

Д. Г. КОЛИУШКО, канд. техн. наук, ст. науч сотр., НТУ «ХПИ»;
С. С. РУДЕНКО, инж., НТУ «ХПИ»

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙ ТРЕХСЛОЙНУЮ МОДЕЛЬ ГРУНТА, МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

У роботі наведено спосіб апроксимації функції, що характеризує трьохшарову модель ґрунту, методом найменших квадратів. Визначені та проаналізовані фактори, що найбільш суттєво впливають на точність апроксимації. Отримана область застосування метода при апроксимації з заданою похибкою.

The technique of approximation by the method of least squares of function which describes the three-layer model of ground is given in the paper. The factors that influence the most substantial on approximation accuracy are defined and analyzed. The range of method application at approximation with given error is obtained.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Для определения нормируемых параметров заземляющего устройства (ЗУ), в частности, сопротивления ЗУ, напряжения прикосновения и напряжения на ЗУ электрических станций и подстанций используется математическая модель неэквипотенциального ЗУ, размещенного в двухслойном грунте [1]. Однако, по результатам измерений электрических свойств грунта (в настоящее время специалистами НИПКИ «Молния» НТУ «ХПИ» проведено вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) для 750 объектов в 24 областях Украины), его структура, как правило, имеет три, а иногда и более слоев. Учет параметров многослойного грунта в математической модели ведет к повышению точности результатов расчета.

Модель ЗУ, размещенного в многослойном грунте, может быть построена с помощью метода точечного источника тока (ТИТ) [2]. При этом соотношения для расчета потенциала, полученные в [3] и представленные в неявном виде, содержат функции Бесселя нулевого порядка первого рода. Функция, характеризующая многослойную среду (ФМС), представляет собой рациональную дробь и входит в подынтегральные выражения соотношений [3]. Разложение ее в степенной ряд дает возможность применить к выражениям преобразование Вебера-Липшица и привести их к явному виду [3]. Если для двухслойной модели это не вызывает затруднений, то разложение в степенной ряд для трехслойной среды приводит к необходимости взятия для каждого из выражений $m + 1$ интегралов от многочленов m -той степени, где $m + 1$ – количество членов степенного ряда [4]. Поэтому для трехслойной структуры грунта приведение выражений к явному виду с использованием разложения в степенной ряд является громоздким и трудоемким [3].

Задача о представлении выражений в явном виде решается, как правило, с использованием метода приближенного интегрирования [4] при аппроксимации ФМС в ряд суммы экспонент методом неопределенных коэффициентов

или графо-аналитическим методом.

Первый метод заключается в выделении из подынтегральных выражений дробно-рациональной функции, не зависящей от координат точки наблюдения и расположения ТИТ, и разложении ее методом неопределенных коэффициентов в ряд суммы экспонент [4]. Недостатком данного способа является необходимость применять его отдельно к каждому из выражений (их число для трехслойной структуры равно девяти [3]), что не позволяет получить общего решения.

В отличие от метода неопределенных коэффициентов, графо-аналитический метод, дает возможность найти общее решение для всех девяти выражений [4]. Суть метода состоит в том, что на полулогарифмической сетке строится исходная функция ФМС $F(\lambda)$ и спрямляется касательной, которая фактически является аппроксимирующей экспонентой. Вычитая из исходной функции полученную таким образом экспоненту, получают новую функцию $F'(\lambda)$. Итерационный процесс повторяется до достижения требуемой точности. Недостатками графо-аналитического метода являются: достаточно высокая погрешность (до 15 % [4]), отсутствие определенности в выборе интервалов аппроксимации, а также сложность автоматизации данного метода.

Для построения математической модели ЗУ, размещенного в трехслойном грунте, с использованием метода ТИТ, предполагается использовать разложение функции в ряд с погрешностью не более 1 %. Поэтому необходимо разработать способ, позволяющий автоматизировать аппроксимацию ФМС с заданной точностью.

Целью данной работы является аппроксимация ФМС трехслойной модели грунта в сумму экспонент с требуемой точностью.

Результаты исследований. Сделаем допущение, что грунт представляет собой трехслойное полупространство [2], с удельным электрическим сопротивлением ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 для первого, второго и третьего слоев соответственно. Глубина границ раздела первого и второго слоев – h_1 , а второго и третьего – h_2 . В этом случае ФМС [4] имеет вид:

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 - K_{2,1}e^{-2\lambda h_1} + K_{2,1}K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-h_1)} - K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}}, \quad (1)$$

где λ – параметр интегрирования; $K_{i+1,i}$ – коэффициенты, определяемые по выражениям:

$$K_{2,1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}; \quad K_{3,2} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2}.$$

Для приведения соотношений по расчету потенциала к явному виду с использованием преобразования Вебера-Липшица выражение (1) необходимо представить в виде [3]:

$$F'(\lambda) = \sum_{n=0}^m K_n e^{-2\lambda H_n}, \quad (2)$$

где K_n и H_n – коэффициенты, полученные в результате разложения; n – номер

лении всех факторов на основном уровне определялось значение отклика y . Затем каждый из них поочередно устанавливался на нижний или верхний уровень, и фиксировалось изменение отклика [5]. При проведении расчетов степень аппроксимирующего полинома принималась равной $m = 5$, а количество расчетных точек $N = 1000$.

Физическая величина	Уровни факторов:			Значение отклика для основного уровня y , %	Влияние фактора $\pm \gamma$, %
	нижний	основной	верхний		
ρ_1 , Ом·м	50	150	250	0,0092	250
ρ_2 , Ом·м	10	105	200		9848
ρ_3 , Ом·м	20	154	288		56
h_1 , м	0,1	0,8	1,5		11620
h_2 , м	1,5	2,75	4		5,3

Из анализа результатов ВЭЗ следует, что параметры грунта, на которых размещено большинство обследованных энергообъектов, лежат в пределах $\rho_1 \in [40; 500]$ Ом·м, $\rho_2 \in [10; 500]$ Ом·м; $\rho_3 \in [10; 500]$ Ом·м; $h_1 \in [0,05; 3]$ м и $h_2 \in [0,8; 6]$ м. Для проведения однофакторных экспериментов область изменения факторов выбиралась на уровне 40-55 % от области их определения. В таблице приведены значения уровней факторов, отклик y для основного уровня, а также γ – относительное отклонение значения отклика от отклика y при установке соответствующего фактора на нижний или верхний уровень.

Анализ результатов (см. таблицу) позволил выделить наиболее существенно влияющие на точность аппроксимации параметры грунта: глубина раздела первого и второго слоев h_1 , а также их удельное электрическое сопротивление ρ_1 и ρ_2 . Области изменения указанных факторов, при которых погрешность аппроксимации не превышает 1 %, определяют область применения МНК для аппроксимации ФМС. Остальные параметры грунта оказывают слабое воздействие, поэтому на области их изменения строгих ограничений не накладывается.

Выделив существенные факторы из первой группы, рассмотрим влияние степени полинома m на погрешность аппроксимации при различных их сочетаниях. На рис. 1 приведено семейство кривых, характеризующих зависимость погрешности от степени полинома. Кривые 1 и 3 получены при соотношении $\rho_1/\rho_2 = 50$ (то есть $\rho_1 = 500$ Ом·м и $\rho_2 = 10$ Ом·м), а кривые 2 и 4 – при $\rho_1/\rho_2 = 0,02$ (то есть $\rho_1 = 10$ Ом·м и $\rho_2 = 500$ Ом·м), для $h_1 = 1,5$ м, и $h_1 = 0,1$ м соответственно. Значения остальных факторов выбраны из таблицы по основному уровню.

Из построенных графиков видно, что:

- 1) независимо от величины отношения ρ_1/ρ_2 и степени полинома m существуют такие значения границы раздела h_1 , для которых не может быть достигнута погрешность в 1 % и меньше (кривые 3 и 4);
- 2) для кривых 1 и 2, начиная с $m = 7$, погрешность $\delta \leq 1$ %;

- 3) при $m \geq 9$ увеличение степени практически не приводит к повышению точности. Поэтому для дальнейших расчетов примем степень полинома $m = 9$.

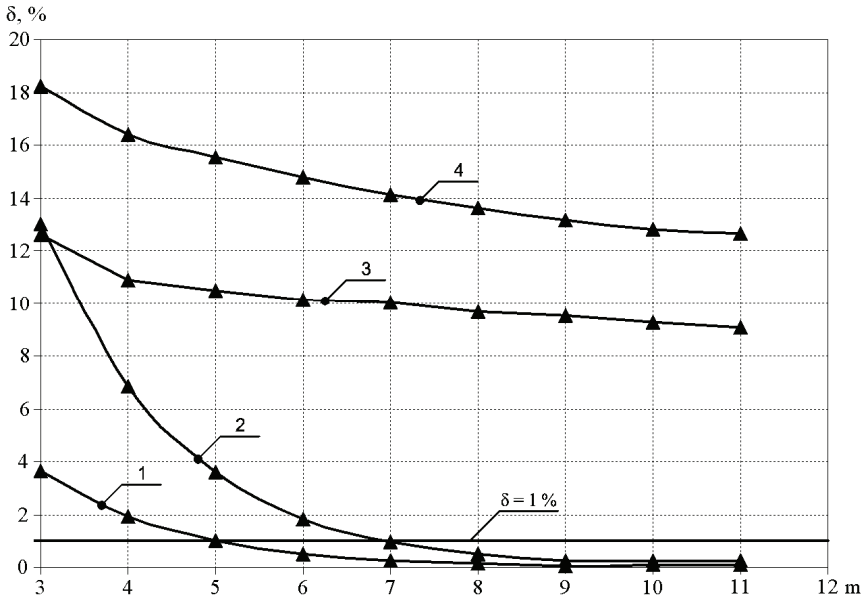


Рисунок 1 – Зависимости погрешности аппроксимации от степени полинома m при различных сочетаниях параметров грунта:

- 1 – $\rho_1/\rho_2 = 50$ и $h_1 = 1,5$ м; 2 – $\rho_1/\rho_2 = 0,02$ и $h_1 = 1,5$ м;
 3 – $\rho_1/\rho_2 = 50$ и $h_1 = 0,1$ м; 4 – $\rho_1/\rho_2 = 0,02$ и $h_1 = 0,1$ м

Для определения области применения МНК для аппроксимации ФМС следует найти величину глубины раздела первого и второго слоев $h_{1\min}$, для которой при $m = 9$ и различных соотношениях ρ_1/ρ_2 погрешность не превышает 1 %.

Зависимости точности аппроксимации от изменения h_1 представлены в виде семейства кривых на рис. 2. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют погрешности аппроксимации при $\rho_1/\rho_2 = 0,02; 0,1; 10$ и 50 соответственно. Все зависимости были получены при $m = 9$, остальные факторы равны основному уровню из таблицы.

Характер зависимостей (см. рис. 2) указывает на то, что область применения МНК для аппроксимации ФМС с погрешностью до 1 % при изменении соотношения ρ_1/ρ_2 от 0,02 до 50 и степени полинома $m = 9$ ограничивается условием $h_{1\min} = 0,48$ м.

Если в результате проведения ВЭЗ оказывается, что $h_1 < h_{1\min}$, то для сохранения погрешности аппроксимации на уровне менее 1 % необходимо определить эквивалентное удельное сопротивление $\rho_{1\text{ЭКВ}}$, приняв в качестве грани-

цы раздела первого и второго слоев эквивалентную границу $h_{1\text{экв.}} \geq h_{1\text{min}}$ [6].
 Задавшись глубиной эквивалентной границы $h_{1\text{экв.}}$, удельное сопротивление рассчитывается по формуле:

$$\rho_{1\text{экв.}} = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 (h_1 \rho_1 + \Delta h \rho_2)}{\rho_2 h_1 + \rho_1 \Delta h}}, \quad (5)$$

где Δh – положительный корень приведенного квадратного уравнения

$$\Delta h^2 + h_1 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2} \Delta h - (h_{1\text{экв.}}^2 - h_1^2) = 0.$$

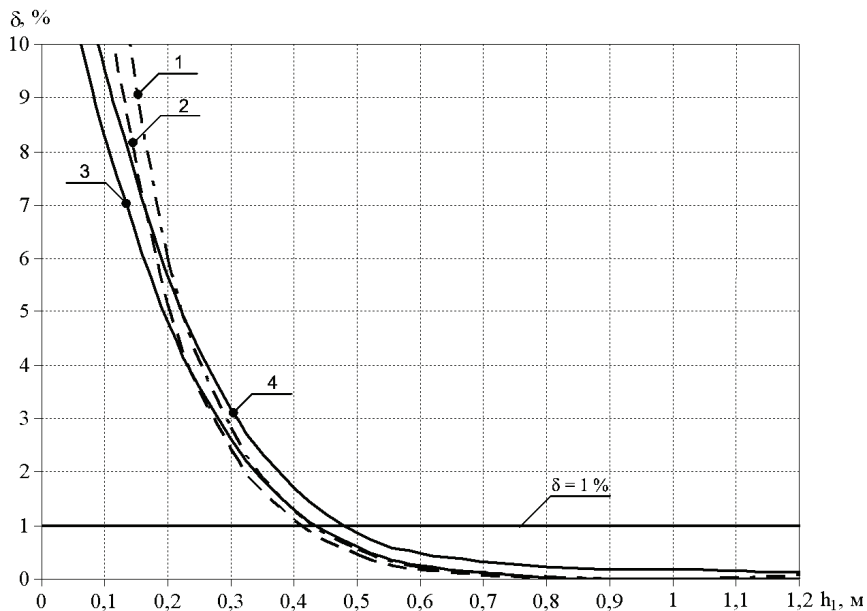


Рисунок 2 – Зависимости погрешности аппроксимации от глубины границы раздела первого и второго слоев:

1 – $\rho_1/\rho_2 = 0,02$; 2 – $\rho_1/\rho_2 = 0,1$; 3 – $\rho_1/\rho_2 = 50$; 4 – $\rho_1/\rho_2 = 10$

Таким образом, с помощью (5) применимость МНК для аппроксимации ФМС с погрешностью менее 1 % может быть распространена на все трехслойные среды, у которых отношение $\rho_1/\rho_2 \in [0,02; 50]$.

Выводы

1. В работе предложен способ аппроксимации функции, характеризующей трехслойную среду, в ряд суммы экспонент при помощи метода наименьших квадратов с погрешностью менее 1 %.
2. Определены наиболее существенно влияющие на точность аппроксимации факторы: глубина раздела первого и второго слоя, их удельные

сопротивления, а также степень аппроксимирующего полинома.

3. Показано, что для аппроксимации целесообразно использовать полином не выше 9 порядка.
4. Получено граничное значение глубины раздела первого и второго слоев, для которого погрешность аппроксимации ФМС с помощью МНК не превышает 1% при изменении соотношения ρ_1/ρ_2 от 0,02 до 50.

Полученные в работе результаты могут быть использованы для разработки математической модели неэквипотенциального ЗУ, размещенного в трехслойном грунте.

Список литературы: 1. *Линк И.Ю.* Математическая модель неэквипотенциального заземляющего устройства подстанции, размещенного в двухслойном грунте / *И.Ю. Линк, Д.Г. Колюшко, Г.М. Колюшко* // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 2. – С. 99-111. 2. *Бургсдорф В.В.* Заземляющие устройства электроустановок / *В.В. Бургсдорф, А.И. Якобс* – М. : Энергоатомиздат. – 1987. – 400 с. 3. *Бургсдорф В.В.* Расчет заземлителей в неоднородных грунтах / *В.В. Бургсдорф* // Электричество. – 1954. – № 1. – С. 15-25. 4. *Максименко Н.Н.* Заземляющие устройства в многолетнемерзлых грунтах / *Н.Н. Максименко*. – Норильск: НГМК. – 1974. – 503 с. 5. *Егоров А.Е.* Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента / *А.Е. Егоров, Г.Н. Азаров, А.В. Коваль*; под ред. *В.Г. Воронова*. – Х. : Вища школа. – 1986. – 240 с. 6. *Коструба С.И.* Измерение электрических параметров земли и заземляющих устройств / *С.И. Коструба*. – М. : Энергоатомиздат. – 1983. – 168 с.

Поступила в редколлегию 01.04.2011