

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, А. Ю. СИДОРЕНКО

АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ ПОРЯДКА СТАЦИОНАРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО МАРКОВСКОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Предлагается алгоритм построения двумерного вещественного нормального марковского поля второго порядка, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными процессами Орнштейна-Уленбека. Показано, что предлагаемый подход позволяет синтезировать марковские случайные поля более высокого порядка. Смоделированы нормальные марковские поля нулевого, первого и второго порядков, реализованные на плоской поверхности двух переменных.

Ключевые слова случайный процесс, марковские поля, двумерный объект, процесс Орнштейна-Уленбека, генерирование случайных полей.

Введение. При стохастическом моделировании для вычислительной задачи необходим синтез алгоритмов генерации случайных величин с необходимыми свойствами. Зачастую задачи сводятся к генерированию не одномерных случайных величин, а двумерных случайных полей, а также полей еще более высокой размерности. Так, алгоритмы генерирования случайного двумерного объекта на плоскости используются при моделировании движения транспортных средств, а также при рассмотрении других задач, решение которых требует применить марковские нормальные случайные поля второго порядка.

Алгоритмы генерирования двумерных марковских полей [1, 2] приспособлены для построения полей лишь нулевого или первого порядка. Между тем, в задачах машиностроения [3], технической электродинамики [4], навигации [6] и других случайные поля должны характеризоваться, по крайней мере, вторым порядком. Это обусловлено, прежде всего, необходимостью их применения при моделировании динамических задач, в которых рассматриваются дифференциальные уравнения второго или более высокого порядков.

В данной работе синтезирована последовательность вложенных алгоритмов генерирования случайного объекта – нормального марковского поля второго порядка, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными процессами Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс), в которых дифференциальные уравнения имеют второй или выше порядок.

Целью данной работы является построение алгоритма повышения порядка нормального марковского поля, любые ортогональные одномерные сечения которого являются стационарными случайными ОУ-процессами.

Математическая модель исследования.

В теории стохастических марковских процессов и полей известно уравнение Ланжевена первого порядка [6, 7]. Решением этого уравнения является дифференцированная функция. Это означает, что функция имеет порядок на единицу выше, чем порождающий процесс «белого» шума.

В этом случае уравнение движения для марковского поля $h(x, y)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(x, y) = u(x, y), \quad (1)$$

где $u(x, y)$ – случайное поле, имеющее свойства гауссовского двумерного «белого» шума на плоскости xOy с единичной интенсивностью; ν и μ – декременты стохастического движения вдоль осей x и y соответственно.

К уравнению (1) необходимо присоединить граничные условия, которые соответствуют двум нормальным марковским процессам и описываются парциальными уравнениями Ланжевена

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu\right) h(x, 0) = u(x, 0), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\right) h(0, y) = u(0, y), \quad (2)$$

реализующимися вдоль осей x и y соответственно, а также начальное условие, отвечающее вершинному значению случайной величины

$$h(0, 0) = u(0, 0). \quad (3)$$

Основным свойством нормального марковского поля $H(x, y)$ (НМД-поля) является его корреляционный функционал с парциальными корреляторами $p = \exp(-\nu |x - x'|)$, $q = \exp(-\mu |y - y'|)$:

$$K_{xy} = K_{xy}(x, y | x', y') = M[H(x, y)H(x', y')] = pq\sigma^2, \quad (4)$$

где случайная величина $h(x, y)$ – реализация гауссовского двумерного поля $H(x, y)$ в прямоугольной области $\{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ на плоскости xOy ;

ν и μ – декременты затухания поля $h(x, y)$ вдоль осей x и y соответственно.

Обобщением известных конструкций (переходных вероятностей для нормального марковского ОУ-процесса) может быть переходная плотность распределения вероятностей для амплитуды поля $H(x, y)$

$$f_H(h(x, y) | h(x', y), h(x, y'), h(x', y')) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)}\sigma^2} \exp\{-Q[h(x, y)]\}, \quad (5)$$

где $Q[h(x, y)]$ – квадратичная форма относительно переменных поля

$$Q[h(x, y)] = \frac{[h(x, y) - ph(x', y) - qh(x, y') + pqh(x', y')]^2}{2(1 - p^2)(1 - q^2)\sigma^2}.$$

В случае если $x' \rightarrow \infty$ или $y' \rightarrow \infty$ получаем граничные переходные плотности вероятностей $f_H(h(x, y) | h(x', y))$ или $f_H(h(x, y) | h(x, y'))$, которые рассматриваются в качестве переходных плотностей для парциальных ОУ-процессов, а при $x' \rightarrow \infty$ и $y' \rightarrow \infty$ вершинную плотность распределения вероятностей равновесного вида $f_H(h(x, y))$ для случайной величины – реализации $h = H(x, y)$ поля $H_1(x, y)$ в точке с координатами (x, y) , откуда получается корреляционная функция (4).

Таким образом, если использовать обозначения $u(x, y) \rightarrow H^{(0)}(x, y)$ и $h(x, y) \rightarrow H^{(1)}(x, y)$, то действие дифференциального выражения (1), граничных начальных условий (2) и вершинного начального условия (3) можно формально записать как операторное соотношение с дифференциальным оператором $D(v, \mu)$ вида

$$D(v, \mu)H^{(1)}(x, y) = H^{(0)}(x, y) \quad (6)$$

или операторное соотношение с интегральным оператором $I(v, \mu)$

$$H^{(1)}(x, y) = I(v, \mu)H^{(0)}(x, y). \quad (7)$$

Явный вид этого операторного соотношения можно записать с помощью выражения

$$\begin{aligned} H^{(1)}(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{4v\mu}} \left\{ (v\mu)^{-1} \exp(-vx - \mu y) H^{(0)}(0, 0) + \right. \\ & + \mu^{-1} \int_0^x \exp[-v(x - x')] H^{(0)}(x', 0) dx' + \\ & + v^{-1} \int_0^y \exp[-\mu(y - y')] H^{(0)}(0, y') dy' + \\ & \left. + \int_0^x \int_0^y \exp[-v(x - x') - \mu(y - y')] H^{(0)}(x', y') dx' dy' \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, если поле $H^{(0)}(x, y)$ является заданным вместе с граничными условиями, то при заданной очередной паре парциальных декрементов затухания v и μ поля вдоль осей x и y можно определить поле $H^{(1)}(x, y)$. Можно убедиться, что марковское свойство для поля $H^{(1)}(x, y)$ согласно (8) имеет место вдоль граничных осей x и y , а также на плоскости xOy .

Алгоритм генерирования НМД-поля k -го порядка $H^{(k)}(x, y)$. Пусть теперь ищется НМД-поле k -го порядка $H^{(k)}(x, y)$, а НМД-поле $(k-1)$ -го

порядка $H^{(k-1)}(x, y)$ является заданным вместе с начальным условием и граничными условиями с декрементами v_k и μ_k соответственно, то есть оба поля $H^{(k-1)}(x, y)$ и $H^{(k)}(x, y)$ связаны соотношением вида $D(v_k, \mu_k)H^{(k)}(x, y) = H^{(k-1)}(x, y)$.

Тогда для искомого поля $H^{(k)}(x, y)$ получаем согласно (6) и (7)

$$H^{(k)}(x, y) = I(v_k, \mu_k)H^{(k-1)}(x, y). \quad (9)$$

На основании решения (8) можно построить численный алгоритм генерирования НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$ при условии, что ранее получены значения $H^{(k-1)}(x, y)$. Этот рекуррентный алгоритм обеспечивает генерирование значений в узлах случайного нормального стационарного марковского поля в прямоугольной области со сторонами a и b .

Рассмотрим на плоскости xOy прямоугольник с одной из вершин расположенных в точке $(0; 0)$. Выберем сетку узлов $\{0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$ с шагом Δ_x вдоль оси x и с шагом Δ_y вдоль оси y так, чтобы $N = a / \Delta_x$ и $M = b / \Delta_y$.

Тогда искомым рекуррентный алгоритм значений $\{h_{n,m}^{(k)}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$ НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$, с помощью приведенной в [2, 5] техники, удобно представить следующими 5 шагами.

Рекуррентный алгоритм значений НМД-поля k -го порядка:

Шаг 1. Генерирование значения в вершине $n = 0, m = 0$:

$$g_{0,0} = h_{0,0}^{(k-1)}. \quad (10)$$

Шаг 2. Генерирование значений ОУ-процесса вдоль x -границы $n > 0, m = 0$:

$$g_{n+1,0} = p_k g_{n,0} + \sqrt{1 - p_k^2} h_{n+1,0}^{(k-1)}. \quad (11)$$

Шаг 3. Генерирование значений ОУ-процесса вдоль y -границы $n = 0, m > 0$:

$$g_{0,m+1} = q_k g_{0,m} + \sqrt{1 - q_k^2} h_{0,m+1}^{(k-1)}. \quad (12)$$

Шаг 4. Последовательное (слева-направо и послыно) заполнение значениями внутренних узлов прямоугольника $n > 0, m > 0$:

$$\begin{aligned} g_{n+1,m+1} = & p_k g_{n,m+1} + q_k g_{n+1,m} - p_k q_k g_{n,m} + \\ & + \sqrt{(1 - p_k^2)(1 - q_k^2)} h_{n+1,m+1}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Шаг 5. Получение искомым значений $\{h_{n,m}^{(k)}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M\}$:

$$h_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{4v_k \mu_k}} g_{n,m}. \quad (14)$$

В выражениях (10)–(14) обозначено $p_k = \exp(-v_k \Delta_x)$, $q_k = \exp(-\mu_k \Delta_y)$ с парциальными декрементами v_k и μ_k , Δ_x и Δ_y – расстояния между узлами вдоль осей x и y соответственно.

Отметим, что при выбранных значениях Δ_x и Δ_y (то есть при количестве шагов N и M , которые отвечают заданным размерам прямоугольника со сторонами a и b) интенсивность в числовом алгоритме необходимо пронормировать таким образом, чтобы энергия НМД-поля $H^{(k)}(x, y)$, приходящаяся на единицу плоскости, совпадала с заданной при любом количестве шагов.

Из формул (10)–(14) можно получить величины математического ожидания для значений $h_{n,m}^{(k)}$ и $(h_{n,m}^{(k)})^2$ для любых (n, m) -узлов поля $H^{(k)}(x, y)$, а именно

$$M[H_{n,m}^{(k)}] = 0, \quad M\left[\left(H_{n,m}^{(k)}\right)^2\right] = \text{const}, \quad (15)$$

если последовательно уменьшать значение n -индекса, а потом значение m -индекса, и, наконец, найти безусловное равновесное среднее при $n = m = 0$.

Таким образом, алгоритм (10)–(14) генерирования значений случайного поля $H^{(k)}(x, y)$ в прямоугольнике на плоскости является стационарным.

Объединение (8)–(15) дает возможность сформулировать следующее.

Утверждение 1. Пусть на выбранной декартовой сетке с шагами Δ_x и Δ_y между узлами вдоль осей x и y задано для $k=0$ поле $H^{(0)}$ «белого» шума с интенсивностью σ_0 , а для $k=1, 2, \dots$ известна последовательность декрементов $\{(v_1, \mu_1), (v_2, \mu_2), \dots, (v_k, \mu_k)\}$. Тогда для переходных вероятностей $\{f_{H^{(k)}}(\cdot)\}$ амплитуд $\{h_{n,m}^{(k)}\}$ нормального марковского поля $H^{(k)}(x, y)$ порядка k могут быть использованы следующие переходные вероятности для амплитуд НМД-поля

$$f_{H^{(k)}}(h_{n,m}^{(k)} | h_{n-1,m}^{(k)}, h_{n,m-1}^{(k)}, h_{n-1,m-1}^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p_k^2)(1-q_k^2)\sigma_k^2}} \times \exp\left\{-\frac{[h_{n,m}^{(k)} - p_k h_{n-1,m}^{(k)} - q_k h_{n,m-1}^{(k)} + p_k q_k h_{n-1,m-1}^{(k)}]^2}{2(1-p_k^2)(1-q_k^2)\sigma_k^2}\right\}, \quad (16)$$

где $p_k = \exp(-v_k \Delta_x)$, $q_k = \exp(-\mu_k \Delta_y)$ – корреляторы с парциальными декрементами v_k и μ_k соответственно;

$$\sigma_k^2 = M\left[\left(H_{n,m}^{(k)}\right)^2\right] = \frac{\sigma_{k-1}^2}{4v_k \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Набор $\{f_{H^{(k)}}(\cdot)\}$ этих плотностей вместе с набором $H^{(k)}(x, y)$ полей образуют последователь-

ность, которая является самосогласованной в совокупности.

Утверждение 2. Пусть выражение (9) описывает интегральный оператор $I(v, \mu)$ повышения порядка НМД-поля на единицу, отвечающее заданной паре v и μ . Тогда для заданного K и заданных декрементных наборов $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$ и $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K\}$ с помощью интегрального оператора

$$H^{(K)}(x, y) = I(v_K, \mu_K) \dots I(v_1, \mu_1) H^{(0)}(x, y) \quad (17)$$

может быть получено НМД-поле порядка K .

Утверждение 3. Обозначим с помощью $\hat{I}(v, \mu)$ оператор, который на основании (10)–(14) соответствует алгоритму повышения порядка случайной реализации НМД-поля, $h_{n,m}^{(k)} = \hat{I}(v_k, \mu_k) h_{n,m}^{(k-1)}$, $0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$.

Тогда

$$h_{n,m}^{(K)} = \hat{I}(v_K, \mu_K) \dots \hat{I}(v_k, \mu_k) \dots \hat{I}(v_1, \mu_1) h_{n,m}^{(0)}, \quad (18)$$

$$0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M.$$

Замечание. Решение (8) и его обобщение (17) по существу являются явным видом решения уравнения Ланжевена на плоскости для первого и соответственно для K -го порядка.

Результаты генерирования НМД. На рис. 1–3 представлены пример генерирования поля $H^{(0)}(x, y)$ «белого» шума и, связанные с ним, примеры генерирования поля $H^{(1)}(x, y)$ первого порядка и поля $H^{(2)}(x, y)$ второго порядка на выбранной декартовой сетке с шагами Δ_x и Δ_y между узлами вдоль осей x и y для заданных размеров (40×40) .

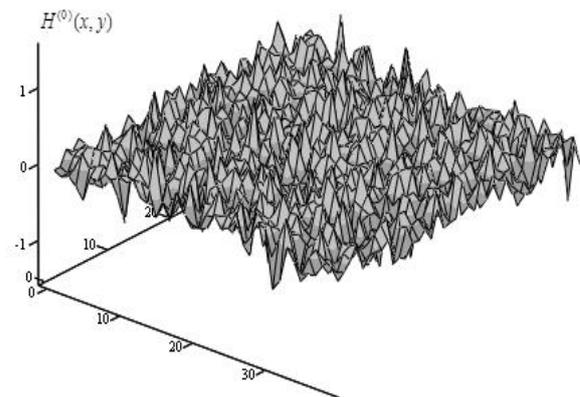


Рис. 1 – Поле «белого» шума $H^{(0)}(x, y)$; параметры: $N = 40, \Delta_x = 1, M = 40, \Delta_y = 1, \sigma = 0.2$

Анализируя рис. 1–3, видно, что при уменьшении значений парциальных декрементов v, μ наблюдается сглаживание формы сгенерированного случайного поля. Можно отметить, что дополнения парциальных декрементов v, μ влияют на вид топографии сгенерированного случайного марковского поля.

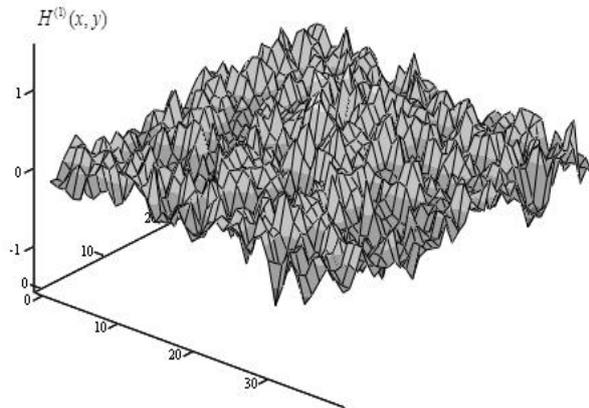


Рис. 2 – Нормальное марковское поле первого порядка $H^{(1)}(x, y)$; параметры: $N = 40$, $\Delta_x = 1$, $M = 40$, $\Delta_y = 1$, $\nu_1 = 0.8$, $\mu_1 = 0.8$, $\sigma = 0.2$

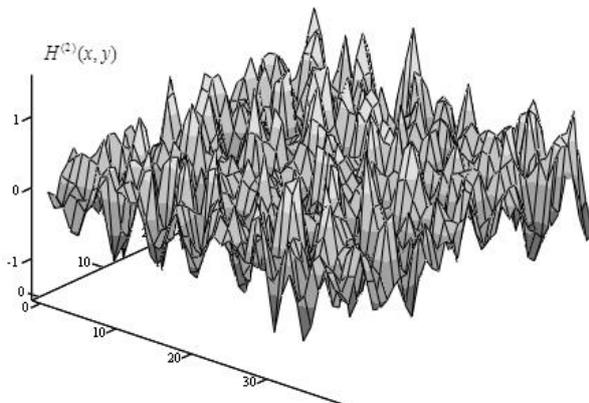


Рис. 3 – Нормальное марковское поле второго порядка $H^{(2)}(x, y)$; параметры: $N = 40$, $\Delta_x = 1$, $M = 40$, $\Delta_y = 1$, $\nu_2 = 1.6$, $\mu_2 = 1.6$, $\sigma = 0.2$

Выводы. В данной работе описан алгоритм повышения порядка случайного объекта – нормального марковского поля, любые ортогональные сечения которого являются стационарными случайными ОУ-процессами. Аналогичные утверждения могут быть сформулированы для полей, которые генерируются в объеме и в пространстве высшей размерности.

Построены нормальные марковские поля нулевого, первого и второго порядка, реализованные на плоской поверхности двух переменных.

Список литературы: 1. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image / A. Habibi // Proc. IEEE, vol. 60, № 7, pp.878–883, (July) 1972. 2. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов – М. : Сов. радио, 1977. – 488 с. 3. Хусу А. П. Шероховатость поверхностей / А. П. Хусу, Ю. П. Витенберг, В. А. Пальмов. – М. : Наука, 1975. – 344 с. 4. Ярлыков М. С. Статистическая теория навигации / М. С. Ярлыков. – М. : Радио и связь, 1985. – 344 с. 5. Мазманишвили А. С. Повышение порядка двумерных марковских полей / А. С. Мазманишвили, А. Ю. Сидоренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 3 (977). – С. 110–120. 6. Мазманишвили А. С. Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра / А. С. Мазманишвили // Електронне моделювання. – 1998. – Т. 20. – №. 6. – С. 65–69.

Bibliography (transliterated): 1. Habibi, A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image. Proc. IEEE, vol. 60, № 7, pp.878–883, (July) 1972. 2. Tihonov, V. I., and M. A. Mironov. "Markovskie processy". Moscow: Sov. Radio, 1977. 488. Print. 3. Husu, A. P., Vitenberg, Yu. R., and V. A. Palmov. "Sherohovatost' poverhnosti". Moscow: Nauka, 1975. Print. 4. Yarlykov, M. S. "Statisticheskaya teoriya navigacii". Moscow: Radio i svyaz', 1985. Print. 5. Masmanishvili A. S. and A. Y. Sydorenko. "Povishenie poriyadka dvumernih markovskih poley". Visnyk NTU "KhPI". Ser.: Systemniy analiz, upravlinnya ta informaciyini tehnologii. – Kharkiv : NTU "KhPI". No. 3 (977). 2013. 110–120. Print. 6. Masmanishvili A. S. "Algoritm generacii normal'nogo markovskogo polya na poverhnosti ideal'nogo cilindra". Elektronnoe modelirovanie. T. 20. № 2. 1998. 65–69. Print.

Поступила (received) 05.12.2015

Мазманишвили Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», г. Харьков; тел.: (067) 799-38-64; e-mail: mazmanishvili@gmail.com.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiyovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, senior staff scientist National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", Kharkiv; tel.: (067) 799-38-64; e-mail: mazmanishvili@gmail.com.

Сидоренко Анна Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», доцент кафедры системного анализа и управления; тел.: (095) 392-54-39; e-mail: sau123@ukr.net.

Sydorenko Ganna Yuriyivna – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Associate Professor at the Department of analysis of the systems and management; tel.: (095) 392-54-39; e-mail: sau123@ukr.net.