УДК 330.4:519.816

В.М. КУЗНИЧЕНКО, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли, г. Харьков

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА СТРУКТУРИРОВАНИЯ МНОЖЕСТВА АЛЬТЕРНАТИВ И КРИТЕРИЕВ

Рассмотрена аналитическая процедура структурирования множества критериев и альтернатив методом парных сравнений. Предложенная процедура исключает неоднозначность в принятии решений при увеличении количества альтернатив и критериев.

Analytical procedure of structuring of a number of criteria and alternatives with the usage of the method of pairing comparisons is considered. The offered procedure excludes ambiguity in acceptations of the decisions when the number of alternatives and criteria increases.

Ключевые слова: принятие решений, критерии, альтернативы, относительные веса, метод анализа иерархий, предпочтения, приоритеты, метод парных сравнений, идеальная обратно-симметрическая матрица, критериальная таблица, глобальные веса критериев и альтернатив.

Введение. Принять решение - это значит выбрать конкретную альтернативу из множества данных по имеющимся критериям. В этом процессе важным является получение числовых весов для критериев и альтернатив. При этом желательно, чтобы веса критериев и альтернатив имели бы смысл такой же, как и в результате взвешивания физических величин в основной шкале измерений.

Наиболее распространенным методом выбора оптимального решения по нескольким критериям при отсутствии объективной шкалы измерений является метод анализа иерархий (МАИ, Analytic Hierarchy Process) [1]. При отсутствии количественного сравнения применяется качественная шкала измерений. Эта шкала записывается в следующем виде: равная важность 1:1, слабое превосходство 3:1, умеренное превосходство 5:1, сильное превосходство 7:1,абсолютное превосходство 9:1.

Теория МАИ широко применяется во многих областях экономики, промышленности, в планировании (как отдельных предприятий, так и целых областей производства).

Постановка задачи. Одним из существенных недостатков метода МАИ является то, что при добавлении к имеющемуся набору альтернатив еще одной альтернативы не исключена возможность смены глобальных весов альтернатив [2].

Целью данной работы является изучение вопроса об устранении указанного недостатка на основе аналитической процедуры структурирования множества критериев и альтернатив методом парных сравнений.

Методология. Пусть мы имеем критериальную таблицу 1:

Таблица 1 - Критериальная таблица.

	K_1	K_2	…	K_n	Сумма
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Z_1
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Z_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	Z_m
Сумма	Y_1	Y_2	…	Y_n	D

где A_i – альтернативы , K_j - критерии, x_{ij} – веса критериев и альтернатив, которые мы хотим установить в процессе взвешивания, и выполнены следующие равенства:

$$Z_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$Y_j=\sum_{i=1}^{m} xij \text{ , } j=\overline{1,n}$$

$$D=\sum_{j=1}^{n} Y_j=\sum_{i=1}^{m} Z_i$$

Отметим, что при отсутствии количественного сравнения применяем для x_{ij} качественную шкалу измерений по 9 – ти бальной шкале:

x_{ij} - балы выставленные экспертом альтернативе i по критерию j при фиксированном i;

x_{ij} - балы выставленные экспертом критерию j по альтернативе i при фиксированном j.

В начале предположим, что мы имеем n урн (K_j), в которых находятся камешки разных пород (A_i, i=$\overline{1,m}$), с весами x_{ij}.

Тогда мы можем вычислить относительные веса m камешков в каждой из n урн:

$$V_k(j)=\begin{pmatrix} \frac{x_{1j}}{Y_j} & \frac{x_{2j}}{Y_j} & \ldots & \frac{x_{mj}}{Y_j} \end{pmatrix}\text{, } j=\overline{1,n}$$

Аналогично вычисляются относительные веса n камешков по каждой из m пород:

$$V_A(i)=\begin{pmatrix} \frac{x_{i1}}{Z_i} & \frac{x_{i2}}{Z_i} & \ldots & \frac{x_{in}}{Z_i} \end{pmatrix} \quad i=\overline{1,m}\ .$$

Отметим, что те же результаты взвешиваний мы получили бы, если бы составили матрицы парных сравнений для относительных весов камешков в каждой из n урн (Таблица 2):

Таблица 2 - Таблица парных сравнений относительных весов относительно K_j.

K_j	A_1	A_2	…	A_m	$V_k(j)$
A_1	x_{1j}/x_{1j}	x_{1j}/x_{2j}	…	x_{1j}/x_{mj}	x_{1j}/Y_j
A_2	X_{2j}/x_{1j}	x_{2j}/x_{2j}	…	x_{2j}/x_{mj}	x_{2j}/Y_j
	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{mj}/x_{1j}	x_{mj}/x_{2j}	…	x_{mj}/x_{mj}	x_{mj}/Y_j

Аналогично вычисляются относительные веса камешков по m породам (Таблица 3):

Таблица 3 - Таблица парных сравнений относительных весов относительно A_i.

A_i	K_1	K_2	…	K_n	$V_A(i)$
K_1	x_{i1}/x_{i1}	x_{i1}/x_{i2}	…	x_{i1}/x_{in}	x_{i1}/Z_i
K_2	x_{i2}/x_{i1}	x_{i2}/x_{i2}	…	x_{i2}/x_{in}	x_{2j}/Z_i
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
K_n	x_{in}/x_{i1}	x_{in}/x_{i2}	…	x_{in}/x_{in}	x_{in}/Z_i

Матрицы таблиц 2 и 3 по построению являются идеальными обратно-симметричными матрицами. Напомним, что квадратная матрица A размера n является идеальной обратно-симметрической, если для её всех элементов выполнены условия:

$$a_{pi}a_{il}=a_{pl},\ i=\overline{1,n}$$

$$a_{ij}=1/a_{ji}.$$

Теперь для нахождения относительных весов камешков по каждой из n урн и относительных весов камешков по каждой из m пород составим сводную таблицу по всем камешкам, занеся результаты измерений из таблиц 2 и 3. Построенная таким образом сводная таблица взвешиваний (Таблица 4) будет иметь не все заполненные клетки. К примеру, при m=2 и n=2 сводная матрица взвешиваний имеет вид:

Таблица 4 - Сводная таблица взвешиваний при m=2 и n=2.

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
x_{11}	x_{11}/ x_{11}	x_{11}/ x_{12}	x_{11}/ x_{21}	
x_{12}	x_{12}/ x_{11}	x_{12}/ x_{12}		x_{12}/ x_{22}

x_{21}	x_{21}/ x_{11}		x_{21}/ x_{21}	x_{21}/ x_{22}
x_{22}		x_{22}/ x_{12}	x_{22}/ x_{21}	x_{22}/ x_{22}

Недостающие элементы построенной матрицы (Таблица 4) однозначно восстанавливаются до идеальной обратно-симметричной матрицы, которая приобретает следующий вид (Таблица 5):

Таблица 5 - Идеальная обратно - симметрическая матрица.

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
x_{11}	x_{11}/ x_{11}	x_{11}/ x_{12}	x_{11}/ x_{21}	x_{11}/ x_{22}
x_{12}	x_{12}/ x_{11}	x_{12}/ x_{12}	x_{12}/ x_{21}	x_{12}/ x_{22}
x_{21}	x_{21}/ x_{11}	x_{21}/ x_{12}	x_{21}/ x_{21}	x_{21}/ x_{22}
x_{22}	x_{22}/ x_{11}	x_{22}/ x_{12}	x_{22}/ x_{21}	x_{22}/ x_{22}

Методом парных сравнений находим относительные веса взвешиваний:

$$V=\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{D} & \frac{x_{12}}{D} & \frac{x_{21}}{D} & \frac{x_{22}}{D} \end{pmatrix}$$

Выписав полученные результаты в критериальную таблицу, получаем глобальные приоритеты по критериям и альтернативам (Таблица 6):

Таблица 6 - Таблица глобальных весов при m=2 и n=2.

	K_1	K_2	Глобальные веса альтернатив
A_1	x_{11}/D	x_{12}/D	Z_1/D
A_2	x_{21}/D	x_{22}/D	Z_2/D
Глобальные веса критериев	Y_1/D	Y_2/D	1

А для произвольного числа критериев и альтернатив критериальная таблица (Таблица 7) примет вид:

Таблица 7 - Таблица глобальных весов m альтернатив и n критериев.

	K_1	K_2	…	K_n	Глобальные веса альтернатив
A_1	x_{11}/D	x_{12}/D	…	x_{1n}/D	Z_1/D
A_2	x_{21}/D	x_{22}/D	…	x_{2n}/D	Z_2/D
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}/D	x_{m2}/D		x_{mn}/D	Z_m/D
Глобальные веса критериев	Y_1/D	Y_2/D	…	Y_n/D	1

Результаты исследования. Покажем предлагаемую методику на примере.

Пусть мы имеем две альтернативы и два критерия.

Выпишем матрицы парных сравнений по критерию K_1 и альтернативам A_1, A_2 (Таблица 8):

Таблица 8 - Таблица парных сравнений по критерию K_1 и альтернативам A_1, A_2.

K_1	A_1	A_2	$V_k(1)$	A_1	K_1	K_2	$V_A(1)$	A_2	K_1	K_2	$V_A(2)$
A_1	1	3	3/4	K_1	1	6	6/7	K_1	1	2/3	2/5
A_2	1/3	1	1/4	K_2	1/6	1	1/7	K_2	3/2	1	3/5

Результаты взвешиваний запишем в сводную таблицу (Таблица 9):

Таблица 9 - Сводная таблица взвешиваний.

	x11	x12	x21	x22
x11	1	6	3	
x12	1/6	1		
x21	1/3		1	2/3
x22			3/2	1

Пустые клетки сводной таблицы заполняем так, чтобы полученная матрица была идеальной обратно-симметричной матрицей, и рассчитываем относительные веса критериев и альтернатив (Таблица 10):

Таблица 10 - Идеальная обратно – симметрическая матрица при m=2 и n=2.

	x11	x12	x21	x22	Сумма	V
x11	1	6	3	2	12	1/2
x12	1/6	1	1/2	1/3	2	1/12
x21	1/3	2	1	2/3	4	1/6
x22	1/2	3	3/2	1	6	1/4
				Сумма	24	

Полученные веса записываем в критериальную таблицу (Таблица 11) и вычисляем глобальные веса критериев и альтернатив:

Таблица 11 - Таблица глобальных весов при m=2 и n=2.

	К1	К2	Глобальные веса альтернатив
А1	1/2	1/12	7/12
А2	1/6	1/4	5/12
Глобальные веса критериев	2/3	1/3	1

Добавим еще одну альтернативу A_3, у которой относительные веса по критериям $К_1$ и $К_2$ такие же, как и глобальные веса критериев для альтернатив A_1 и A_2 (Таблица 12):

Таблица 12 - Таблица взвешиваний относительных весов по альтернативе A_3.

А3	К1	К2	VA(1)
К1	1	2	2/3
К2	1/2	1	1/3

С учетом добавленной альтернативы A_3 запишем матрицу парных сравнений по критерию $К_1$ (Таблица 13):

Таблица 13 - Таблица относительных весов по критерию $К_1$.

К1	А1	А2	А3	V(1)
А1	1	3	1/3	3/13
А2	1/3	1	1/9	1/13
А3	3	9	1	9/13

Вносим результаты парных сравнений из таблиц 8, 12, 13, в сводную таблицу (Таблица 14):

Таблица 14 - Сводная таблица относительных весов.

	x11	x12	x21	x22	x31	x32
x11	1	6	3		1/3	
x12	1/6	1				

x21	1/3		1	2/3	1/9	
x22			3/2	1		
x31	3		9		1	2
x32					1/2	1

Заполняем сводную матрицу сравнений до идеальной обратно-симметричной матрицы и вычисляем относительные веса критериев и альтернатив (Таблица 15):

Таблица 15 - Идеальная обратно – симметрическая матрица.

	x11	x12	x21	x22	x31	x32	Сумма	V
x11	1	6	3	2	1/3	2/3	13	2/13
x12	1/6	1	1/2	1/3	1/18	1/9	13/6	1/39
x21	1/3	2	1	2/3	1/9	2/9	13/3	2/39
x22	1/2	3	3/2	1	1/6	1/3	13/2	1/13
x31	3	18	9	6	1	2	39	6/39
x32	3/2	9	9/2	3	1/2	1	39/2	3/13

Полученные результаты вносим в критериальную таблицу и вычисляем веса критериев и альтернатив (Таблица 16):

Таблица 16 - Таблица глобальных весов при m=3 и n=2.

	K1	K2	Глобальные веса альтернатив
A1	2/13	1/39	7/39
A2	2/39	1/13	5/39
A3	6/13	3/13	9/13
Глобальные веса критериев	2/3	1/3	1

Заметим, что сводная матрица сравнений заполняется однозначно, а, следовательно, и таблица относительных весов по критерию K_2 единственна. Как видим, глобальные веса альтернатив остались в том же отношении, что и для двух альтернатив, так как в общем виде критериальная таблица относительных весов всегда будет иметь вид Таблицы 7.

Вывод. Таким образом, предложенная в работе аналитическая процедура структурирования множества критериев и альтернатив методом парных сравнений исключает неоднозначность в принятии решений при увеличении количества альтернатив и критериев.

Список литературы: 1. *Саати Т.* Принятие решений: Метод анализа иерархий. - М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.**2**. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. Изд., второе, перераб. и доп. – М.: Логос,2002 – 392 с.

Подано до редакції 26.10.2010