

УДК 551.594

А. А. ПЕТКОВ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ РАЗРЯДОМ ДЛИННОЙ ИСКРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОШАГОВОЙ МОДЕЛИ

Показано, что предложенная модель для диапазона изменения высот ориентировки от 0,78 м до 5 м адекватно описывает распределение точек поражения плоскости длинной искрой. Близкие значения вариативных параметров модели позволяют предложить модель для прогнозирования распределения точек поражения плоскости при больших значениях высоты ориентировки для геометрически подобных разрядных промежутков. Материалы работы могут быть использованы для построения моделей поражения длинной искрой объектов, расположенных на плоской поверхности.

**Ключевые слова:** математическая модель, функция распределения, случайная величина, разряд длинной искры.

**Введение.** Развитие электроэнергетических систем характеризуется широким внедрением управляющего электронного и микропроцессорного оборудования, которое в значительной степени подвержено влиянию электромагнитных процессов, возникающих при разряде молнии, являющейся длинной искрой. Одной из составляющих энергосистем являются загубленные оборудование, которое расположено непосредственно под поверхностью грунта (кабели, заземляющие устройства, оборудование складов, вводы коммуникаций и т.п.). Для обеспечения его надежной работы необходимо изучение закономерностей поражения поверхности грунта финальным разрядом молнии.

**Анализ предварительных исследований и литературы.** В [1] обсуждается современное представление о разряде молнии, рассматриваются эффекты, приводящие к прямому поражению молнией различных объектов. В работе указывается на противоречивость результатов теоретических оценок и лабораторных исследований по проблеме защиты от прямых ударов молнии в различные объекты.

В [2] и дальнейших работах авторов рассмотрен механизм формирования искрового разряда, показано влияние напряженности электрического поля на процесс движения искрового разряда. Предложена электростатическая модель ориентировки молнии, акцентировано внимание на тот факт, что вероятность поражения объектов определяется величиной заряда, наведенного на объекте развивающимся лидером молнии.

Работа [3] посвящена вопросам молниезащиты различных объектов. Рассмотрены различные методики определения защитных свойств молниеотводов.

Рассмотренные работы показывают, что вопросы молниезащиты не имеют законченного рассмотрения и требуют дальнейших разработок по построению моделей поражаемости молнией различных объектов.

Одной из задач такого рода является описание поражения молнией проводящей плоскости. Различные варианты решения данной задачи с тем или иным

приближением рассмотрены в работах [4-6]. Экспериментальные исследования данного вопроса представлены во многих публикациях, например [7-10]. В настоящей работе представлены материалы дальнейших исследований в направлении описания поражения плоскости разрядом длинной искры.

**Цель работы.** Разработка многошаговой модели поражения плоскости длинной искрой и исследование ее применимости для описания распределения точек поражения длинной искрой бесконечной плоской поверхностью.

**Результаты исследований.** Предлагается следующая многошаговая модель поражения плоскости  $Q$  разрядом длинной искры, графическая интерпретация которой при трех шагах движения показана на рис. 1. Искра начинает движение из точки, расположенной на высоте  $H$  (высота ориентировки) над плоскостью  $Q$ , в направлении, которое определяется углом движения  $\theta$  (угол между осью  $OZ$  и направлением движения) и углом ориентировки в горизонтальной плоскости  $\alpha$  (угол между осью  $OX$  и конечной точкой движения на данном шаге). Углы определяются в локальной системе координат, относящейся к рассматриваемому шагу.

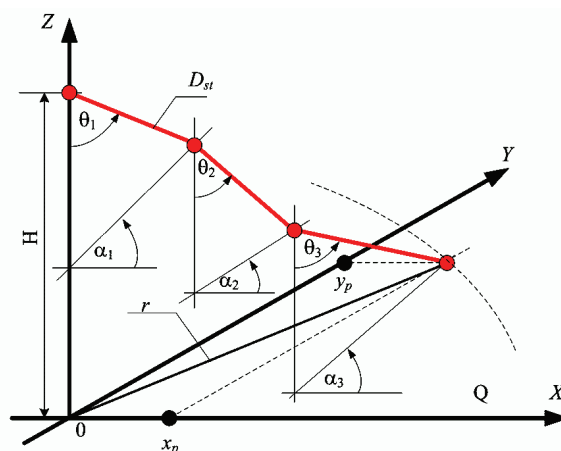


Рисунок 1 – Геометрическая модель движения длинной искры

Угол движения изменяется в интервале  $\theta \in [0, \pi/2)$ , а угол ориентировки в интервале  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . После перемещения на величину шага  $D_{st}$  происходит переориентация направления движения, и искра перемещается в новом направлении на величину следующего шага и так далее до поражения плоскости (точка плоскости с координатами  $x_p$  и  $y_p$  – точка пересечения плоскости прямой линией, определяющей последний шаг движения искры). В модели принято, что шаг движения  $D_{st}$  является постоянной величиной.

Исходя из наблюдений развития молний и экспериментальных данных, предполагается, что углы, определяющие направление движения искры, являются случайными величинами. Проводя многократные расчеты по описанной модели при случайных значениях углов движения и ориентировки, можем получить функцию распределения точек поражения плоскости длинной искрой, которая, в силу симметрии разрядного промежутка, представима в виде  $F(r) = \Phi(H, D_{st})$ , где  $r$  – радиус расположения точек поражения плоскости в исходной системе координат (рис. 1).

Пусть имеется событие  $A$ , которое заключается в том, что искра совершает прямолинейное движение (шаг) в направлении плоскости (на рис. 2 – от т. 1 к т. 2). Величина шага движения  $D_{st}$  составляет часть расстояния  $D$  – расстояния от точки начала движения до плоскости в данном направлении. Тогда вероятность такого события  $P(A)$  является вероятностью того, что движение искры осуществляется под углом  $\alpha$  в горизонтальной плоскости и под углом  $\theta$  в вертикальной плоскости. Для рассматриваемой модели, можно утверждать, что вероятность движения под углом  $\alpha$  –  $P(\alpha)$  не зависит от вероятности движения под углом  $\theta$  –  $P(\theta)$  и наоборот.

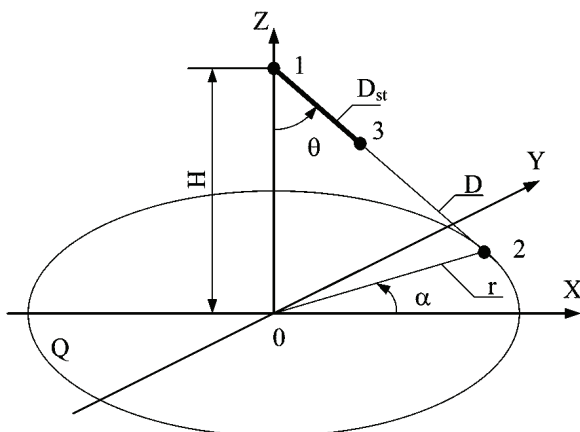


Рисунок 2 – Геометрическая модель первого шага движения длинной искры

Тогда вероятность события  $A$  равна  $P(A) = P(\alpha)P(\theta)$ . (1)

Исходя из симметричности модели в горизонтальной плоскости, угол  $\alpha$  имеет равномерное распределение с плотностью

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha \in [0, 2\pi) \quad (2)$$

и функцией распределения

$$F(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \quad (3)$$

Пусть известно, что движение искры происходит под углом  $\theta$ , и известна вероятность этого события, которую представим в виде

$$p(\theta) = \frac{k}{D^m}. \quad (4)$$

где  $m > 1$ .

Вид зависимости (4) выбран исходя из известного факта, подтверждаемого многочисленными экспериментами: чем больше расстояние от точки начала движения разряда до точки на плоскости, тем меньше количество поражений плоскости искрой.

Используя геометрическое представление вероятностей [11] определим функцию распределения угла  $\theta$  в виде

$$F(\theta) = \frac{\int_H^D \frac{k}{D^m} dD}{\int_H^\infty \frac{k}{D^m} dD}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (5)$$

Вычисляя интегралы при  $m > 1$ , имеем

$$F(\theta) = 1 - \left(\frac{H}{D}\right)^{m-1}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (6)$$

Подставив  $D = H/\cos \theta$  (см. рис. 2), получим

$$F(\theta) = 1 - (\cos \theta)^{m-1}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (7)$$

Тогда плотность распределения угла  $\theta$  равна

$$f(\theta) = (m-1) \sin \theta (\cos \theta)^{m-2}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (8)$$

Радиус точки на плоскости т.2, к которой движется искра определить из соотношения

$$r = D \sin \theta. \quad (9)$$

Используя материалы, приведенные в [11], определим плотность распределения радиуса

$$g(r) = f[\varphi(r)] |\varphi'(r)| = \frac{r^{m-1}}{D^2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{r}{D}\right)^2} \right]^{m-3}, \quad (10)$$

где  $\varphi(r) = \theta = \arcsin \frac{r}{D}$  – функция, обратная (9).

Тогда функция распределения радиуса определится из соотношения

$$G(r) = \int_0^r g(r) dr = 1 - \left[ 1 - \left(\frac{r}{D}\right)^2 \right]^{0,5(m-3)+1} \quad (11)$$

или определяя радиус через высоту ориентировки  $r = H \operatorname{tg} \theta$  (12)

и проводя аналогичные преобразования, имеем плотность распределения в виде

$$g(r) = \frac{r^{m-1}}{H^2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{r}{H}\right)^2} \right]^{-(m+1)} \quad (13)$$

и функцию распределения

$$G(r) = 1 - \left[ 1 + \left( \frac{r}{H} \right)^2 \right]^{1-0,5(m+1)} \quad (14)$$

Соотношения (11) и (14) могут быть использованы для определения распределения точек поражения плоскости в случае, если изначально  $D_{st} > D$ .

В общем случае для определения распределения точек поражения плоскости используем многошаговую процедуру, на каждом шаге которой производятся следующие действия.

Генерируем случайное значение угла движения  $\theta$ , используя известную методику [11]:

– задаемся равномерно распределенным случайным значением  $F_{st}$  в интервале  $[0, 1]$ ;

– используя (7), находим случайное значение угла движения из решения уравнения

$$F_{st} = 1 - (\cos \theta)^{m-1} \quad (15)$$

как

$$\theta = \arccos \left[ \left( 1 - F_{st} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]. \quad (16)$$

Генерируем случайное значение угла ориентирования в горизонтальной плоскости  $\alpha$

$$\alpha = 2\pi M_{sl}, \quad (17)$$

где  $M_{sl}$  – случайное число, равномерно распределенное в интервале  $[0, 1]$ .

Далее определяем расстояние до плоскости  $D$  в направлении луча, определяемого углами  $\theta$  и  $\alpha$ .

Если шаг движения  $D_{st}$  меньше расстояния до плоскости в данном направлении  $D$ , то двигаемся по лучу, определяемому углами  $\theta$  и  $\alpha$  на величину шага движения  $D_{st}$ . На каждом шаге вычисляем величину смещения по осям координат (на рис. 3:  $1^*$  – начальная точка движения на данном шаге,  $3^*$  – конечная точка движения на данном шаге):

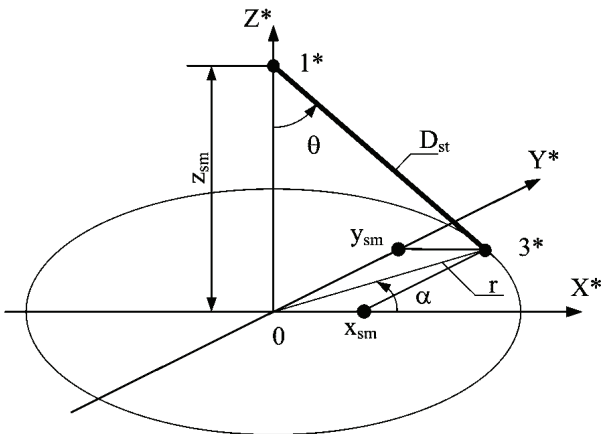


Рисунок 3 – Параметры, характеризующие шаг движения

– по оси  $OX^*$

$$x_{sm} = r \cos \alpha = D_{st} \sin \theta \cos \alpha, \quad (18)$$

– по оси  $OY^*$

$$y_{sm} = r \sin \alpha = D_{st} \sin \theta \sin \alpha, \quad (19)$$

– по оси  $OZ^*$

$$z_{sm} = D_{st} \cos \theta. \quad (20)$$

Далее определяем координаты конечной точки движения

$$\begin{cases} x_{3^*} = x_{1^*} + x_{sm}, \\ y_{3^*} = y_{1^*} + y_{sm}, \\ z_{3^*} = z_{1^*} - z_{sm}. \end{cases} \quad (21)$$

При выполнении условия  $D_{st} < D$  конечную точку движения на данном шаге принимаем за начальную точку движения на следующем шаге и повторяем вычисления по (16) – (21).

Если шаг  $D_{st}$  больше или равен расстоянию до плоскости в данном направлении  $D$ , то фиксируется факт поражения плоскости искрой и определяются координаты точки поражения (на рис. 4:  $1^*$  – начальная точка движения на поражающем шаге,  $2^*$  – точка поражения плоскости).

Координаты точки поражения определяются по соотношениям

$$\begin{cases} x_p = x_k + D \sin \theta \cos \alpha, \\ y_p = y_k + D \sin \theta \sin \alpha, \\ z_p = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для проведения численного моделирования в соответствии с описанным алгоритмом была разработана компьютерная программа в среде *Excel* с использованием *Visual Basic for Application*.

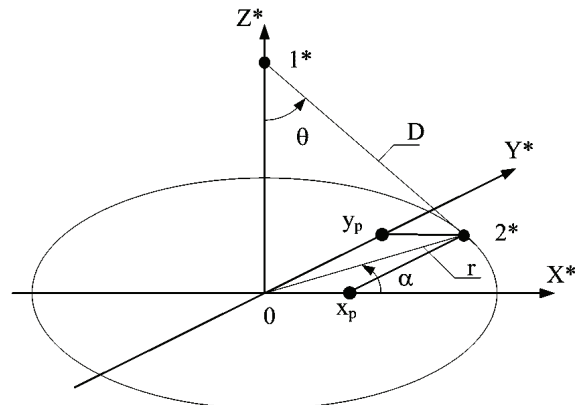


Рисунок 4 – Параметры, характеризующие последний (поражающий) шаг движения

Как следует из выражений (16) и (18) – (20), вариативными параметрами предложенной модели являются величины  $m$  и  $D_{st}$ , изменяя которые, мы можем выбрать лучший расчетный вариант при моделировании. В качестве меры совпадения расчетного и экспериментального распределения точек поражения плоскости был выбран критерий Колмогорова [12].

Постановка общей задачи исследования формулируется следующим образом.

**Задача 1.** Для имеющегося набора экспериментальных данных точек поражения плоскости  $n = f(r)$  необходимо минимизировать целевую функцию вида

$$\Psi_{cel} = \min [\max |F_e(r) - F_m(r)|] \quad (0 \leq r < \infty), \quad (23)$$

изменяя вариативные параметры

$$m > 1, D_{st} \geq H,$$

где  $n$  – количество точек поражения,  $F_e(r)$  – эмпирическая функция распределения радиуса точек поражения,  $F_m(r)$  – функция распределения радиуса точек поражения, полученная при моделировании.

**Задача 2.** Для минимизированного варианта проверить гипотезу о согласии функций распределения, используя критерий [12]

$$d_{\max} = \max |F_e(r) - F_m(r)| \quad (0 \leq r < \infty). \quad (24)$$

Условие принятия гипотезы определяется неравенством

$$d_{\max} \leq k_{n,0,05}, \quad (25)$$

где  $k_{n,0,05}$  – критическое значение критерия при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

В качестве опытных данных были использованы экспериментальные данные, приведенные в [7-10]. Модели разрядных промежутков, использованных в указанных работах, в которых формировался разряд длиной искры, показаны на рис. 5, а характеристики экспериментов приведены в табл. 1.

Следует отметить особенность модели, показанной на рис. 5, а: она является несимметричной относительно вертикальной оси верхнего электрода и имеет плоскость, расположенную над верхним электродом и соединена с ним [7], что не полностью соответствует принятой расчетной модели.

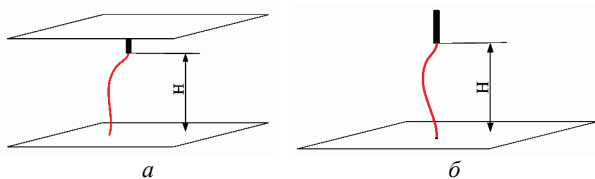


Рисунок 5 – Модели разрядных промежутков для экспериментов *A, B* (а); *C, D, E, F* (б)

В табл. 1 обозначено:  $n$  – общее количество экспериментальных точек;  $K_{st} = D_{st} / H$  – коэффициент шага.

Таблица 1 – Характеристики экспериментов

Обозначение эксперимента	Параметры эксперимента					
	$n$	$H, \text{ м}$	$m$	$K_{st}$	$d_{\max}$	$k_{n,0,05}$
<i>A</i>	234	1,27	27	0,58	0,079	0,089
<i>B</i>	250	1,27	30	0,58	0,058	0,086
<i>C</i>	202	0,78	18	0,6	0,039	0,096
<i>D</i>	192	0,78	17	0,62	0,036	0,098
<i>E</i>	47	3	17	0,59	0,096	0,198
<i>F</i>	50	5	17	0,59	0,132	0,192
<i>A+B</i>	484	1,27	28,5	0,58	0,058	0,062
<i>C+D</i>	394	0,78	17,5	0,6	0,042	0,068

Характерные графики функции распределения радиуса точек поражения плоскости и относительной частоты поражения окружности радиусом  $r$  показаны

на рис. 6. На графиках сплошной линией показаны результаты моделирования, точками – экспериментальные данные.

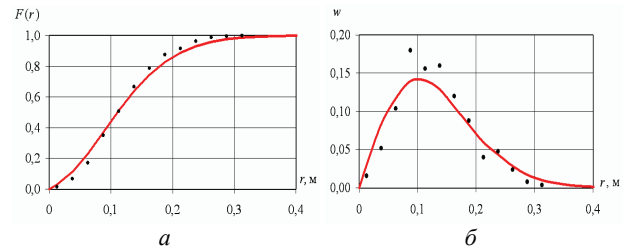


Рисунок 6 – Функция распределения радиуса точек поражения плоскости (а) и относительная частота поражения окружности (б) для эксперимента *B*

Ввиду того, что в работе [8, 10] было показано, что данные экспериментов *A* и *B*, а также *C* и *D* попарно принадлежат одним совокупностям, было проведено исследование с использованием совместных данных указанных экспериментов: соответственно *A + B*, и *C + D*.

Как видно из табл. 1, для всех экспериментов выполняется условие (25), что позволяет принять гипотезу о согласии эмпирических функций распределения радиуса точек поражения с функциями распределения радиуса точек поражения, полученными при моделировании, что свидетельствует об адекватности предложенной модели экспериментальным данным. Характерным для модели являются близкие значения ее вариативного параметра  $K_{st} = 0,58 - 0,62$  для всех вариантов моделирования. Данные для вариативного параметра модели  $m$  позволяют констатировать его зависимость от вида системы полеобразования, в которой формируется разряд длиной искры. Однако для геометрически подобных систем его значения близки: для экспериментов, проводимых в системах, показанных на рис. 5а –  $m = 27 - 30$ ; в системах, показанных на рис. 5б –  $m = 17 - 18$ .

**Выводы.** 1. Выведено соотношение для определения функции распределения угла движения длинной искры в предположении, что вероятность движения к точке плоскости обратно пропорциональна расстоянию от исходной точки движения до данной точки в степени большей единицы. Предложена модель поражения плоскости разрядом длиной искры.

2. Показано, что предложенная модель для диапазона изменения высот ориентировки от 0,78 м до 5 м адекватно описывает распределение точек поражения плоскости длинной искрой.

3. Близкие значения вариативных параметров модели  $m$  и  $K_{st}$  позволяют предложить модель для прогнозирования распределения точек поражения плоскости при больших значениях высоты ориентировки для геометрически подобных разрядных промежутков.

Материалы работы могут быть использованы для построения моделей поражения длинной искрой объектов, расположенных на плоской поверхности.

**Список литературы:** 1. Uman M. The Lightning Discharge / M. Uman. – N.Y.: Acad. Press, 1987. – 377 p. 2. Alexandrov G.N. New investigations in the lightning protection substations // G.N. Alexandrov, G. Berger, C. Gary. – CIGRE, 1994, Rep. 23/13-14. 3. IEC 62305-1, Ed. 1: Protection against lightning – Part 1: General Principles. – IEC, 2003. – 61 p. 4. Кобилюшко Д.Г. Статистическая двумерная модель разряда молнии на бесконечный прямолинейный проводник / Д.Г. Кобилюшко, А.А. Петков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Техніка та електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – №16. – С. 118–126. 5. Кобилюшко Д.Г. Статистическая модель поражения плоскости разрядом молнии / Д.Г. Кобилюшко, А.А. Петков // Физические и компьютерные технологии: труды 17-й Международной научно-технической конференции (Харьков, 20–21 сентября 2011г.). – Х.: ХНПК "ФЭД", – 2011. – С. 153–155. 6. Куксов А.О. Імітаційне моделювання влучення розряду довгої іскри в точки площини в неоднорідному полі / А.О. Куксов, О.О. Петков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетика: надійність та енергоефективність. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 24 (1067). – С. 40–49. 7. Волкова О.В. Поражаемость искровым разрядом стержня на плоскости / О.В. Волкова, А.Р. Корявин // Электричество. – 1991. – № 5. – С. 52–55. 8. Кобилюшко Г.М. Экспериментальное исследование поражения плоскости длиной искрой / Г.М. Кобилюшко, П.Н. Мельников, О.С. Недзельский и др. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Техніка та електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ «ХПІ», 2012. – № 21. – С. 146–153. 9. Баранов М.І. Экспериментальные исследования поражения заземленной плоскости и размещенных на ней объектов электрическим разрядом в длинном промежутке / М.І. Баранов, В.І. Доценко, В.М. Зиньковский и др. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Техніка та електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 27. – С. 11–20. 10. Кобилюшко Г.М. Влияние конфигурации системы электродов на распределение точек поражения плоскости длиной искрой / Г.М. Кобилюшко, П.Н. Мельников, О.С. Недзельский и др. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Техніка та електрофізика високих напруг. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 60. – С. 57–70. 11. Korn, G. Mathematical handbook for scientists and engineers / G. Korn, T. Korn. – N. Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968. – 832 p. 12. Hauschild V. Statistik für Elektrotechniker. Eine Darstellung an Beispielen aus der Hochspannungstechnik / V. Hauschild, V. Mosch. – Berlin: VEB Verlag Technik, 1984. – 312 s.

**Bibliography (transliterated):** 1. Uman M. The Lightning Discharge. M. Uman. N.Y.: Acad. Press, 1987. 377. Print. 2. Alexandrov G.N. New investigations in the lightning protection substations. G.N. Alexandrov,

G. Berger, C. Gary. CIGRE, 1994, Rep. 23/13-14. Print. 3. IEC 62305-1, Ed. 1: Protection against lightning. Part 1: General Principles. IEC, 2003. 61. Print. 4. Koliushko D.G. Statisticheskaya dvumernaya model razryada molnii na beskonечnyy pryamolineynyy provodnik. D.G. Koliushko, A.A. Petkov. Visnik Natsionalnogo tehničnogo unіversitetu "Kharkivskiy politehničniy Institut". Zbirnik naukovih prats. Tematichniy vipusk: Tehnika i elektrofizika visokih naprug. – Kharkiv: NTU "KhPI". 2011. No 16. 118–126. Print. 5. Koliushko D.G. Statisticheskaya model porazheniya ploskosti razryadom molnii. D.G. Koliushko, A.A. Petkov. Fizicheskie i kompyuternye tehnologii: trudy 17-y Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii (Kharkiv, 20–21 sentyabrya 2011g.). Kharkiv: HNPK "FED", 2011. 153–155. Print. 6. Kuksov A.O. Imitatsiyne modelyuvannya vlučennya rozryadu dovgoyi iskry v točki ploschiny v neodnorodnomu poli. A.O. Kuksov, O.O. Petkov. Visnik Natsionalnogo tehničnogo unіversitetu "Kharkivskiy politehničniy Institut". Zbirnik naukovih prats. Seriya: Energetika: nadiynist ta energoefektivnist. Kharkiv: NTU "HPI". 2014. No 24 (1067). 40–49. Print. 7. Volkova O.V. Porazhaemost iskrovym razryadom sterzhnya na ploskosti. O.V. Volkova, A.R. Koryavin. Elektrichestvo. 1991. No 5. 52–55. Print. 8. Koliushko G.M. Eksperimentalnoe issledovanie porazheniya ploskosti dlinnoy iskroy. G.M. Koliushko, P.N. Melnikov, O.S. Nedzelskiy i dr. Visnik Natsionalnogo tehničnogo unіversitetu "Kharkivskiy politehničniy Institut". Zbirnik naukovih prats. Tematichniy vipusk: Tehnika ta elektrofizika visokih naprug. Kharkiv: NTU "KhPI". 2012. No 21. 146–153. Print. 9. Baranov M.I. Eksperimentalnye issledovaniya porazheniya zazemlennoy ploskosti i razmeschennyh na ney ob'ektov elektricheskim razryadom v dlinnom promezhutke. M.I. Baranov, V.I. Dotsenko, V.M. Zinkovskiy i dr. Visnik Natsionalnogo tehničnogo unіversitetu "Kharkivskiy politehničniy Institut". Zbirnik naukovih prats. Tematichniy vipusk: Tehnika ta elektrofizika visokih naprug. Kharkiv: NTU "KhPI". 2013. No 27. 11–20. Print. 10. Koliushko G.M. Vliyanie konfiguratsii sistemiy elektrodov na raspredelenie toček porazheniya ploskosti dlinnoy iskroy. G.M. Koliushko, P.N. Melnikov, O.S. Nedzelskiy i dr. Visnik Natsionalnogo tehničnogo unіversitetu "Kharkivskiy politehničniy Institut". Zbirnik naukovih prats. Tematichniy vipusk: Tehnika ta elektrofizika visokih naprug. Kharkiv: NTU "HPI". 2013. No 60. 57–70. Print. 11. Korn, G. Mathematical handbook for scientists and engineers. G. Korn, T. Korn. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968. 832. Print. 12. Hauschild V. Statistik für Elektrotechniker. Eine Darstellung an Beispielen aus der Hochspannungstechnik. V. Hauschild, V. Mosch. Berlin.: VEB Verlag Technik, 1984. 312 Print.

Поступила (received) 13.10.2015

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Петков Александр Александрович** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры «Инженерная электрофизика», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (067) 572–00–58; e-mail: apetkov@yandex.ua.

**Petkov Alexander Alexandrovich** – Doctor of technical sciences, Senior researcher, Professor of the Department "Engineering Electrophysics", National Technical University "KhPI"; tel.: (067) 572–00–58; e-mail: apetkov@yandex.ua.