

Ю.А. Сизый, Д.В. Сталинский, П.В. Романченко

## ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ШЛИФОВАЛЬНОГО КРУГА, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ПОГРЕШНОСТЯМИ ЕГО ФОРМЫ

Одной из важнейших характеристик абразивных кругов для ручного обдирочного шлифования является неуравновешенность, поскольку определяет вибрационную характеристику работы ручных шлифовальных машин и, как следствие, условия работы операторов по вибрационной безопасности. В условиях современного абразивного производства, когда неоднородность структуры инструмента сведена к минимуму, основной причиной неуравновешенности являются погрешности геометрической формы абразивного круга. В статье получены формулы для расчета величины смещения центра тяжести круга, обусловленного погрешностями его формы, такими как эксцентricность оси вращения относительно наружной поверхности круга и непараллельностью его торцов. На основе полученных формул произведен анализ требований к точности изготовления кругов для ручных шлифовальных машин. Установлена несогласованность требований ГОСТ 23182-78 между нормируемой им геометрической точностью абразивного круга и допустимым дисбалансом.

**Ключевые слова:** шлифовальный круг, погрешности формы круга, дисбаланс, ручная шлифовальная машина.

**Введение.** Одной из важнейших характеристик абразивных кругов для ручного обдирочного шлифования является неуравновешенность, поскольку определяет вибрационную характеристику работы ручных шлифовальных машин и, как следствие, условия работы операторов по вибрационной безопасности. В условиях современного абразивного производства, когда неоднородность структуры инструмента сведена к минимуму, основной причиной неуравновешенности являются погрешности геометрической формы абразивного круга. В настоящее время неуравновешенность масс абразивных кругов для ручных шлифовальных машин, как и геометрическая точность их изготовления, нормируется ГОСТ 23182-78, однако теоретической взаимосвязи между величиной неуравновешенности масс абразивного круга и погрешностями его геометрической формы не выявлено, что не позволяет оценить согласованность вышеуказанных требований.

**Цель исследований.** Целью исследований является установление математической зависимости между неуравновешенностью масс абразивного круга (дисбалансом) и величинами погрешностей его геометрической формы с последующим сравнением расчетного дисбаланса при максимально-допустимых погрешностях геометрической формы с нормируемым.

Основными погрешностями формы круга, ведущими к смещению его центра тяжести относительно оси вращения, т.е. к дисбалансу являются эксцентricность оси вращения относительно наружной поверхности круга, обозначенная  $e$  и непараллельность торцов круга, обозначенная  $b$ .

**Результаты исследований.** Так как эксцентricность рассматривается в плоскости перпендикулярной оси вращения круга, то высота круга не влияет на смещение центра тяжести круга от эксцентricности  $X_c(e)$ . Поэтому  $X_c(e)$  находим рассматривая эту

задачу для плоской фигуры, ограниченной радиусом  $R$  (наружный радиус круга) с центром в точке  $O$ , и окружностью радиусом  $r$  (радиус посадочного отверстия) с центром в точке  $O'$ , смещенным относительно точки  $O$  на величину  $OO' = e$  (рис. 1).

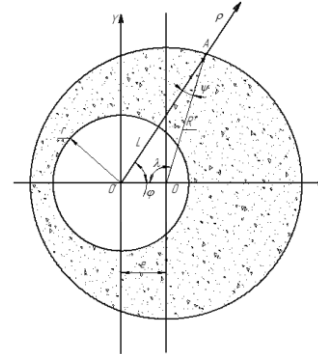


Рис. 1 – Схема к расчету положения центра тяжести при эксцентricности  $e$  отверстия в круге

Для плоской однородной фигуры координаты центра тяжести по оси  $X$ , т.е.  $X_c$ , определяются следующим образом [1]:

$$X_c = \frac{\int x ds}{S}, \quad (1)$$

где  $S$  – площадь фигуры.

Так как плоская фигура не сплошная, а с отверстием, то удобно  $X_c$  определять, описывая числитель и знаменатель в полярной системе координат. Полнос

расположим в центре декартовой системы координат  $XO'Y$

Радиус-вектор  $\rho$  ограничим окружностью радиуса  $r$  с центром в точке  $O'$  и окружностью радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ , смещенном вдоль оси  $X$  от центра  $O'$  на величину  $e$ .

Следовательно, чтобы описать фигуру на рис. 1 в полярной системе координат, необходимо описать окружность радиуса  $R$  с полюсом в точке  $O'$  в полярной системе координат.

Таким образом, надо описать вектор  $\overline{O'A}$  из треугольника  $O'AO$ . Обозначим  $O'A = L$ ;  $O'O = e$  и  $OA = R$ . Углы этого треугольника обозначены на рис.2.1.

Согласно теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin \varphi} = \frac{e}{\sin \psi} \Rightarrow \sin \psi = \frac{e \sin \varphi}{R} \Rightarrow \psi = \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right).$$

Из треугольника  $O'AO$  найдем угол  $\lambda$ , противолежащий стороне  $L$ :

$$\lambda = \pi - \varphi - \psi.$$

Из треугольника  $O'AO$ , воспользовавшись теоремой синусов, определим сторону  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{L}{\sin \lambda} &= \frac{R}{\sin \varphi} \Rightarrow L = \frac{R \sin \lambda}{\sin \varphi} = \frac{R}{\sin \varphi} \sin(\pi - \varphi - \psi) = \\ &= \frac{R}{\sin \varphi} \sin \left( \pi - \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) \right) = \\ &= \frac{R}{\sin \varphi} \sin \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь можно расписать (1) в полярной системе координат:

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^L \rho d\rho \cdot \rho \cos \varphi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^L \rho d\rho}. \quad (3)$$

Рассмотрим решение числителя выражения (3):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^L \rho d\rho \cdot \rho \cos \varphi &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_r^L \rho^2 d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_r^L \right) = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \left( \frac{L^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражение (2) в (4) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \left( \frac{R^2}{3 \sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) - \frac{r^2}{3} \right) &= \\ = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos \varphi}{3 \sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{3} \cos \varphi d\varphi &= \\ = \frac{R^2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \frac{r^2}{3} \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} &= \\ = \frac{R^2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим решение знаменателя в выражении (2.4):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^L \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{L^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (6)$$

Подставив выражение (2) в (6) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{R^2}{2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) - \frac{r^2}{2} \right) &= \\ = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2 \sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi &= \\ = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi &= \\ = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \frac{r^2}{2} \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) &= \\ = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \pi r^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив полученные выражения числителя (5) и знаменателя (7) в выражение (3) получим общее вы-

ражение для определения координаты центра тяжести по оси  $X$  фигуры на рис.1:

$$X_c = \frac{\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi}{\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sin^2 \left( \varphi + \arcsin \left( \frac{e}{R} \sin \varphi \right) \right) d\varphi - \pi r^2}. \quad (8)$$

В качестве примера выполнен расчет  $X_c(e)$  для круга ПП 150x25x32, т.е. для следующих данных:  $R = 75$ мм,  $r = 16$ мм; изменения  $e$  дискретно от 0,05мм до 0,6мм. Расчет выполнен в «Mathcad» и приведен на рис.2

Анализ расчета показывает, что различие между  $e$  и  $X_c(e)$  растет с ростом  $e$ . Однако в пределах  $e = (0,05 \div 0,45)$ мм это различие не превышает 4%, что позволяет принимать  $X_c(e) \approx e$ .

$$R_x := 75 \quad r := 16 \quad e_x := 0.05, 0.15, 0.6$$

$$X_c(e) := \frac{\frac{R^2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)^3} \cdot \sin\left(\phi + \arcsin\left(e \cdot \frac{\sin(\phi)}{R}\right)\right)^3 d\phi}{\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin(\phi)^2} \cdot \sin\left(\phi - \arcsin\left(e \cdot \frac{\sin(\phi)}{R}\right)\right)^2 d\phi - \pi \cdot r^2}$$

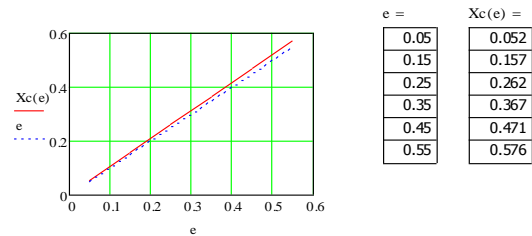


Рис.2 – Смещение центра тяжести  $X_c$  от эксцентриситета  $e$

Расчет смещения центра тяжести круга, обусловленного непараллельностью торцов, выполняем из условия однородной плотности круга по всему его объему.

У круга, показанного на рис.3, центр тяжести смещен по оси  $X$  в положительном ее направлении и непараллельность торцов круга определяется параметром  $b$ .

В данном случае задача является объемной и координата центра тяжести  $X_c$  по оси  $X$  рассчитывается в общем случае для однородного тела следующим образом [1]:

$$X_c = \frac{\int_V x dv}{V}, \quad (9)$$

где  $V$  – объем тела.

Поскольку шлифовальный круг представляет собой тело вращения, то расчет  $X_c$  удобно производить в цилиндрической системе координат. В этом случае:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho d\rho \int_{z_1}^{z_2} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho d\rho [z_2 - z_1], \end{aligned} \quad (10)$$

где:  $z_2$  – уравнение прямой  $ED$ ;

$z_1$  – уравнение прямой  $AB$  (рис.3).

Согласно рис.3  $z_1 = 0$ , а  $z_2$  получим как линию, проходящую через точки  $E(z_1, X_1) = E(C, -R)$  и  $D(z_2, X_2) = D(C+b, R)$ :

$$z_2 = \frac{b}{2R}(X + R) + C. \quad (11)$$

Подставив уравнение  $ED$  и  $AB$ , т.е.  $z_1$  и  $z_2$  и  $X = r \sin \varphi$  в (8) получим:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho dr \left[ \frac{b}{2R} (\rho \sin\varphi + R) + C \right] = (R^2 - r^2) \left( \frac{b}{2} + C \right) \cdot \pi. \quad (12)$$

Распишем выражение для числительного (9) в цилиндрической системе координат:

$$\int_V x dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho dr \int_{z_2}^{z_1} \rho \sin\varphi dz \quad (13)$$

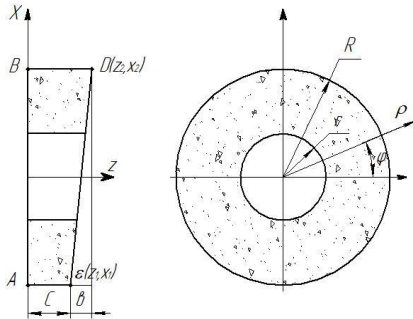


Рис. 3 – Схема для расчета положения центра тяжести в зависимости от непараллельности торцов

Подставив в (13) значения  $z_1=0$ ,

$z_2 = \frac{b}{2R} (X + R) + C$ ,  $X = r \sin\varphi$ , получим

$$\int_V x dv = \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_r^R \rho^2 dr \left[ \frac{b}{2R} (\rho \sin\varphi + R) + C \right] \quad (14)$$

Проинтегрировав (14), получим

$$\int_V x dv = \frac{b \cdot \pi}{8 \cdot R} (R^4 - r^4) \quad (15)$$

Подставив (10) и (13) в (7) получим окончательно:

$$X_c(b, C) = \frac{b(R^2 + r^2)}{8R(\frac{b}{2} + C)} \quad (16)$$

На рис.4 выполнен анализ (14) для круга с  $R = 75$  мм и  $r = 16$  мм. Из графиков этого рисунка видно, что  $X_c$  растет практически линейно и уменьшается с ростом высоты круга  $C$ .

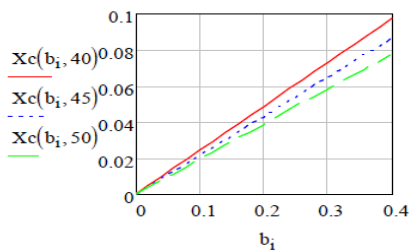


Рис.4 – Анализ смещения центра тяжести круга от непараллельности его торцов

Владея формулами  $X_c(e)$  и  $X_c(b, C)$  можно рассчитать неуравновешенность (дисбаланс) круга  $m_d$ .

Он рассчитывается как произведение неуравновешенной массы на расстояние до оси вращения:

$$m_d = m \cdot r, \quad (17)$$

где  $r = X_c$ ;  $m$  – неуравновешенная масса, кг.

При расчете  $m_d$  от эксцентриситета  $X_c = X_c(e) \approx e$ , а при расчете  $m_d$  от непараллельности  $X_c = X_c(b, C)$  и вычисляется по (14). ГОСТ 23182-78 нормирует ради-

альное биение наружной поверхности круга относительно оси посадочной поверхности величиной 0,2 мм. Следовательно, смещение оси отверстия относительно оси наружной поверхности т.е. эксцентриситет  $e = 0,2/2 = 0,1$  мм.

Для круга ПП 150x25x32 массой  $m_{кр} = 1,138$  кг величина дисбаланса  $m_d(e) = 1,138 \cdot 0,1 = 0,1138$  кг·мм.

ГОСТ 23182-78 нормирует для кругов ручных шлифовальных машин отклонение от параллельности торцов величиной  $b = 0,1$  мм. Расчет для круга ПП 150x25x32 по (14) дает  $X_c(b, C) = 0,039$  мм, и соответственно  $m_d(b) = 1,138 \cdot 0,039 = 0,0445$  кг·мм. Тот же ГОСТ 23182-78 нормирует допустимую неуравновешенную массу круга величиной  $0,004 \cdot m_{кр}$  на радиусе круга.

Поэтому, допустимый дисбаланс согласно ГОСТ 23182-78 для круга ПП 150x25x32 получится равным  $m_d = 0,004 \cdot m_{кр} \cdot R = 0,004 \cdot 1,138 \cdot 75 = 0,3414$  кг·мм.

Если исходить из того, что нормирование погрешностей формы круга преследует цель ограничения его дисбаланса, то возникающий дисбаланс как от предельно допустимых эксцентриситетов и параллельности торцов круга значительно меньше допустимого дисбаланса. Даже если предположить, что векторы  $X_c(e)$  и  $X_c(b)$  совпадут, то суммарный дисбаланс  $m_d = m_d(e) + m_d(b) = 0,1138 + 0,0445 = 0,1583$  кг·мм, что в  $0,3414/0,158 = 2,16$  раза меньше чем нормируемый.

**Выводы.** Результаты исследований указывает на несогласованность требований ГОСТ 23182-78 между нормируемой им точностью формы круга и допустимым дисбалансом.

Полученные формулы расчета  $X_c(e)$  и  $X_c(b)$  могут быть использованы для моделирования вибраций ручных шлифовальных машин, возбужденных дисбалансом вращающегося круга.

**Список литературы:** 1. Сталинский Д.В. Влияние неуравновешенности масс абразивных кругов на вибрационную характеристику работы ручных шлифовальных машин / Д.В. Сталинский, Ю.А. Сизый, Л.Г. Яровая, П.В. Романченко // Экология та виробництво. – 2002. – No2-3. – С. 53 – 56. 2. Сталинский Д.В. Влияние точности изготовления и эксплуатационных свойств абразивного инструмента на условия работы операторов ручных шлифовальных машин / Д.В. Сталинский, Л.Г. Яровая, П.В. Романченко // Сб. научн. статей к XI Международной научно-технической конференции «Экология и здоровье человека. Охрана водного и воздушного бассейнов. Утилизация отходов». – Харьков. – УкрГНТЦ «Энергосталь», 2003. – Т1. – С. 89 – 97.

**Bibliography (transliterated):** 1. Stalinskiy D. V., Sizi Yu. A., Yrovay L. G., Romanchenko P. V. The influence of the unbalance mass of abrasive wheels on vibration characteristics of hand grinding machines. Ecology vrobniectvo. - 2002. - No. 2-3. - pp. 53 - 56. 2. Stalinskiy D. V., Yrovay L. G., Romanchenko P. V. The Impact of precision manufacturing and operational properties of the abrasive tool on the working conditions of the operators hand grinding machines. Sci. articles to the XI International scientific-technical conference "Ecology and human health. Protection of water and air basins. Disposal of waste". - Kharkov. - UkrSSEC "Energostal", 2003. - Vol 1. pp. 89 - 97.

Поступила (received) 31.03.2015

Сизый Юрий Анатольевич – док. техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», тел.: (057)-720-66-25;

Сталинский Дмитрий Витальевич – док. техн. наук, проф. Гп «УкрНТЦ «Энергосталь», Харьков, e-mail: energostal@energostal.org.ua;

Романченко Павел Владимирович – нач. отдела ГП «УкрНТЦ «Энергосталь», Харьков, e-mail: Romanchenko@energostal.kharkov.ua.