичним даним.

Список літератури: **1.** *Глушков В. М.* Моделирование развивающихся систем / *В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко* // М. : Наука, 1983. – 350 с. **2.** *Aubin J. P.* Dynamic Economic Theory / *J. P. Aubin* // Springer-Verlag, 1997. – 510 p. **3.** *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. / *В. М. Кунцевич* // К. : Наук. думка, 2006. – 264 с. **4.** *Альбрехт Э. Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов / *Э. Г. Альбрехт* // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002. – Т. 5. – С. 54–86. **5.** *Greene W. H.* Econometric Analysis / *W. H. Greene* // 5th ed. – N.Y. : Pearson Educ. Int, 2003. – 1056 p. **6.** *Ramsay J. O.* Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / *J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell, J. Cao* // J. of the Royal Stat. Society. Series B. – 2007. – Part 5, №. 69. – P. 741–796. **7.** *Колемаев В. А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем / *В. А. Колемаев* // М. : Юнити-Дана, 2005. – 295 с. **8.** *Назаренко А. М.* Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей / *А. М. Назаренко, Д. В. Фильченко* // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев. – 2009. – Вып. 158. – С. 81–99. **9.** *Бабаков И. М.* Теория колебаний / *И. М. Бабаков* // Изд. 4-е, исправл. – М. : Наука, 2004. – 591 с. **10.** *Назаренко О. М.* Ідентифікація та прогнозування стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в *n*-вимірному просторі. / *О. М. Назаренко* // Вісник НТУ«ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37 (1010). – С. 90–104. **11.** *Solow R. M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth / *R. M. Solow* // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – № 70. – P. 65–94. **12.** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / *Ф. Р. Гантмахер* // 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1966. – 576 с. **13.** *Айвазян С. А.* Прикладная статистика и основы економетрики / *С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян* // М. : ЮНИТИ, 1998. – 1000 с. **14.** *Назаренко О. М.* Основи економетрики / *О. М. Назаренко* // Вид. 2-ге, перероб.: Підручник – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с. **15.** INSEE – Режим доступа : http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action – Дата звернення : 20 квітня 2015. **16.** *Korotayev A. V.* Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis / *A. V. Korotayev, S. V. Tsirel* // Structure and Dynamics. – 2010. – Vol. 4, № 1. – P. 3–57.

Bibliography (transliterated): **1.** Hlushkov V. M., Ivanov V. V., Yanenko V. M. *Modelirovanie razvivayuschihsya sistem* // M. : Nauka, 1983. – 350. Print. **2.** Aubin, J. P. Dynamic Economic Theory // *Springer-Verlag*, 1997. – 510. Print. **3.** Kuntsevich V. M. *Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: garantirovannyie rezultatyi v zadachah upravleniya i identifikatsii. – K. : Nauk. dumka*. – 2006. – 264. Print. **4.** Albreht E. G. Metodika postroeniya i identifikatsii matematicheskih modeley makroekonomicheskih protsessov // *Elektronnyiy zhurnal «Issledovano v Rossii»*. – 2002. – T. 5. – 54–86. Print. **5.** Greene W. H. *Econometric Analysis // 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int.* – 2003. – 1056. Print. **6.** Ramsay J. O., Hooker G., Campbell D., Cao J. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach // *J. of the Royal Stat. Society. Series B.* – 2007.– Part 5, №. 69. – 741–796. Print. **7.** Kolemaev V. A. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie. Modelirovanie makroekonomicheskih protsessov i sistem // M: Yuniti-Dana*, 2005. – 295. Print. **8.** Nazarenko A. M., Filchenko D. V. Identifikatsiya i optimizatsiya slabo formalizovannyih protsessov v klasse statsionarnyih LQ modeley // *Kibernetika i vyichislitelnaya tehnika.*– Kiev, 2009. – Vyp. 158. – 81–99. Print. **9.** Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy // Izd. 4-e, ispravl. – M.: Nauka*, 2004. – 591. Print. **10.** Nazarenko O. M. IdentifikatsIya ta prognozuvannya statsionarnih slabo formalizovanih protsesiv z efektom zapiznennya v n-vimirnomu prostori. // *Visnik NTU«HPI». Seriya: Matematichne modelyuvannya v tehnitsi ta tehnologiyah. – Harkiv: NTU «HPI»,* 2013. – № 37 (1010). – 90–104. Print. **11.** *Solow R. M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly Journal of Economics*. – 1956. – № 70. –65–94. Print. **12.** Gantmaher F. R. *Teoriya matrits // 2-e izd., dop. – M. : Nauka.* – 1966. – 576. Print. **13.** Ayvazyan S. A., Mhitaryan V. S. *Prikladnaya statistika i osnovyi ekonometriki // M.: Yuniti.* – 1998. – 1000. Print. **14.** Nazarenko O. M. *Osnovi ekonometriki // Vid. 2-ge, pererob.: Pidruchnik – Kiyv: Tsentr navchalnoyi literaturi.* – 2005. – 392. Print. **15.** INSEE – Rezhym dostupa : http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action – Data zvernennya : 20 kvitnya 2015. **16.** Korotayev A. V., Tsirel S. V. Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // *Structure and Dynamics*. – 2010. – Vol. 4, № 1. – 3–57. Print.

Надійшла (received) 29.06.2015

Назаренко Олександр Максимович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Сумський державний університет, доцент кафедри «Моделювання складних систем»; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

Назаренко Александр Максимович – кандидат физико-математических наук, доцент, Сумской государственный университет, доцент кафедры «Моделирование сложных систем»; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

Nazarenko Oleksandr Maksymovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Sumy state university, Associate Professor at the Department of Modeling of Complex Systems; tel.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.