УДК 531.55:521.1

В.А. КОНОНЕНКО, канд. техн. наук (г. Харьков)

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА – ГАМИЛЬТОНА, ВЫЧИСЛЯЕМЫХ РЕВЕРСИВНЫМ МЕТОДОМ

У статті наведені метод і результати порівняння точності двох алгоритмів інтегрування в бортовому обчислювачі параметрів Родріга – Гамільтона. Показано, що інтегрування за допомогою реверсивного алгоритму має похибку, пропорційну h^5, де h – такт знімання інформації з датчиків.

The article presents a method and results of comparison of two integration algorithms of Rodrig – Hamilton parameters in an on-board computer. It is shown that a miscalculation of the integration with the help of a reversible algorithm is proportionate to h^5, where h is a time step of a pickup of information from sensors.

Введение. Системы навигации, которые в настоящее время устанавливаются на многие транспортные средства, должны обеспечивать определение линейных координат текущего положения центра масс изделия на местности и угловой ориентации корпуса в пространстве. Наиболее полно в достижении указанных целей зарекомендовали себя комплексные навигационные системы, в состав которых входят элементы автономных навигационных систем (АНС) и спутниковых навигационных систем [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются отдельные вопросы, связанные с разработкой АНС, в частности, определение угловой ориентации корпуса транспортной машины, что является обязательной составляющей навигационной системы.

С целью определения угловой ориентации корпуса машины могут использоваться инерциальные навигационные системы (ИНС) на гиростабилизированных платформах или трехстепенные гироскопические системы курсокреноуказания [3], измеряющие три угловых составляющие ориентации машины в пространстве. Эти системы, обеспечивая высокую точность измерения углов, имеют высокую стоимость и значительные габаритные размеры.

Интенсивное развитие микропроцессорной техники и неуклонное снижение ее стоимости позволило использовать принципы бесплатформенных инерциальных систем (БИС), в которых угловая ориентация транспортного средства не измеряется дорогостоящими высокочувствительными гироскопическими датчиками углов, а вычисляются в бортовом вычислительном устройстве по выходной информации относительно недорогих и высоконадежных датчиков угловой скорости (ДУС).

Определение угловой ориентации машины по сигналам с ДУС наиболее рационально производить путем численного интегрирования в бортовом вычислителе кинематических уравнений связи вектора угловой скорости вращения объекта $\overline{\omega_c}$ с производными от параметров ориентации представленными в виде параметров Родрига – Гамильтона [4–6]. Точность интегрирования этих кинематических уравнений в значительно мере определяет точность ориентации объекта. В работе [7] и других предложен ряд методов интегрирования кинематических уравнений параметров Родрига – Гамильтона, произведена оценка точности интегрирования. Точность реверсивного метода интегрирования параметров Родрига – Гамильтона, предлагаемого в работе [6], не оценена.

Цель работы. Провести сравнительную оценку точности интегрирования параметров Родрига – Гамильтона реверсивным методом относительно метода интегрирования, точность которого известна.

Изложение основного материала. В общем случае угловая ориентация твердого тела относительно инерциальной системы координат, выраженная через параметры Родрига – Гамильтона

$$\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T, \tag{1}$$

где T – символ транспонирования, может быть получена [4, 5] путем численного интегрирования в бортовом вычислителе кинематических уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_0 &= -\frac{1}{2}(\omega_{cx}\lambda_1 + \omega_{cy}\lambda_2 + \omega_{cz}\lambda_3);\\
\dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}(\omega_{cx}\lambda_0 + \omega_{cz}\lambda_2 - \omega_{cy}\lambda_3);\\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}(\omega_{cy}\lambda_0 + \omega_{cx}\lambda_3 - \omega_{cz}\lambda_1);\\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}(\omega_{cz}\lambda_0 + \omega_{cy}\lambda_1 - \omega_{cx}\lambda_2),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\overline{\omega_c} = [\omega_{cx}, \omega_{cy}, \omega_{cz}]^T$ – вектор угловой скорости объекта в проекциях на связанные с ним оси координат.

Уравнения (2) могут быть представлены в виде

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Phi(\omega)\cdot\Lambda\,, \tag{3}$$

где $\Phi(\omega)$ – кососимметрическая (4×4) матрица, которая ставится в соответствие вектору $\overline{\omega}_c$:

$$\Phi(\omega) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{cx} & -\omega_{cy} & -\omega_{cz} \\ \omega_{cx} & 0 & \omega_{cz} & -\omega_{cy} \\ \omega_{cy} & -\omega_{cz} & 0 & \omega_{cx} \\ \omega_{cz} & \omega_{cy} & -\omega_{cx} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Принимаем, что с ДУС поступают сигналы в дискретные промежутки времени h в форме приращения вектора угла кажущегося поворота. Представим совокупность сигналов измерителей угловой скорости на ($n+1$) такте съема в виде вектора

$$\overline{\Theta}(n+1) = \left[\theta_x(n+1), \theta_y(n+1), \theta_z(n+1)\right]^T = \int\limits_{nh}^{(n+1)h} \overline{\omega}_c dt\,.$$

В работе [7] предлагается интегрировать уравнения (2) с шагом $H = 2sh,\ s = 1, 2, \ldots$, приняв начало очередного шага интегрирования за начальный момент t_0 и считая $\Lambda(t_0) = \Lambda_0$ известным при $t_0 \le t \le t_0 + h$, в виде

$$\Lambda(t) = F(t, t_0)\Lambda_0\,, \tag{5}$$

где (4×4)-матрица $F(t,t_0)$ – матрициант уравнения (3):

$$\dot{F}(t,t_0) = \frac{1}{2}\Phi(\omega)F(t,t_0), \quad F(t,t_0) = E_4\,. \tag{6}$$

Матрициант уравнения (3) представляется в виде

$$\begin{aligned} &F(t,t_0) = f_0(t)E_4 + \Phi(\bar{f}(t)), \quad \bar{f} = \left[f_1, f_2, f_3\right]^T; \\ &f_0(t_0) = 1, \quad \bar{f}(t_0) = 0; \quad f_0^2 + \bar{f}\cdot\bar{f} = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Автор в работе [7] принимает, что вектор $\overline{\omega}_c$ на отрезке $[t_0, t_0 + H]$ допускает аппроксимацию отрезком степенного ряда любой нужной длины, и аппроксимирует вектор $\bar{f}$ степенным рядом четного порядка *K*.

Пусть $s = 1$, а порядок степенного ряда $K = 4$, тогда алгоритм вычисления вектора $\bar{f}$ и величины f_0 запишется в виде:

$$
\begin{aligned}
f_1(t_0+H) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\left\|\bar{f}_1\right\|^2\right)\cdot\left(\theta_{x,0}+\theta_{x,1}\right) + \frac{1}{3}\left(\theta_{y,0}\cdot\theta_{z,1} - \theta_{y,1}\cdot\theta_{z,0}\right),\\
f_2(t_0+H) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\left\|\bar{f}_1\right\|^2\right)\cdot\left(\theta_{y,0}+\theta_{y,1}\right) + \frac{1}{3}\left(\theta_{x,0}\cdot\theta_{z,1} - \theta_{x,1}\cdot\theta_{z,0}\right),\\
f_3(t_0+H) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\left\|\bar{f}_1\right\|^2\right)\cdot\left(\theta_{z,0}+\theta_{z,1}\right) + \frac{1}{3}\left(\theta_{x,0}\cdot\theta_{y,1} - \theta_{x,1}\cdot\theta_{y,0}\right),\\
f_0(t_0+H) &= 1 - \frac{1}{2}\left\|\bar{f}_1\right\|^2 - \frac{1}{8}\left\|\bar{f}_1\right\|^4,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$\left\|\bar{f}_1\right\|^2 = \left(\theta_{x,0}+\theta_{x,1}\right)^2 + \left(\theta_{y,0}+\theta_{y,1}\right)^2 + \left(\theta_{z,0}+\theta_{z,1}\right)^2;$$

$$\overline{\Theta}_0 = \left[\theta_{x,0}, \theta_{y,0}, \theta_{z,1}\right]^T = \int_{t^*-h}^{t^*} \overline{\omega}_c dt; \quad \overline{\Theta}_1 = \left[\theta_{x,1}, \theta_{y,1}, \theta_{z,1}\right]^T = \int_{t^*}^{t^*+h} \overline{\omega}_c dt .$$

Определение векторов $\overline{\Theta}_0$ и $\overline{\Theta}_1$ иллюстрируется на рисунке 1.

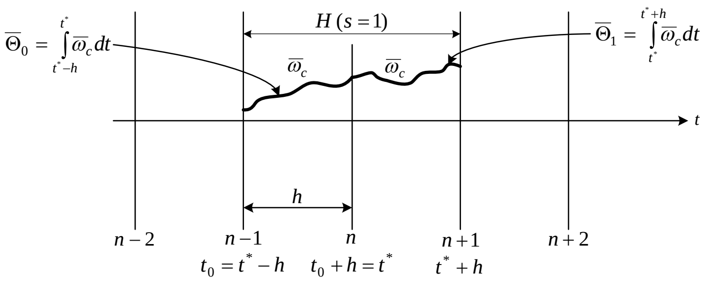

Рисунок 1 – Определение приращения вектора угла кажущегося поворота за шаг $H = 2h$

Пусть кватернион $\overline{P}$, вычисленный в соответствии с разложением в степенной ряд четвертой степени вектора $\bar{f}$ и функции $\bar{f}_0$, имеет компоненты

$$P = [p_0, \overline{p}]^T = [p_0, p_1, p_2, p_3]^T,$$

которые вычисляются по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} &p_0(t_0 + H) = p_0(t_0) \cdot f_0(t_0 + H) - \overline{p}(t_0) \cdot \bar{f}(t_0 + H); \\ &\overline{p}(t_0 + H) = p_0(t_0) \cdot \bar{f}(t_0 + H) + f_0(t_0 + H) \cdot \overline{p}(t_0) + \overline{p}(t_0) \times \bar{f}(t_0 + H). \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно [7], алгоритм (8), (9) вычисления параметров кватерниона угловой ориентации P имеет ошибку, пропорциональную величине h^5. Назовем этот алгоритм как алгоритм разложения матрицианта.

Рассмотрим реверсивный алгоритм интегрирования кинематических уравнений (2).

Обозначим полученный в результате интегрирования этим методом кватернион как

$$M = [\mu_0, \mu_1]^T = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3]^T. \tag{10}$$

Реверсивный метод интегрирования – метод Гаусса – Зейделя – заключается в следующем. Поскольку бортовой вычислитель должен решать уравнения (2) последовательно, то в правую часть уравнения для вычисления величины $\mu_j[t_0 + h]$ ($j = 1, 2, 3$) подставляются уже вычисленные на этом шаге значения $\mu_{j-1}[t_0 + h], \ldots, \mu_0[t_0 + h]$. Далее, предлагается использовать реверсивный метод, когда, допустим, на нечетном шаге работы системы порядок вычисления $\mu_j[t_0 + h]$ был $\mu_1[t_0 + h], \ldots, \mu_3[t_0 + h], \mu_0[t_0 + h]$, то на четном шаге порядок вычисления меняется на обратный от $\mu_3[t_0 + h]$ к $\mu_0[t_0 + h]$.

Кроме того, предлагается корректировать величину нормы кватерниона (10), которая нарушается в процессе численного решения разностных уравнений.

Окончательно реверсивный алгоритм расчета параметров ориентации машины имеет следующий вид:

- нечетный шаг работы системы:

$$\mu_1(t_0+h)=\mu_1(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)+$$
$$+\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_2(t_0)-\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_3(t_0)\big];$$
$$\mu_2(t_0+h)=\mu_2(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_3(t_0)+$$
$$+\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)-\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_1(t_0+h)\big];\qquad(11)$$
$$\mu_3(t_0+h)=\mu_3(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_1(t_0+h)+$$
$$+\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)-\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_2(t_0+h)\big];$$
$$\mu_0(t_0+h)=\sqrt{1-\mu_1^2(t_0+h)-\mu_2^2(t_0+h)-\mu_3^2(t_0+h)};$$

- четный шаг работы системы:

$$\mu_3(t_0+h)=\mu_3(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_1(t_0)+$$
$$+\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)-\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_2(t_0)\big];$$
$$\mu_2(t_0+h)=\mu_2(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_3(t_0+h)+$$
$$+\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)-\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_1(t_0)\big];$$
$$\mu_1(t_0+h)=\mu_1(t_0)+\frac{1}{2}h\big[\omega_{cx}(t_0+h)\cdot\mu_0(t_0)+$$
$$+\omega_{cz}(t_0+h)\cdot\mu_2(t_0+h)-\omega_{cy}(t_0+h)\cdot\mu_3(t_0+h)\big];$$
$$\mu_0(t_0+h)=\sqrt{1-\mu_1^2(t_0+h)-\mu_2^2(t_0+h)-\mu_3^2(t_0+h)};$$

Сравнительную оценку точности работы алгоритмов (8), (9) и (10) проведем следующим образом. Пусть такт съема информации с ДУС равен $h=0{,}005$ с, проекции вектора угловой скорости $\overline{\omega_c}$ колебаний корпуса при движении по неровностям трассы зададим в следующем виде:

$$\omega_{cx}(t)=A_x+B_xt+C_x\sin(2\pi F_xt+\varphi_x);$$
$$\omega_{cy}(t)=A_y+B_yt+C_y\sin(2\pi F_yt+\varphi_y);\qquad(12)$$
$$\omega_{cz}(t)=A_z+B_zt+C_z\sin(2\pi F_zt+\varphi_z),$$

где $\omega_{cx}(t)$, $\omega_{cy}(t)$, $\omega_{cz}(t)$ – проекции вектора угловой скорости соответственно на продольную, поперечную и вертикальную оси связанной с корпусом машины системы координат.

Определим «идеальную» угловую ориентацию машины, интегрируя кинематические уравнения (2) методом Рунге-Кутта с шагом $h_{и} = 0{,}001$ с, используя зависимости для проекций вектора $\overline{\omega}_c$ (12). Синхронно с этим вычислительным процессом определяем параметры кватернионов P и M с помощью алгоритмов (8), (9) и (10). Начальные условия для интегрирования принимаются равными

$$\Lambda(t_{н}) = P(t_{н}) = M(t_{н}) = [1, 0, 0, 0]^T .$$

Точность работы алгоритмов, построенных на основании разложения в ряд матрицианта и реверсивного алгоритма, определяется формулой разности между вычисленными кватернионами $P(t)$, $M(t)$ и «идеальным» кватернионом $\Lambda(t)$.

Пусть кватернионы разности поворотов равны

$$\Delta P = \left[\Delta p_0, \Delta\overline{p}\right]^T = \left[\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3\right]^T;$$
$$\Delta M = \left[\Delta\mu_0, \Delta\overline{\mu}\right]^T = \left[\Delta\mu_0, \Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \Delta\mu_3\right]^T.$$

Кватернионы ΔP и ΔM определяются формулами кватернионного произведения [8]:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \tilde{\Lambda} \circ P = \Delta p_0 + \Delta\overline{p}; \\ \Delta M &= \tilde{\Lambda} \circ M = \Delta\mu_0 + \Delta\overline{\mu}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tilde{\Lambda}$ – кватернион, сопряженный с кватернионом Λ, $\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \overline{\lambda}$; «$\circ$» – знак кватернионного произведения.

Элементы кватернионов ΔP и ΔM определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \lambda_0 p_0 + (\overline{\lambda}, \overline{p}); \\ \Delta\overline{p} &= \lambda_0 \overline{p} - p_0 \overline{\lambda} - (\overline{\lambda} \times \overline{p}); \\ \Delta\mu_0 &= \lambda_0 \mu_0 + (\overline{\lambda}, \overline{\mu}); \\ \Delta\overline{\mu} &= \lambda_0 \overline{\mu} - \mu_0 \overline{\lambda} - (\overline{\lambda} \times \overline{\mu}), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\overline{p}$, $\overline{\mu}$ – векторные части кватернионов P и M.

В случае отсутствия ошибок интегрирования кватернионы разности поворотов имеют вид

$$\Delta P = [1,0,0,0]^T ;$$
$$\Delta M = [1,0,0,0]^T ,$$

следовательно, элементы этих кватернионов характеризуют ошибки интегрирования по алгоритмам (8), (9) и (10).

На рисунке 2 представлены графики изменения ошибок численного интегрирования, проведенного по алгоритмам разложения матрицианта и реверсивным алгоритмом, когда проекции вектора угловой скорости поворота корпуса $\overline{\omega_c}$, заданные соотношениями (12), рассчитываются при $C_x = C_y = 0{,}174$ рад; $C_z = 0$; $A_x = A_y = A_z = 0$; $B_x = B_y = B_z = 0$; $F_x = 0{,}8$ Гц; $F_y = 1$ Гц; $F_z = 0$; $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$.

Получаемые при этих значениях проекции вектора $\overline{\omega_c}$ близки к угловым колебаниями корпуса машины при ее прямолинейном движении по неровностям местности.

Проведенные расчеты показали, что точности интегрирования двумя рассматриваемыми в работе методами близки между собой.

Можно показать [6], что при малых величинах ошибок зависимость между углами Эйлера – Крылова и элементами кватернионов разностей поворотов имеет вид

$$\Delta\psi_p \approx 2\Delta p_0 \Delta p_3; \quad \Delta\psi_\mu \approx 2\Delta\mu_0 \Delta\mu_3;$$
$$\Delta\vartheta_p \approx 2\Delta p_0 \Delta p_2; \quad \Delta\vartheta_\mu \approx 2\Delta\mu_0 \Delta\mu_2;$$
$$\Delta\gamma_p \approx 2\Delta p_0 \Delta p_1; \quad \Delta\gamma_\mu \approx 2\Delta\mu_0 \Delta\mu_1,$$

где $\Delta\psi, \Delta\vartheta, \Delta\gamma$ – ошибки интегрирования углов курса, дифферента и крена.

Для приведенного на рисунке 2 примера расчета в результате статистической обработки данных получены результаты, представленные в таблице 1.

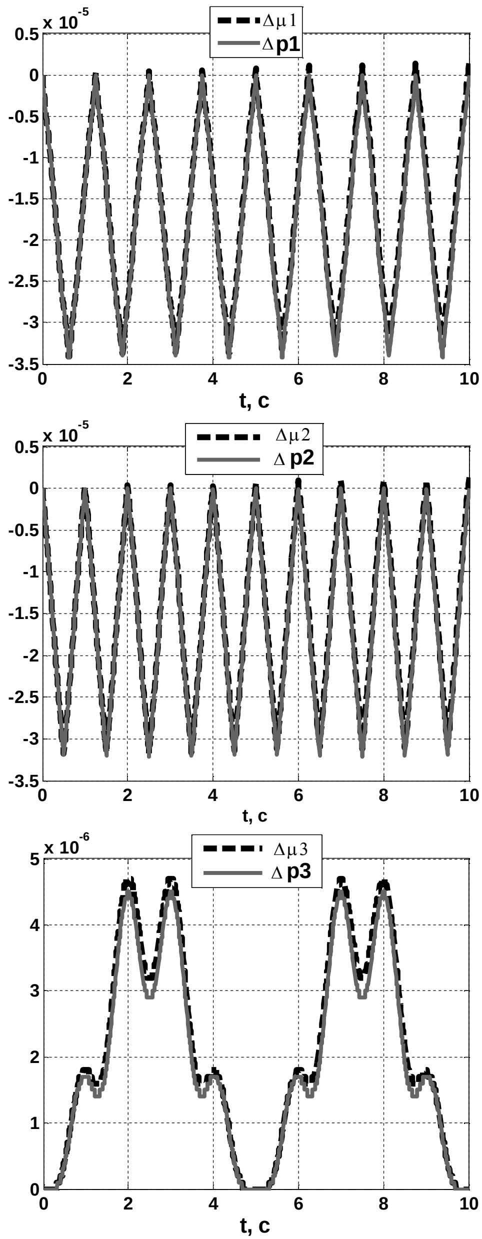

Рис. 2. Изменение во времени ошибок интегрирования параметров кватернионов ΔP и ΔM

Таблица 1 – Результаты статистической обработки параметров кватернионов разностей поворотов

	Среднее арифметическое ошибки, град		Средняя квадратичная ошибка, град	
	ΔP	ΔM	ΔP	ΔM
$\Delta\psi$	0,00023	0,00024	0,00016	0,00017
$\Delta\vartheta$	–0,00176	–0,00183	0,00109	0,00109
$\Delta\gamma$	–0,00198	–0,00189	0,00116	0,00116

Выводы. Реверсивный алгоритм интегрирования параметров Родрига – Гамильтона близок по точности к алгоритмам разложения функций матрицианта кинематических уравнений (2) в степенной ряд по четным степеням до четвертой степени включительно. В этом случае ошибка интегрирования пропорциональна h^5, где h – такт съема информации с датчиков угловых скоростей. Реверсивный алгоритм вычисления параметров Родрига – Гамильтона при той же точности интегрирования, что и алгоритм разложения функций матрицианта, более простой и требует меньшей оперативной памяти, поэтому он является предпочтительным для задач создания бесплатформенных инерциальных систем.

Список литературы: **1.** *Борисов С.* Средства навигации и топопривязки // Зарубежное военное обозрение. – 1984. – № 4. – С. 20-31. **2.** *Гофман-Валенгоф В., Ліхтеннеггер Г., Колінз Д.* Глобальна система визначення місто положення (GPS): Теорія і практика: пер. з нім. – Київ: Наукова думка, 1996. – 350 с. **3.** www.ppk.perm.su. **4.** *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Гос. изд.-во физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с. **5.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. **6.** Повышение устойчивости и управляемости колесных машин в тормозных режимах: Монография / *Е.Е. Александров, В.П. Волков, Д.О. Волонцевич, В.А. Кононенко* и др.; Под. ред. *Д.О. Волонцевича.* – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 320 с. **7.** *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной навигации. – Киев: Наукова думка, 1995. – 279 с. **8.** *Успенский В.Б.* Теоретические основы гиросилового управления ориентацией космического летательного аппарата: Монография. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 328 с.

Поступила в редколлегию 16.11.07.