

В. В. КАРПЕНКО, Р. Х. АХМАДОВ

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМ СПРОСОМ

Рассмотрена модель транспортной задачи линейного программирования, в которой спрос на транспортируемый продукт в пунктах его реализации задан нечетко. Предложен метод решения этой задачи, учитывающий потери, связанные с неопределенностью спроса, а также транспортные расходы. Метод реализует итерационную процедуру последовательного улучшения плана.

Ключевые слова: транспортная задача, линейное программирование, нечеткий спрос.

Введение. Каноническая транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом [1].

Пусть имеется m пунктов производства некоторого продукта и n пунктов его потребления. Производство и потребление сбалансированы, т.е. общие объемы производства и потребления равны между собой. Задача заключается в отыскании рационального плана перевозок из пунктов производства к пунктам потребления, при котором транспортные расходы минимальны. Полученный в результате решения план перевозок должен удовлетворять следующим требованиям: 1) спрос каждого из пунктов потребления должен полностью удовлетворяться; 2) весь произведенный в каждом пункте производства продукт должен полностью использоваться.

Формализуем поставленную задачу. Введем следующие обозначения:

x_{ij} – количество единиц продукта, перевозимого из i -го пункта производства в j -й пункт потребления;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из i -го пункта в j -й;

a_i – количество единиц продукта, производимое в i -м пункте;

b_j – количество единиц продукта, потребляемое в j -м пункте.

В принятых обозначениях сформулированная задача сводится к отысканию набора переменных $\{x_{ij}\}$, $i=1,2,\dots,n$, минимизирующего целевую функцию

$$L(\{x_{ij}\}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В системе сделанных здесь допущений наиболее

жестким и практически всегда нарушаемым является предположение о том, что величина спроса в каждом из пунктов потребления точно известна. В связи с этим гораздо более естественно считать, что в отношении значений b_j , $j = 1, 2, \dots, n$, имеется неопределенность. Характер этой неопределенности может быть различным. Если для каждого пункта потребления получена предварительная выборка значений спроса, то её стандартная статистическая обработка в рамках теоретико-вероятностного подхода позволяет получить плотность распределения наблюдаемой величины спроса и её моменты. На практике дело обстоит не так: имеющихся данных оказывается достаточно только для получения удовлетворительных по качеству оценок диапазона возможных значений спроса в каждом пункте и его математического ожидания. Это обстоятельство приводит к целесообразности использования для описания системы транспортировок аппарата нечеткой математики [2–5]. Сформулируем постановку транспортной задачи в условиях, когда спрос в пунктах потребления задан нечетко.

Постановка задачи. С учетом сказанного введем описание возможных значений спроса в пунктах потребления b_j функциями принадлежности $\varphi_j(b_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Появляющаяся при этом некоторая свобода выбора значений заказываемого объема продукта z_j обладает важным достоинством, так как позволяет учесть различия в величине потерь при неудачном выборе величины заказа. Введем

$R_1(z_j)$ – величина потерь, появляющихся в случаях, когда заказ z_j превышает спрос и возникает необходимость хранения нереализованного продукта, $j = 1, 2, \dots, n$;

$R_2(z_j)$ – величина потерь, появляющихся, если спрос b_j в конкретном j -м пункте реализации продукта превышает заказ z_j и в результате этого, помимо ущерба, связанного с потерей имиджа, возникают потери дефицита (недополучение возможной прибыли).

Понятно, что в этой ситуации набор значений z_j , $j = 1, 2, \dots, n$, необходимо каким-то разумным способом выбирать. В связи с этим формальная постановка задачи преобразуется к следующей: найти

наборы $Z = (z_j)$ и $X(Z) = \{x_{ij}(z_j)\}$, минимизирующие

$$L(x_{ij}(z_j)) = \sum_{j=1}^n R_1(z_j) + \sum_{j=1}^n R_2(z_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}(z_j) \quad (4)$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}(z_j) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}(z_j) = z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{i=1}^m a_i, \quad (7)$$

$$x_{ij}(z_j) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Основной материал. Получим аналитическое описание функций $R_1(z_j)$ и $R_2(z_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Так как z_j – нечеткие числа, то и любая их функция – тоже нечетное число. Используя функции принадлежности $\varphi_j(b_j)$, введем функции

$$\tilde{\varphi}_j(b_j) = \frac{\varphi_j(b_j)}{\int_{G_j} \varphi(b_j) db_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где G_j – диапазон возможных значений b_j .

Полученные функции $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ обладают всеми свойствами плотностей распределения случайных величин: они неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки, то есть

$$\int_{G_j} \tilde{\varphi}(b_j) db_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Функция $\varphi_j(b_j)$ может быть использована для расчета ожидаемого значения нечеткого числа z_j

$$m_j = \int_{G_j} b_j \tilde{\varphi}(b_j) db_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

являющегося естественным аналогом определяемого в теории вероятностей значения математического ожидания случайной величины с использованием плотности её распределения.

При этом ожидаемое значение затрат на хранение нереализованной части продукта будет равно

$$R_1(z_j) = \alpha_j \int_0^{z_j} (z_j - b_j) \tilde{\varphi}(b_j) db_j, \quad (12)$$

где α_j – средние затраты на хранение единицы продукта в j -м пункте реализации, $j = 1, 2, \dots, n$.

Аналогично этому определим потери от дефицита

$$R_2(z_j) = \beta_j \int_{z_j}^{\infty} (b_j - z_j) \tilde{\varphi}(b_j) db_j, \quad (13)$$

где β_j – средняя прибыль, получаемая от реализации продукта в j -м пункте реализации, $j = 1, 2, \dots, n$.

Полученные соотношения (12) и (13) можно использовать для независимого расчета рациональных значений z_j для каждого из пунктов реализации, минимизирующих суммарные затраты на хранение не проданной части продукта и потери от дефицита.

С этой целью для j -го пункта реализации введем

$$\begin{aligned} R_j(z_j) &= R_1(z_j) + R_2(z_j) = \alpha_j \int_0^{z_j} (z_j - b_j) \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + \\ &+ \beta_j \int_{z_j}^{\infty} (b_j - z_j) \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = \alpha_j z_j \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j - \\ &- \alpha_j \int_0^{z_j} b_j \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + \beta_j \int_{z_j}^{\infty} b_j \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j - \\ &- \beta_j z_j \int_{z_j}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Теперь рациональное значение z_j найдем путем дифференцирования $R_j(z_j)$ по z_j , приравнявая его результат к нулю и решая получаемое уравнение.

Так как

$$\frac{d}{dz_j} \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = \tilde{\varphi}_j(z_j), \quad \frac{d}{dz_j} \int_{z_j}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = -\tilde{\varphi}_j(z_j),$$

$$\frac{d}{dz_j} \int_0^{z_j} b_j \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = z_j \tilde{\varphi}_j(z_j),$$

$$\frac{d}{dz_j} \int_{z_j}^{\infty} b_j \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = -z_j \tilde{\varphi}_j(z_j),$$

то

$$\frac{dR_j(z_j)}{dz_j} = \alpha_j \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + \alpha_j z_j \tilde{\varphi}_j(z_j) -$$

$$- \alpha_j z_j \tilde{\varphi}_j(z_j) - \beta_j z_j \tilde{\varphi}_j(z_j) -$$

$$- \beta_j \int_{z_j}^{\infty} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + b_j z_j \tilde{\varphi}_j(z_j) = \alpha_j \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j -$$

$$-\beta_j \left(1 - \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j\right) = (\alpha_j + \beta_j) \int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j - \beta_j = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^{z_j} \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}.$$

Полученное уравнение относительно z_j решается численно, а если функция $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ интегрируема, то и аналитически. Пусть, например плотность распределения $\tilde{\varphi}_j(b_j)$ соответствует закону Рэлея, то есть

$$\tilde{\varphi}_j(b_j) = \frac{b_j}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{z_j} \frac{b_j}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\} db_j &= -\int_0^{z_j} \frac{d}{db_j} \left(\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\} \right) = \\ &= -\exp\left\{-\frac{b_j^2}{2\sigma^2}\right\} \Big|_0^{z_j} = 1 - \exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

При этом уравнение относительно z_j имеет вид

$$1 - \exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j},$$

откуда

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{z_j^2}{2\sigma^2}\right\} &= 1 - \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}, \\ -\frac{z_j^2}{2\sigma^2} &= \ln \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}, \quad z_j = \pm \sigma \sqrt{2 \ln \frac{\alpha_j + \beta_j}{\alpha_j}}. \end{aligned}$$

Выбирая положительный корень, имеем

$$z_j^{(0)} = \sigma \sqrt{2 \ln \frac{\alpha_j + \beta_j}{\alpha_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Получаемый при этом набор $\{z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}\}$ не обязательно удовлетворяет условиям баланса, то есть

$$\sum_{j=1}^n z_j^{(0)} \neq \sum_{i=1}^m a_i = a.$$

Найдем значения z_j , минимально удаленные от $z_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и удовлетворяющие условию баланса. Используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n (z_j - z_j^{(0)}) + \lambda \left(\sum_{j=1}^n z_j - a \right).$$

Отсюда

$$z_j = z_j^{(0)} - \frac{\lambda}{2}, \quad \sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n z_j^{(0)} - \frac{n\lambda}{2} = a,$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{n} \left(a - \sum_{j=1}^n z_j^{(0)} \right).$$

Тогда искомый набор z_j определяется соотношением

$$z_j = z_j^{(0)} + \frac{1}{n} \left(a - \sum_{j=1}^n z_j^{(0)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Полученный набор z_j удовлетворяет условию баланса и может быть использован при решении задачи (1)–(3). Вместе с тем, этот набор не учитывает условий транспортирования и поэтому не минимизирует расходы транспортировки. В связи с этим естественно поставить задачу отыскания компромиссного набора z_j , $j = 1, 2, \dots, n$, и соответствующего плана транспортировки $X(Z)$, которые доставляли бы минимум комплексному критерию, учитывающему затраты на хранение нереализованного продукта, потери от дефицита и транспортные расходы. Соответствующая функция приобретает вид:

$$\begin{aligned} L(x_{ij}(z_j)) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{z_j} (z_j - b_j) \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + \\ &+ \sum_{j=1}^n \beta_j \int_{z_j}^{\infty} (b_j - z_j) \tilde{\varphi}_j(b_j) db_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}(z_j). \end{aligned} \quad (14)$$

Полученная задача отыскания наборов Z и $X(Z)$, минимизирующих (14) и удовлетворяющих (5)–(8), уже не является задачей линейного программирования. Вместе с тем, она может быть решена с использованием методов нулевого порядка, например, методом Нелдера – Мида [6]. В соответствии с этим методом введем совокупность наборов

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \dots \\ z_{1n} \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \dots \\ z_{2n} \end{pmatrix}, \dots, Z_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1,1} \\ z_{n+1,2} \\ \dots \\ z_{n+1,n} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

компоненты которых определены по формулам

$$z_{kj} = \begin{cases} \frac{c_0}{n} \left(1 + \frac{s(n-1)}{n} \right), & k = j, \\ \frac{c_0}{n} \left(1 - \frac{s}{n} \right), & k \neq j, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$c_0 = \sum_{i=1}^m a_i, \quad s \in [0;1].$$

Легко видеть, что для любого $k = 1, 2, \dots, n+1$ имеет место

$$\sum_{j=1}^n z_{kj} = \frac{c_0}{n} \left(1 + \frac{s(n-1)}{n} \right) + \frac{(n-1)c_0}{n} \left(1 - \frac{s}{n} \right) = \frac{c_0}{n} \left[1 + \frac{s(n-1)}{n} + (n-1) - \frac{(n-1)s}{n} \right] = c_0 = \sum_{i=1}^m a_i. \quad (17)$$

Выполнение равенства (17) вместе с очевидной неотрицательностью любого z_{kj} , $k = 1, 2, \dots, n+1$,

$j = 1, 2, \dots, n$, означает, что каждый из наборов z_1, z_2, \dots, z_{n+1} может быть использован в качестве допустимого плана заказов, удовлетворяющего условию баланса (7). Далее с использованием всех этих наборов решаются $(n+1)$ транспортных задач (1), (5)–(8) в результате чего получим наборы $X_1(z_1), X_2(z_2), \dots, X_{n+1}(z_{n+1})$. Теперь эти наборы вместе с совокупностью наборов (15) используются для вычисления значений целевой функции (4). Получаемые при этом значения $L(z_1, X(z_1)), L(z_2, X(z_2)), \dots, L(z_{n+1}, X(z_{n+1}))$ далее участвуют в стандартной процедуре улучшения плана, реализуемой методом Нелдера – Мида (см. рис. 1).

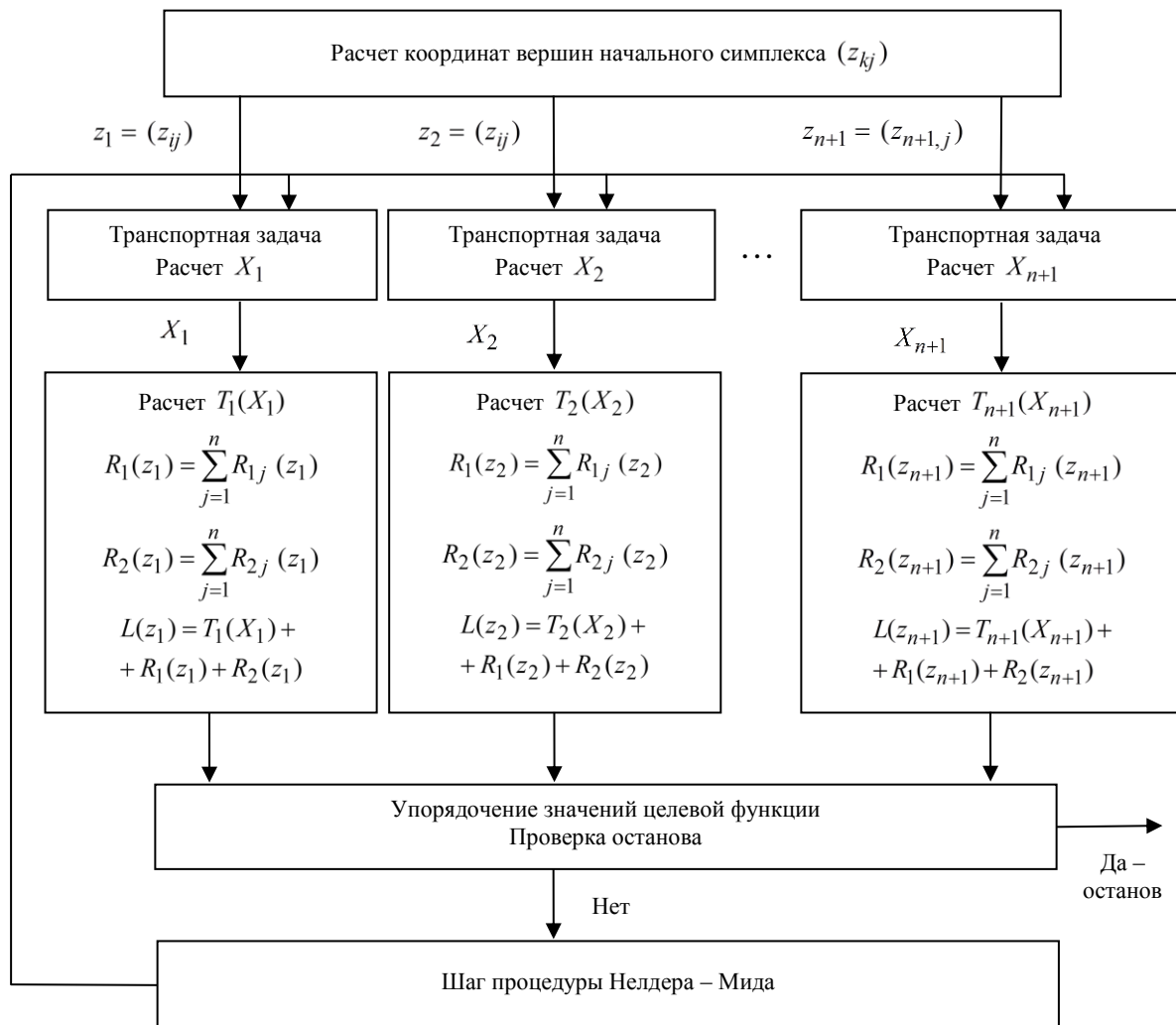


Рис. 1 – Блок-схема алгоритма решения задачи

Другой, приближенный вариант решения задачи может быть получен с использованием следующей двухэтапной процедуры. На первом этапе с использованием рассчитанных по формуле (11) ожидаемых значений спроса в каждом из пунктов потребления

решается задача отыскания набора $X = (x_{ij})$, минимизирующего (1) и удовлетворяющего (2)–(3), а также ограничению

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $X^{(0)} = (x_j^{(0)})$ – получаемое при этом решение транспортной задачи, которое будем называть модальным. Выделим теперь ненулевые компоненты плана $X^{(0)}$. Число этих компонентов равно $m+n-1$, а их номера образуют множество $N = \{1, 2, \dots, m+n-1\}$. Используя эту нумерацию преобразуем двухиндексную систему уравнений (2)–(3) в одноиндексную, задав вектор правых частей этих уравнений следующим образом $D = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Решение этой системы уравнений даст вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1})$, компоненты которого будут линейно зависеть от нечетких значений b_1, b_2, \dots, b_n и, следовательно, будут нечеткими. Используя функции принадлежности нечетких чисел b_1, b_2, \dots, b_n в соответствии с правилами нечеткой математики [2] получим функции принадлежности нечетких чисел X_k , $k = 1, 2, \dots, m+n-1$. Далее по этим же правилам определим функцию принадлежности $F(X)$ нечеткого значения линейной формы $L(x) = \sum_{k \in N} c_k x_k$.

Теперь в качестве четкого решения исходной задачи примем набор X , минимизирующий составной критерий

$$J(x) = \int_{\Omega} F(X) dx + (X - X^{(0)})T(X - X^{(0)}). \quad (18)$$

Этот критерий имеет понятный смысл: первое его слагаемое определяет компактность функции при-

надлежности нечеткого значения $L(x)$, а второе равно сумме квадратов отклонений искомого решения от модального.

Выводы. Таким образом, в работе предложен метод решения транспортной задачи линейного программирования для случая, когда неопределенность спроса на реализуемый продукт определена в терминах нечеткой математики. Для решения задачи введен комплексный критерий, учитывающий затраты на хранение непроданной части продукта, потери от дефицита, а также транспортные расходы. Получение оптимального плана обеспечивается итерационной процедурой Нелдера – Мида. Рассмотрен альтернативный метод решения задачи, обеспечивающий двухшаговый вариант получения решения.

Список литературы: 1. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем / Л. Г. Раскин – М. : Сов. Радио, – 1976. – 344 с. 2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский – М. : Наука, – 1981. – 206 с. 3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад – М. : Радио и связь, – 1990. – 286 с. 4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман – М. : Радио и связь, – 1982. – 432 с. 5. Раскин Л. Г., Серая О. В. Нечеткая математика / Л. Г. Раскин, О. В. Серая – Х. : Парус, – 2008. – 352 с. 6. Раскин Л. Г. Математическое программирование / Л. Г. Раскин – Х. : НТУ «ХПИ», – 2002. – 124 с.

Bibliography (transliterated): 1. Raskin L. G. *Analiz slozhnyh system*. Moscow: Sov. Radio, 1976. Print. 2. Orlovskij S. A. *Problemy prinjatij reshenij pri nechetkoj ishodnoj informacii*. Moscow: Nauka, 1981. Print. 3. Djubua D., Prad A. *Teoriya vozmozhnostej. Prilozhenie k predstavleniju znaniy v informatike*. Moscow: Radio i svjaz, 1990. Print. 4. Kofman A. *Vvedenie v teoriju nechetkih mnozhestv*. Moscow: Radio i svjaz, 1982. Print. 5. Raskin L. G., Seraja O. V. *Nechetkaja matematika*. Kharkiv: Parus, 2008. Print. 6. Raskin L. G. *Matematicheskoe programmirovanie*. Kharkiv: NTU "KhPI", 2002. Print.

Поступила (received) 07.12.2015

Карпенко Вячеслав Васильевич – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», старший преподаватель кафедры Компьютерного мониторинга и логистики; тел.: (093) 643-19-39; e-mail: Karpenko@kml.kh.ua.

Карпенко Vyacheslav Vasilevich – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", senior lecturer Department of Computer Monitoring and logistics; tel.: (093) 643-19-39; e-mail: Karpenko@kml.kh.ua.

Ахмадов Рустам Хусейнович – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант кафедры Компьютерного мониторинга и логистики; тел.: (057) 707-66-28; e-mail: kml_kml@bk.ru.

Akhmadov Rustam Huseynovich – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", graduate student Department of Computer Monitoring and logistics; tel.: (057) 707-66-28; e-mail: kml_kml@bk.ru.