Висновки. В статті визначено вплив основних джерел похибок, що вносяться АЦП, тобто частоти перетворення та квантування за амплітудою, АЦП, на результати вимірювання саме часових параметрів імпульсів. Обґрунтовано вимоги до визначення параметрів АЦП в залежності від параметрів імпульсів та необхідної точності вимірів.

Список літератури: 1. Вострокнутов Н. Н. Цифровые измерительные устройства. Теория погрешностей, испытания, поверка. – М., Энергоатомиздат. **2.** Мирский Г.Я. Электронные измерения. – М.: «Радио и связь», 1986. **3.** Немченко Ю.С. Широкополосные средства измерений импульсных магнитных полей // Вісник НТУ «ХПІ» Тематичний випуск «Техніка і електрофізика високих напруг», вип. №20'2007. **4.** Кушнир Ф.В. и др. Измерения в технике связи. – М.: Связь, 1976.

Надійшла до редколегії 22.09.2008.

УДК 391.394.5

Н.Ф.ЛОГВИНЕНКО, канд.техн.наук, ХНУВД, Харьков

МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ИСТОЧНИКА ОШИБОК В СТАЦИОНАРНОМ ДИСКРЕТНОМ БИНАРНОМ КАНАЛЕ

Запропоновано багатомірні аналітичні моделі джерел помилок у бінарних каналах, засновані на спеціально побудованих імовірнісних розподілах. Канал характеризується ймовірностями станів і умовними ймовірностями незалежних по бітах помилок у кожному зі станів. Моделі формуються на підставі різних спеціальних припущень відносно механізмів переходу каналу з одного стану в інший.

The article describes multidimensional analytical models of the error sources in binary channels based on the specially designed probability distributions. The channel is characterized by the probabilities of conditions and conditional probabilities of independent of bits errors in every condition. The models are formed based on different special assumptions concerning the mechanisms of channel transition from one condition into another.

Введение. Для проектирования протоколов телекоммуникационных систем или настройки их параметров при эксплуатации необходимы прежде всего оценки таких параметров как вероятность $P(n, 0)$ приема блока длиной n бит без ошибок и вероятности $P(n, t)$ приема блока с ошибками некоторой фиксированной кратности t. Первая характеристика необходима для определения темповых характеристик системы, а вторая – для обоснованного выбора помехоустойчивых кодов и определения вероятностных характеристик. Такого рода характеристики могут быть получены либо непосредственными натурными испытаниями линий связи, либо расчетным путем, основываясь на математических моделях источников ошибок в реальных дискретных каналах (ДК). Многолетний опыт создания таких моделей, который был подытожен еще в монографии [1] показал, что простые модели неадекватны [2], а модели, основанные на различных случайных процессах (цепях Маркова, восстановления, накопления) [3], не дают аналитических выражений для указанных параметров и сложны для инженерных приложений. Другим направлением в создании такого рода моделей может служить использование в качестве математического аппарата многомерных распределений вероятностей [4]. Ясно, что непосредственное использование многомерных моделей (например, полиномиального распределения или многомерного пуассоновского распределения) также приведет к аналитическим трудностям. Однако, если использовать определенные предположения, накладывающие ограничения на такие распределения, то можно получить не очень сложные и в то же время многопараметрические модели, адекватно описывающие статистику ошибок в бинарных ДК. Таким образом, предметом данного исследования является аналитическое описание источника помех в ДК.

Целью данной работы является построение многопараметрических моделей источника ошибок в ДК, основанных на специально построенных вероятностных распределениях.

Для достижения данной цели необходимо решение задач:

1 Разработка методики построения вероятностных распределений.
2 Получение аналитических соотношений для расчета основных вероятностных характеристик телекоммуникационных систем.

1. Вероятностные распределения для построения источника ошибок при различном числе состояний канала. Будем предполагать, что состояния канала заданы $2m$ параметрами: P_1, P_2, …, P_m – вероятностями нахождения канала в определенном состоянии, при этом $\sum_{i=0}^{m-1} P_i = 1$ и условными вероятностями независимых по битам искажений в каждом из состояний: ε_1, ε_2, …, ε_m. Физически это может означать, что источник помех состоит из нескольких независимых причин, воздействующих на качество ДК. Предположим, что в процессе приема кодового блока длиной n бит действуют все причины, однако состояния канала не пересекаются. Такая задача могла быть сведена к комбинаторной задаче о разбиении чисел [5], однако при этом необходимо учитывать и комбинации, неразличимые в разбиениях. Примем, что блок может быть принят в одном, двух и т.д., m состояниях. Для нахождения основных для приложений характеристик – вероятности $P(n, 0)$ приема блока без искажений и вероятности $P(n, t)$ приема блока с ошибками кратности t необходимо прежде всего корректное построение вероятностного пространства. Рассмотрим случай двух состояний (четырехпараметрическая двумерная модель).

Положим:

$$C_2 = P_1^n + P_2^n + 2! \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2>0}} P_1^{n_1} \cdot P_2^{n_2} \ . \tag{1}$$

Если теперь каждое из слагаемых разделить на эту константу, то мы получим сумму, равную единице, то есть вероятностное распределение, характеризующее разбиение блока длиной n на две непересекающиеся части, причем, порядок следования одного и другого состояния играет роль (разбиения с различным порядком состояний различимы). Именно поэтому перед суммой формулы (1) стоит множитель 2. По существу эта сумма будет выражать вероятность полной группы несовместных событий при вышеуказанных предположениях. Используя это вероятностное пространство определим вероятность $P(n, 0)$ приема блока длиной n бит без ошибок:

$$P(n,0) = \frac{1}{C_2}\{P_1^{n_1}(1-\varepsilon_1)^{n_1} + P_2^{n_2}(1-\varepsilon_2)^{n_2} + 2 \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2>0}} P_1^{n_1}(1-\varepsilon_1)^{n_1} P_2^{n_2}(1-\varepsilon_2)^{n_2}\} \ . \tag{2}$$

Первые два слагаемых выражают вероятности того, что блок будет принят в одном и только одном состоянии, а третье – вероятности того, что блок будет принят в обоих состояниях, но при этом состояния не пересекаются, но могут следовать в различных порядках. Рассмотрим случай трех состояний. Сформируем нормирующую константу:

$$\begin{gathered} C_3 = \sum_{i=1}^{3} P_i^n + 2\Big(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2>0}} P_1^{n_1} P_2^{n_2} + \sum_{\substack{n_1+n_3=n \\ n_1,n_2>0}} P_1^{n_1} P_3^{n_3} + \sum_{\substack{n_2+n_3=n \\ n_2,n_3>0}} P_2^{n_2} P_3^{n_3} \Big) + \\ + 3! \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n \ ,n_2,n_3,>0}} P_1^{n_1} P_2^{n_2} P_3^{n_3} \ . \end{gathered} \tag{3}$$

По аналогии с формулой (2) вероятность $P(n, 0)$ для трех состояний будет представлять собой сумму формулы (3) с соответствующими множителями $(1-\varepsilon_i)^{n_i}$ возле $P_i^{n_i}$ причем эта сумма делится на константу C_3.

Правило формирования нормирующей константы для общего случая (m состояний) понятно из вышеуказанных примеров – это сумма, состоящая из m слагаемых вида P_i^n, сумма, состоящая из C_m^2 сумм произведений из двух элементов вида $P_i^{n_i} P_j^{n_j}$, сумма из C_m^3 сумм слагаемых – произведений из трех элементов, помноженная на 3! и т. д. Последнее слагаемое – это сумма произведений из m элементов, помноженная на m!. Формулы для расчета вероятностей $P(n, 0)$ формируются аналогично выше приведенным примерам.

Несмотря на внешнюю громоздкость этих формул они вполне наглядны, интуитивно понятны и достаточно легко программируются для вычислений. Кроме того, практически размерность модели не будет превышать 4-5. Так, исследования сходимости модели в [6] показывает достаточность выделения четырех состояний.

2. Упрощение моделей источника ошибок, основанное на законе больших чисел. Ясно, что для практических инженерных приложений выше описанная модель является достаточно сложной. Для ее упрощения воспользуемся законом больших чисел. Для этого определим средние длины отдельных состояний бинарного канала. При этом можно воспользоваться геометрическим законом. В предположении, что случайная величина длительности каждого из состояний распределена по геометрическому закону, математическое ожидание $M[\lambda_i]$ i-го состояния, $i = 1,\ldots,m$ определяется соотношением:

$$M[\lambda_i] = \sum_{j=1}^{\infty} jP_i^{\,j}(1-P_i) = \frac{P_i}{1-P_i}\,. \tag{4}$$

Другой подход при определении этих средних может состоять в том, что используется усеченное [8] геометрическое распределение, а именно:

$$P\{\lambda_i = k\} = \begin{cases} 1-P_i, k=0 \\ P_i^k(1-P_i), k = 1,2,\ldots,n-1\,. \\ P_i^n, k=n \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, построенное распределение должно быть корректным, то есть должно выполняться условие:

$$\sum_{k=1}^{n} P\{\lambda_i = k\} = 1\,.$$

Действительно, используя [7], получаем:

$$(1-P_i) + \sum_{k=1}^{n-1} P_i^k(1-P_i) + P_i^n = 1\,.$$

Таким образом, получаем [7] выражение для математических ожиданий:

$$M[\lambda_i^*] = (1-P_i)\sum_{k=1}^{n-1} kP_i^k + nP_i^n = \frac{P_i(1-P_i^n)}{(1-P_i)}\,. \tag{6}$$

Используя вместо сумм в вышеприведенных формулах наиболее вероятные значения соответствующих произведений, можно перейти к упрощенным моделям. Однако в упрощенных моделях целесообразно ввести одно дополнительное состояние, характеризующееся нулевой условной вероятностью ошибки, при этом будем учитывать, что это состояние также может перемежаться с остальными. Таким образом вместо сумм в вышеприведенных моделях подставим произведения (двойные, тройные и т.д.) и для учета безошибочного состояния числа, по которым считаются факториалы перед суммами, увеличим на единицу. Так, например, для случая двух состояний нормирующая константа имеет вид:

$$C_2 = P_1^n + P_2^n + 3!\,P_1^{M[\lambda_1]} P_2^{M[\lambda_2]}. \tag{7}$$

Вероятность приема блока безошибочным выражается соотношением:

$$\begin{gathered} P(n,0) \approx \frac{1}{C_2}\{(P_1^n(1-\varepsilon_1)^n + P_2^n(1-\varepsilon_2)^n + \\ + 3!\cdot P_1^{M[\lambda_1]}(1-\varepsilon_1)^{M[\lambda_1]} \cdot P_2^{M[\lambda_2]}(1-\varepsilon_2)^{M[\lambda_2]}\}\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Аналогично могут использоваться модели с большим числом состояний.

3. Упрощение моделей, основанное на других предположениях.

Другой подход к упрощению модели может состоять в предположении, что блок данных фиксированной длины принимается в одном и только одном состоянии. Тогда вероятность приема блока без ошибок выражается формулой:

$$P(n,0) \approx \sum_{i=1}^{m} P_i (1-\varepsilon_i)^n\,. \tag{9}$$

Такую модель можно назвать упрощенной аддитивной моделью. Другая упрощенная модель из этого класса моделей приведена в [6], для которой:

$$P(n,0) \approx (1-\varepsilon_1)^{nP_1} \cdot (1-\varepsilon_2)^{nP_2} \cdots (1-\varepsilon_2)^{nP_m}\,. \tag{10}$$

Данную модель естественно назвать мультипликативной. Она основана на предположениях, что прием блока осуществляется во всех состояниях, переходы из состояния в состояние могут происходить на границе каждого бита. Кроме того, числа nP_i – это средние значения частей блока, принятых в соответствующем $i – m$ состоянии, то есть для оценки $P(n, 0)$ использован закон больших чисел.

Можно сформировать такие предположения: блок данных принимается только в одном или двух состояниях; блок данных принимается в одном, двух или трех состояниях и т.д. При этом в таких условиях выдвигается предположения относительно того, когда возможны переходы из состояния в состояние. Например, допускаются «перекрытия» состояний или нет в процессе приема блока. В качестве иллюстрации этого подхода приведем принцип построения следующей трехмерной модели: блок принимается в одном или двух состояниях, переходы из состояния в состояния могут происходить на границе каждого бита; при приеме блока в двух состояниях средние длины состояний составляют всю длину блока. Чтобы выполнить последнее условие, сформируем нормированные вероятности приема блока в двух состояниях:

$$\pi_{12}=\frac{P_1}{P_1+P_2},\pi_{21}=\frac{P_2}{P_2+P_1},\pi_{13}=\frac{P_1}{P_1+P_3},\pi_{31}=\frac{P_3}{P_3+P_1},$$
$$\pi_{23}=\frac{P_2}{P_2+P_3},\pi_{32}=\frac{P_3}{P_3+P_2}. \tag{11}$$

Основные классы моделей, основанные на специальных конечномерных вероятностных распределениях

Название модели	Основное предположение	Особенности модели
Модель с непересекающимися состояниями.	Блок данных может быть принят в одном, двух, трех и т.д., и во всех состояниях, но состояния канала не пересекаются, но в сумме составляют весь блок. Порядок состояний учитывается.	Модель достаточно сложна. Тем не менее аналитические выражения для вероятностных характеристик существуют.
Модели, основанные на использовании закона больших чисел. Состояния канала не пересекаются.	Блок принимается во всех состояниях , длина каждого состояния определяется как среднее, состояния не пересекаются, но могут перемежаться с точки зрения порядка их следования, канал обладает «идеальным» состоянием, в котором ошибки не возникают.	Модель существенно упрощается. Аналитические выражения для вероятностных характеристик существуют.
Модели, основанные на предположении, что блок принимается не более, чем в некотором фиксированном числе состояний	Блок данных принимается в одном и только одном состоянии; в одном и двух; в одном, двух и трех состояниях; и т.д. При этом возможны варианты пересекающихся и непересекающихся состояний.	Одна из моделей (аддитивная) является очень простой. Другие модели по сложности примерно те же, что и модель предыдущего пункта. Аналитические выражения для вероятностных характеристик существуют.
Модель, основанная на использовании закона больших чисел – мультипликативная модель	Мультипликативная модель основана на предположении, что блок принимается во всех состояниях и часть блока принятая в одном состоянии равна среднему значению. При этом переходы канала из состояния в состояние могут происходить на границе каждого бита.	Модель достаточно проста. Аналитические выражения для вероятностных характеристик существуют.

Теперь сформируем нормирующую константу для построения вероятностного распределения следующим образом:

$$C_3^{1-2} = \sum_{i=1}^{3} P_i + \pi_{12} \cdot \pi_{21} + \pi_{13} \cdot \pi_{31} + \pi_{23} \cdot \pi_{32} \,. \qquad (12)$$

Выражение для оценки $P(n, 0)$ в этом случае принимает вид:

$$P(n,0) \approx \frac{1}{C_3^{1-2}} \{ \sum_{i=1}^{3} P_i (1-\varepsilon_i)^n + \pi_{12}\pi_{21}(1-\varepsilon_1)^{n\pi_{12}}(1-\varepsilon_2)^{n\pi_{21}} +$$
$$+ \pi_{13}\pi_{31}(1-\varepsilon_1)^{n\pi_{13}}(1-\varepsilon_3)^{n\pi_{31}} + \pi_{23}\pi_{32}(1-\varepsilon_2)^{n\pi_{23}}(1-\varepsilon_3)^{n\pi_{32}} \} \,. \qquad (13)$$

Такой способ построения модели, естественно, применим и для большего числа состояний канала. Кроме того, используя этот подход можно предполагать увеличение тех состояний, в которых блок принимается. Аналогично тому, как была построена самая первая модель, в данном подходе также можно рассматривать непересекающиеся состояния как с полным перебором всех ситуаций, так и с применением закона больших чисел для упрощения модели. Таким способом можно дополнять аддитивную модель все большим числом подробностей в случае ее неадекватности.

Таким образом, механизм построения вероятностного распределения в общей схеме остается прежним: формируется нормирующая константа из суммы полной группы несовместных событий и затем слагаемые делятся на эту константу для корректного получения распределения.

Сведем все приведенные модели в таблице.

Выводы. В статье предложена методика построения конечномерных вероятностных распределений, на базе которых могут строиться различные модели источника ошибок в стационарном дискретном бинарном канале. Дальнейшие этапы этих исследований – тщательная проверка адекватности моделей на статистических данных и выработка рекомендаций относительно их использования для описания различных линий связи .

Список литературы: **1.** *Блох, Э.Л.* Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации [Текст] / *Э.Л. Блох, О.В. Попов, В.Я. Турин*. – М.: Связь, 1971. – 312 с. **2.** Элементы теории передачи дискретной информации [Текст] / *Л.П. Пуртов, А.С. Замрий, А.И. Захаров, В.М. Охорзин*; под ред. *Л.П. Пуртова*. – М.: Связь, 1972. – 232 с. **3.** *Шварцман, В.О.* Теория передачи дискретной информации [Текст] / *В.О. Шварцман, Г.А. Емельянов*. – М.: Связь, 1979. – 424 с. **4.** *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей [Текст] / *Е.С. Вентцель*. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с. **5.** *Липский, В.* Комбинаторика для программистов [Текст] / *В. Липский*, пер. с польск. – М.: Мир, 1988. – 213 с. **6.** *Логвиненко, Н.Ф.* Многомерная модель источника ошибок в дискретных каналах радиосвязи [Текст] / *Н.Ф. Логвиненко, В.В. Ефимовская* // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сборник научных трудов ХГПУ. – Вып. 7. Часть 3. – 1999. – С. 295-298. **7.** *Прудников, А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции [Текст] / *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*. – М.: Наука, 1981. – 800 с. **8.** *Абезгауз, Г.Г.* Справочник по вероятностным расчетам [Текст] / *Г.Г. Абезгауз, А.П. Тронь, Ю.Н. Копенкин, И.А. Коровина*. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.

Поступила в редколлегию 09.09.2008.