УДК 339.5.01

В.М. КУЗНИЧЕНКО, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли, г. Харьков

ЭНТРОПИЯ СОСТОЯНИЙ ЦЕПЕЙ МАРКОВА В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

Рассмотрена линейная модель бездефицитной международной торговли. Применен вероятностный подход (цепи Маркова) для изучения общего бюджета между странами до выхода на стационарный режим. Вычислены условная энтропия состояний и полная энтропия рассматриваемой модели в процессе торговли. Эти данные позволяют определять как вероятности перехода системы из одного состояния в другое, так и контролировать процесс торговли. Возрастание энтропии системы при переходе в предельное состояние показывает, что торговый процесс протекает правильно, так как соответствует закону возрастания энтропии замкнутой системы при переходе в равновесное состояние.

The linear model of the nonprofit international trade is considered. The probability approach (Markov's chains) for study of the total budget distribution between countries before the stationary regime stage is used. The conditional entropy of the states and total entropy of the considered model during the trade process are calculated. These data allow define both probabilities of the system transfers from one state to another state and control of the trade process as well. The increase of the system entropy during the transfer to the limiting state shows that the trade process is correctly conducted since one corresponds to the law of the entropy rise of the closed system during the transfer into the equilibrium state.

Ключевые слова: цепи Маркова, состояния цепей Маркова, энтропия замкнутой системы, условная энтропия, линейная модель международной торговли, структурная матрица торговли, динамические характеристики распределения бюджетов, условные вероятности переходов.

Введение. Торговые отношения между странами и внутри стран существенно влияют на их экономическое развитие. Они не только вносят свою долю в экономические показатели, но и являются индикатором экономического уровня стран, экономических и политических связей. Линейная модель международной торговли позволяет построить взаимовыгодные бездефицитные торговые отношения между странами. Предлагаемый вероятностный подход в этой модели позволяет не только получать результаты, которые можно найти при использовании структурной матрицы торговли, но и проследить пошаговые динамические характеристики распределения общего бюджета торговли между странами, вероятности переходов из одного состояния в другое, определять правильность расчетов состояний, используя определение энтропии состояний системы. Поэтому исследования планирования, контроля и возможной корректировки торговых отношений с применением нового математического описания является актуальным.

Постановка задачи. Научные статьи последних лет, посвященных международной торговле Украины [1-9], подтверждают важность правильного выбора модели международной торговли, которая позволит прогнозировать поэтапные результаты, исправлять недостатки в торговых отношениях между странами и проводимых исследованиях математических моделей торговых отношений. Анализ экономических взаимодействий Украины со странами СНГ и Европы показал, что для Украины чрезвычайно важно развивать торговые отношения как с востоком, так и с западом, повышая качество производимых товаров, необходимо уменьшать отрицательное сальдо торгового баланса. Значительный интерес вызывают не только работы, связанные с обработкой и анализом статистических данных по международным торговым отношениям, но и работы, в которых на основе экономико-математических моделей разрабатываются прогнозы развития международной торговли Украины [8,9].

В статье [10] был предложен вероятностный подход к планированию торговых отношений на основе давно известной линейной модели международной торговли (см., например, [11]).

Цель настоящей работы – это предложение метода контроля динамики перехода состояний в линейной модели международной торговли в стационарный режим на основе применения аппарата цепей Маркова и определения энтропии пошаговых состояний изучаемой системы.

Методология. Под энтропией дискретной случайной величины X будем понимать следующее выражение [12]:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\log_2[P(X=x_i)]^{-1}=-\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\log_2 P(X=x_i), \tag{1}$$

а под энтропией непрерывной случайной величины X - выражение:

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\log_2 f(x)]dx \tag{2}$$

Здесь везде предполагается, что

$$p_i\log_2 p_i=0, \text{ если } p_i=0 \ (i=\overline{1,n}) \text{ и}$$

$$f(x)\log_2 f(x)=0, \text{ если } f(x)=0.$$

Условная энтропия системы S цепи Маркова относительно состояния s_i определяется выражением:

$$H(S|s_i, L) = -\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \log_2 p_{ij}, \; i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где

$$L=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

матрица перехода из одного состояния в другое в цепи Маркова. В работе [10] показано, что транспонированная структурная матрица линейной модели международной торговли является матрицей перехода в цепи Маркова.

Под энтропией системы S эргодической цепи Маркова с начальным вектором распределения вероятностей $\overline{p(0)}=(p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0))$ будем понимать следующее выражение:

$$H(S,L, \overline{p(0)})=\sum_{i=1}^{n} p_i(0) H(S, s_i, L) \tag{5}$$

Из выражения (5) следует, что энтропия системы S стационарного режима цепи Маркова L_∞ равна:

$$H(S,L_\infty)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i), \tag{6}$$

где $\overline{p}=(p_1,p_2, \ldots, p_n)$ – вектор финальных распределений эргодической цепи Маркова. Определяя энтропию пошаговых состояний и зная закон ее возрастания в процессе перехода системы к стационарному состоянию, можно контролировать и проводить корректировку хода торговых отношений.

Результаты исследования. Покажем предлагаемую методику на примере. Для линейной модели международной торговли поставим задачи найти:

- Условную энтропию каждого состояния системы S;
- Энтропию каждого состояния системы S в стационарном режиме;
- Время возвращения в состояния системы S с минимальной и максимальной энтропией;
- Энтропию системы S, при начальном векторе распределения вероятностей $\overline{p(0)}$;
- Энтропию системы S в стационарном режиме.

Пусть структурная матрица торговли A имеет вид:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/12 \\ 1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

а вектор начальных распределений бюджетов $\overline{p_A}(0)$ равен:

$$\overline{p_A}(0)=\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Для исходной структурной матрицы торговли A найдем матрицу вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова L:

$$\text{L}=\text{A}^{\text{T}}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/12 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

и вектор начальных распределений вероятностей $\overline{p(0)}=\overline{p}\,{}_A^T(0)$=(3/5;1/5;1/5).

Вычислим условную энтропию каждого состояния системы S цепи Маркова:

$$\text{H(S}|s_1, L)=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{1}{4}\log_2 4=\frac{3}{2}\text{ бит}$$

$$\text{H(S}|s_2, L)=\text{H(S}|s_1, L)=\frac{3}{2}\text{ бит} \qquad (10)$$

$$\text{H(S}|s_3, L)=\frac{1}{6}\log_2 6+\frac{1}{12}\log_2 12+\frac{3}{4}\log_2\frac{4}{3}\approx 1.041\text{ бит.}$$

Для нахождения энтропии состояний системы S найдем неподвижный вектор $\overline{p}$ (вектор стационарного состояния), из системы уравнений:

$$\begin{cases} (p_1, p_2, p_3)=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/12 & 3/4 \end{pmatrix}=(p_1, p_2, p_3) \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим $\overline{p}$=(1/3;1/6;1/2).

Определив неподвижный вектор $\overline{p}$, находим энтропию состояний системы S цепи Маркова в стационарном режиме:

$$\text{H}(\text{S}_1,\text{L}_\infty)= -p_1\log_2 p_1=\frac{1}{3}\log_2 3\approx 0{,}528\text{ бит}$$

$$\text{H}(\text{S}_2,\text{L}_\infty)= -p_2\log_2 p_2=\frac{1}{6}\log_2 6\approx 0{,}431\text{ бит} \qquad (11)$$

$$\text{H}(\text{S}_3,\text{L}_\infty)= -p_3\log_2 p_3=\frac{1}{2}\log_2 2=0{,}5\text{ бит}$$

Используя неподвижный вектор $\overline{p}$, мы можем сразу определить средний период возвращения в каждое из состояний. Так, если мы выходим из состояния S_1, то у нас в среднем уйдет 3 шага на возвращение впервые в это состояние; аналогично, на возвращение из состояния S_2 в S_2 в среднем уйдет 6 шагов; на возвращение из S_3 в S_3 в среднем уйдет 2 шага.

Найдем среднее время перехода в состояние S_2 из S_1 и S_3, то есть в состояние с низкой энтропией. Для того чтобы определить это время, мы будем считать состояние S_2 «поглощающим состоянием», то есть будем считать, что из него система уже никогда не переходит ни в какое другое состояние. При этом мы получим новую матрицу вероятностей переходов цепи Маркова L_2:

$$L_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/12 & 3/4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Для того, чтобы определить время перехода в «поглощающее состояние» S_2, надо из матрицы L_2 вычеркнуть строку и столбец, отвечающие за состояние S_2. Мы получим матрицу Q_2:

$$Q_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Образуем матрицу N_2, обратную к матрице $(I-Q_2)$; где I – единичная матрица:

$$(I-Q_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 3/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/6 & 1/4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Эта матрица $N_2=(I-Q_2)^{-1}$ будет иметь вид:

$$N_2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Для определения среднего значения числа шагов, необходимое на то, чтобы попасть в поглощающее состояние S_2 вычислим вектор $\overline{\tau_2} = N_2 * \overline{\xi}$,
где

$$\overline{\xi}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В нашем примере $\overline{\tau_2}$ равно:

$$\overline{\tau_2} = N_2 * \overline{\xi}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Таким образом, для того чтобы прийти в состояние S_2, из состояния S_1 нам необходимо в среднем 6 шагов, а для того чтобы прийти в состояние S_2 из состояния S_3 в среднем необходимо 8 шагов.

Определим теперь среднее число шагов, необходимое для того, чтобы впервые попасть в состояние с максимальной энтропией, то есть в состояние S_3.

Для этого будем считать состояние S_3 «поглощающим состоянием». В этом случае матрицей вероятностей перехода цепи Маркова будет матрица L_3:

$$L_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Далее последовательно имеем:

$$Q_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},\ I\text{-}Q_3=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$N_3=(I\text{-}Q_3)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что вектор $\overline{\tau_3}$ равен:

$$\overline{\tau_3}=N_3*\overline{\xi}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Таким образом, мы можем заключить, что процесс попадания в состояние с минимальной энтропией возможен лишь после большого числа шагов. А достижение состояния с максимальной энтропией требует гораздо меньше времени.

Теперь вычислим энтропию системы S, при начальном векторе распределения вероятностей $\overline{p(0)}$:

$$H(S,L,\ \overline{p(0)})=\sum_{i=1}^{3} p_i(0)H(S|s_i,L) \approx 1{,}408 \text{ бит.} \tag{21}$$

Вычислим энтропию системы S в стационарном режиме L_∞:

$$L_\infty=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$H(S|s_1,\ L_\infty)=H(S|s_2,\ L_\infty)=H(S|s_3,\ L_\infty)\approx 1{,}460 \text{ бит.} \tag{23}$$

$$H(S,L_\infty)=p_1\,H(S|s_1,\ L_\infty)+p_2\,H(S|s_2,\ L_\infty)+p_3\,H(S|s_3,\ L_\infty)=$$

$$H(S|s_1,\ L_\infty)(p_1+p_2+p_3)=1{,}460 \text{ бит.} \tag{24}$$

Заметим, что нами установлено, что энтропия системы S в стационарном режиме не зависит от вектора начальных распределений вероятностей.

Для контроля системы торговых отношений при переходе из начального состояния в стационарное состояние, необходимо вычислить энтропии пошаговых состояний. Результаты вычислений представлены на рис.1.

Вычисления показывают, что энтропия системы возрастает, что соответствует закону возрастания энтропии замкнутой системы при переходе в равновесное состояние. Это говорит о том, что предложенная модель торгового обмена дееспособна и может быть предложена для реализации.

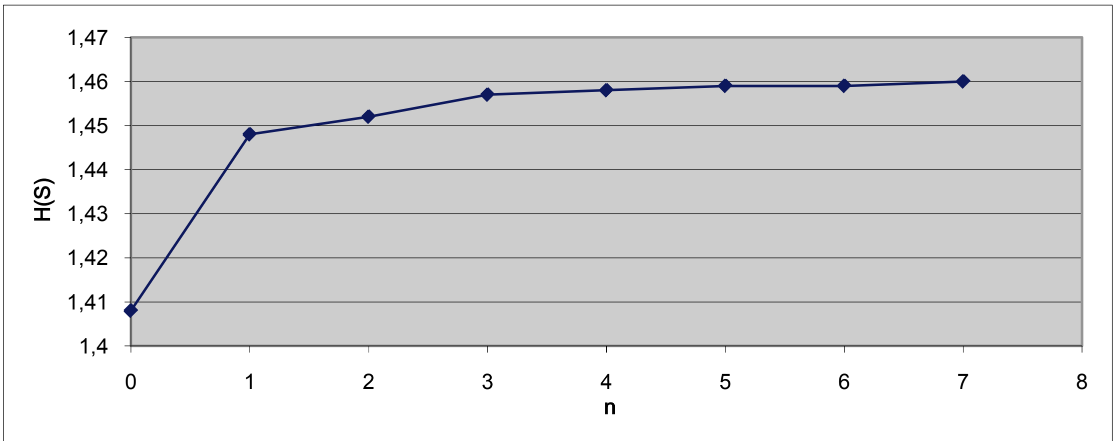

Рис.1 - Энтропия системы в процессе перехода в стационарное состояние

Вывод. Таким образом, контроль торгового взаимодействия может осуществляться за счет исследования энтропии системы в процессе перехода в стационарный режим. Предложенная методика позволяет одновременно с контролем процесса торговли пошагово определять вероятности перехода из одного состояния в другое, что является важным для планирования стратегии торговых отношений между странами.

Список литературы: **1.** *Пузанов І.І.* Короткострокові і довгострокові наслідки впливу умов зовнішньої торгівлі / *І.І. Пузанов* // Вісник Донецького університету. Сер. В: Економіка і право. – 2007. – Вип. 2. – С. 12-15. **2**. *Макуха С.М.* Україна в міжнародних економічних відносинах в умовах глобалізації / *С.М. Макуха*. – Х.: Легас, 2003. – 352 с. **3**. *Голиков А.П.* Экономико-математическое моделирование международных отношений / *А.П. Голиков*. – Х.: ХНУ, 2003. – 104 с. **4.** Международные стратегии экономического развития: учебное пособие / [*Д.Г. Лукьяненко, Ю.В. Макогон, Ю.Н. Пахомов, А.С. Филипенко, С.В. Громенкова*]; под общей ред. д.э.н., проф. *Ю.В. Макогона*. – Донецк: ДНУ, 2004. – 260 с. **5.** Интеграционные процессы в странах СНГ: тенденции, проблемы и перспективы [Монография] / Под. ред. д.э.н., проф. *Б.П. Смитиенко*. – М.: Финакадемия, 2008. – 288 с. **6**. *Кравченко В.А.* Перспективные направления развития внешнеэкономических связей стран СНГ / *В.А. Кравченко, Т.В. Подобрий* // Вісник Донецького національного університету. Сер. В: Економіка і право. – 2009. – Вип. 1. – С. 109-122. **7.** *Гладій І.Й.* Оцінка перспектив зовнішньоторгового співробітництва України в контексті євро інтеграційних процесів / *І.Й. Гладій* // Вісник Донецького університету. Сер. В: Економіка і право.

– 2007. – Вип. 1. – С. 26-32. **8**. *Бондар Р.* Економетричне дослідження зовнішньоекономічної діяльності України/ *Р. Бондар, І. Єлейко*// Вісник Львівського університету. Серія міжнародні відносини.- 2008. – Вип..25. – С.230-234. **9**. *Носирєв О.О.* Сучасні торгівельно-економічні відносини України з країнами ЄС: стан, тенденції та динамика розвитку/ *О.О. Носирєв*// Вісник Міжнародного Слов'янського університету. Серія «Економічні науки». – 2008.- Т.11. – С.42-47. **10.** *Кузниченко В.М.* Вероятностный подход к описанию линейной модели международной торговли/ *В.М. Кузниченко, В.И. Лапшин*// «БИЗНЕС ИНФОРМ» Научно-информационный журнал, вып №2, Харьков, 2010.- С.30-34. **11**. *Просветов Г.И.* Математические методы и модели в экономике: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008. – 344с. **12.** *Кемени Дж, Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. – М.:Наука,1970,-272с.

Подано до редакції 15.09.2010