

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук,  
**В. И. ЛАВИНСКИЙ**, д-р техн. наук,  
**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, аспирант (г. Харьков)

## К РАСЧЁТУ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ ПОЛЁТА ВЕРТИКАЛЬНО БРОШЕННОГО ВВЕРХ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА УБЫВАЮЩЕЙ МАССЫ

За допомогою циліндричних функцій побудовано аналітичний розв'язок нелінійної задачі Коші про максимальну висоту польоту вертикально кинуті сферичної частки. Радіус тіла зменшується в часі по показниковому закону, а опір середовища пропорційний квадрату швидкості польоту.

The analytical solution of the nonlinear Cauchy problem about the maximal height of flight of the vertically thrown spherical particle via the cylindrical functions is constructed. The body radius decreases in time under the exponential law and the resistance of medium is proportional to a square of the velocity of flight.

**Цель исследования.** В данной работе поставлена цель, построить аналитическое решение нелинейной задачи полёта вертикально брошенного вверх однородного шара с показательным изменением радиуса.

**Актуальность темы и анализ публикаций.** Расчёт вертикального движения тел переменной массы и размеров приходится проводить при математическом моделировании полёта сгорающих частиц топлив, испаряющихся капель огнетушащих веществ, мелкодисперсных химически активных выбросов производств и пр. Поэтому анализ особенностей движения таких тел в газовой среде относится к актуальным научно-техническим задачам и решению их уделялось должное внимание. Так в работах [1,2,3] изучалось движение сферических частиц, у которых изменение радиуса принималось пропорциональным времени полёта или площади поверхности сферы (закон Срезневского) [4]. Наряду с этим в технических расчётах движения тел переменной массы [5,6] получила распространение модель полёта материальной точки с экспоненциальным убыванием массы. Заметим, что вариант линейного изменения радиуса во времени рассмотрен в [2,7].

**Постановка задачи и её решение.** Предполагаем, что сила аэродинамического сопротивления движению пропорциональна площади миделевого сечения сферической частицы и квадрату скорости её полёта. Плотность частицы принимаем постоянной. Поэтому уменьшение её массы определяется законом изменения её радиуса, который берём в виде

$$r = r(t) = r_0 e^{-I t}. \quad (1)$$

Здесь  $r_0 = r(0)$  - начальный радиус частицы;  $I > 0$  - коэффициент характеризующий скорость убывания радиуса;  $t$  - время.

В рамках принятых допущений скорость вертикального движения частицы вверх  $u = u(t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{r}u^2 = -g, \quad (2)$$

в котором  $k$  - безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления;  $g$  - ускорение свободного падения.

Считая убывание массы всесторонним, в отличие от работ [5,8] в уравнении движения (2) не учитываем действие реактивной силы.

Ориентируясь на аналитические решения уравнения (2) при начальном условии

$$u(0) = u_0, \quad (3)$$

перейдём к новой переменной

$$x = e^{rt}; \quad \frac{dx}{dt} = Ix; \quad \frac{du}{dt} = Ix \frac{du}{dx}.$$

Вместо (2) получаем

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = -\frac{g_1}{x}. \quad (4)$$

Здесь  $g_1 = \frac{g}{I}$ ;  $b = \frac{k}{Ir_0}$ .

Выразим далее искомую скорость через вспомогательную функцию  $w(x)$  по формуле [2]

$$u = \frac{1}{b} \frac{dw}{dx} w^{-1}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), приходим к линейному уравнению типа бес селя

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{b_1}{x}w = 0, \quad (6)$$

в котором  $b_1 = bg_1$ .

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$w(h) = h(c_1 J_1(h) + c_2 Y_1(h)), \quad (7)$$

где  $h = 2\sqrt{b_1 x}$ ,  $c_1, c_2$  - произвольные постоянные;  $J_1(h)$ ;  $Y_1(h)$  соответственно функции Бесселя и Неймана индекса единица.

Продифференцировав, согласно (5), выражение (7), находим общее решение уравнения (2)

$$u(h) = \frac{2g_1}{h} \frac{cJ_0(h) + Y_0(h)}{cJ_1(h) + Y_1(h)}. \quad (8)$$

В нём  $c = c_1 c_2^{-1}$  - произвольная постоянная;  $J_0(h)$ ,  $Y_0(h)$  - соответственно функция Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Решение (8) удовлетворяет начальному условию (3), когда

$$c = \frac{2g_1 Y_0(h_0) - u_0 h_0 Y_1(h_0)}{u_0 h_0 J_1(h_0) - 2g_1 J_0(h_0)}; \quad h_0 = 2\sqrt{b_1}. \quad (9)$$

В момент достижения максимальной высоты полёта  $t = t^*$ , скорость тела

$$u(h) = u(h^*) = 0.$$

Согласно (8) определение  $h = h^*$  сводится к решению трансцендентного уравнения

$$cJ_0(h) + Y_0(h) = 0, \quad (10)$$

в котором  $c$  зависит от  $u_0$ ,  $r_0$  и других параметров (9).

Вычисление корня  $h^*$  с высокой точностью можно провести методом итераций по формуле

$$h_{n+1} = h_n + \frac{cJ_0(h_n) + Y_0(h_n)}{cJ_1(h_n) + Y_1(h_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Начальным приближением допустимо взять  $h_0 = 2\sqrt{b_1}$ .

Достигнув заданной точности в определении  $h^* \approx h_{n+1}$ , затем несложно найти время движение тела вверх, поскольку

$$t^* = \frac{1}{I} \ln \frac{(h^*)^2}{4b_1}.$$

Для проведения расчётов удобно использовать таблицы цилиндрических функций [9, 10, 11].

Корень уравнения (10) можно приближённо находить и другими способами, особенно при малых или больших  $h^*$ . Рассмотрим эти способы.

Заменим при малых  $h_0 < h^* < 1$  цилиндрические функции их асимптотическими представлениями [7]

$$J_0(h) \sim 1 - \frac{h^2}{4}; \quad Y_0(h) \sim \frac{2}{p} \left( \ln \frac{h}{2} + g \right) J_0(h), \quad g \approx 0,5772.$$

В этом приближении

$$c = -\frac{2}{p} (\ln h + g - \ln 2).$$

Откуда следует, что

$$h^* = e^{-\frac{p}{2}c + 0,1159}. \quad (12)$$

В области  $1,09 \leq c < \infty$ ,  $h_0 < h^* \leq 0,2$  с погрешностью меньшей 1% вычисление  $h^*$  удобно проводить по формуле (12).

При больших  $h_0$  и  $h^*$ , используя асимптотические представления [9]

$$J_0(h) \sim M_0 \cos q_0; \quad N_0(h) \sim M_0 \sin q_0,$$

вместо (10) получаем приближённое уравнение

$$c \cos q_0 + \sin q_0 = 0, \quad (13)$$

в котором  $q_0 \approx h - \frac{1}{8h} - \frac{p}{4}$ .

Чтобы найти аналитическое решение уравнения (13) преобразуем его к виду

$$\operatorname{tg} \left( h - \frac{1}{8h} - h_0 \right) = \frac{c \cos w + \sin w}{c \sin w - \cos w},$$

где  $w = h_0 - \frac{p}{4}$ .

Далее получаем квадратное уравнение

$$h^2 - (h_0 + a)h - \frac{1}{8} = 0,$$

в котором

$$a = \operatorname{arctg} \frac{c \cos w + \sin w}{c \sin w - \cos w}.$$

В итоге приходим к формуле

$$h^* = \frac{h_0 + a}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2(h_0 + a)^2}} \right), \quad (14)$$

погрешность которой меньше 1%, когда  $3 \leq h_0 < h^*$ .

При средних значениях  $h^*$  их можно определить с помощью специально составленной таблицы 1, в которой указаны значения  $c = c(h^*)$ , а затем уточнить по формуле (11).

Таблица 1 – Средние корни уравнения (10), которые находятся на промежутке  $h^* \in [0,25; 2,28]$  и  $h^* \in [2,5; 4]$

$h^*$	$c$	$h^*$	$c$	$h^*$	$c$	$h^*$	$c$
0,25	0,946	1,20	-0,340	2,14	-3,612	2,95	1,619
0,26	0,921	1,25	-0,400	2,16	-3,922	3,00	1,449
0,27	0,896	1,30	-0,462	2,18	-4,285	3,05	1,303
0,28	0,872	1,35	-0,527	2,20	-4,719	3,10	1,175
0,29	0,848	1,40	-0,596	2,22	-5,245	3,15	1,061
0,30	0,826	1,45	-0,700	2,24	-5,896	3,20	0,959
0,35	0,722	1,50	-0,747	2,26	-6,726	3,25	0,866
0,40	0,631	1,55	-0,831	2,28	-7,820	3,30	0,782
0,45	0,549	1,60	-0,923	2,50	10,294	3,35	0,703
0,50	0,474	1,65	-1,024	2,52	8,495	3,40	0,630
0,55	0,404	1,70	-1,136	2,54	7,227	3,45	0,562
0,60	0,338	1,75	-1,261	2,56	6,283	3,50	0,497
0,65	0,276	1,80	-1,404	2,58	5,554	3,55	0,436
0,70	0,216	1,85	-1,569	2,60	4,972	3,60	0,377
0,75	0,159	1,90	-1,763	2,62	4,498	3,65	0,320
0,80	0,103	1,95	-1,995	2,64	4,102	3,70	0,266
0,85	0,047	2,00	-2,280	2,66	3,768	3,75	0,212
0,90	-0,007	2,02	-2,413	2,68	3,482	3,80	0,160
0,95	-0,061	2,04	-2,560	2,70	3,233	3,85	0,190
1,00	-0,115	2,06	-2,723	2,75	2,733	3,90	0,058
1,05	-0,170	2,08	-2,905	2,80	2,356	3,95	0,008
1,10	-0,225	2,10	-3,111	2,85	2,059	4,00	-0,043
1,15	-0,282	2,12	-3,344	2,90	1,819		

В области средних значений при  $h^* \approx 2,4048$  функция  $c(h^*)$  имеет разрыв. Значение  $h^*$  в окрестности разрыва  $h^* \in (2,28; 2,50)$  можно находить по приближённой формуле

$$h \approx 2,4048 + \frac{0,5099}{c \cdot 0,5191 - 0,1027}.$$

Для определения максимальной высоты полёта шара нужно вычислить интеграл

$$H = \int_0^{t^*} u(t) dt.$$

Учитывая, что  $dt = \frac{2dh}{1h}$ , его преобразуем к виду

$$H = \frac{2}{l} \int_{h_0}^{h^*} u(h) \frac{dh}{h} \quad (15)$$

и рассмотрим способы приближённого вычисления.

Выведем асимптотику  $u(h)$  при малых  $h_0$  и  $h$ . Используя то, что [9]

$$J_0(h) \sim 1; J_1(h) \sim \frac{h}{2}; Y_0(h) \sim \frac{2}{p} \left( \ln \frac{h}{2} + g \right); Y_1(h) \sim -\frac{2}{ph},$$

с помощью выражений (8) и (9) получаем асимптотическое приближение

$$c = -\frac{u_0}{pg_1} - \frac{2}{p} \left( \ln \frac{h_0}{2} + g \right);$$

$$u_a(h) = u_0 - 2g_1 \ln \frac{h}{h_0}. \quad (16)$$

Интеграл от  $u_a(h)$  “берётся” в элементарных функциях. Поэтому разложим (15) на два слагаемых

$$H = \frac{2}{l} \int_{h_0}^{h^*} u_a(h) \frac{dh}{h} + \frac{2}{l} \int_{h_0}^{h^*} [u(h) - u_a(h)] \frac{dh}{h}.$$

Первый интеграл находим по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{h_0}^{h^*} u_a(h) \frac{dh}{h} = (u_0 + 2g_1 \ln h_0) \ln \frac{h^*}{h_0} - g_1 (\ln^2 h^* - \ln^2 h_0).$$

Второй интеграл вычисляем приближённо по формуле Симпсона

$$\int_{h_0}^{h^*} [u(h) - u_a(h)] \frac{dh}{h} \approx \frac{h^* - h_0}{6} \left\{ \frac{8}{h_0 + h^*} \left[ u\left(\frac{h_0 + h^*}{2}\right) - u_a\left(\frac{h_0 + h^*}{2}\right) \right] - \frac{1}{h^*} u_a(h^*) \right\}.$$

В результате получаем

$$H \approx \frac{2}{l} \left[ (u_0 + 2g_1 \ln h_0) \ln \frac{h^*}{h_0} - g_1 (\ln^2 h^* - \ln^2 h_0) \right] + \frac{h^* - h_0}{3l} \times \\ \times \left\{ \frac{8}{h_0 + h^*} \left[ u\left(\frac{h_0 + h^*}{2}\right) - u_a\left(\frac{h_0 + h^*}{2}\right) \right] - \frac{1}{h^*} u_a(h^*) \right\}. \quad (17)$$

Таким образом, расчёт максимальной высоты полёта шара  $H$  сводится к вычислению корня уравнения (10) и скоростей по формулам (8) и (16).

Точность изложенного способа определения  $H$  ухудшается с увеличением значений  $h_0$  и  $h^*$ . Поэтому дополним этот способ формулой приближённого определения  $H$ , предложенной в работе [7]. Согласно указанной публикации

$$H \approx \frac{1}{4k} \left\{ [q(3 + l t^*) - r_0] \ln \left( 1 + \frac{1}{\Omega} \right) + \frac{r_0 - q(1 + l t^*)}{1 + \Omega} \right\}, \quad (18)$$

$$\text{причём } \Omega = \frac{8q}{k u_0^2}; \quad q = \frac{r_0}{l t^*} [1 - e^{-l t^*}].$$

**Численные результаты и их анализ.** Проведём расчёт при  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $l = 0,1 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 10^{-4}$  и различных  $u_0$ , для определения  $t^*$ .

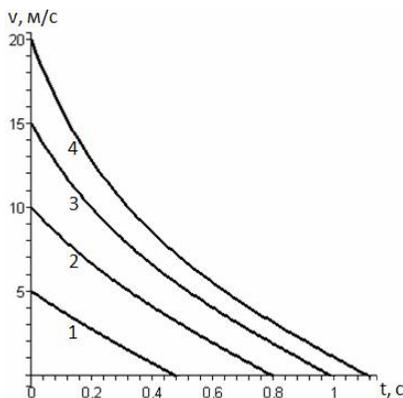


Рис. - Зависимость скорости от времени для разных  $u_0$

На рис. цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены, рассчитанные по формулам (8) и (9) кривые, соответствующие значениям  $u_0 = 5; 10; 15; 20$  м/с.

При увеличении начальной скорости зависимость  $u(t)$  времени приобретает нелинейный характер, это связано с большим влиянием аэродинамического сопротивления на процесс движения.

Проверим эффективность итерационной формулы (11), используя принятые выше исходные данные и  $u_0 = 10$  м/с. Вычислив для них  $h_0 = 19,809$ , дальше по формуле (11) получаем:  $h_1 = 20,819$ ,  $h_3 = 20,608$ ,  $h_4 = 20,612$ ,  $h_5 = 20,612$ . Проведя четыре итерации, с принятой точностью нашли искомое значение  $h^* = 20,612$ . По формуле (14), также, получаем  $h^* = 20,612$ , что подтверждает эффективность этой формулы в области больших  $h^*$ . Далее используя найденное  $h^*$  вычисляем время остановки тела  $t^* = 0,79$ . Анализируя поведение кривой 2 на рис., видим, что она пересекает ось абсцисс в точке  $t \approx 0,79$ , а значит предложенные методики определения  $t^*$  дают адекватные результаты.

Сравним величины  $H$ , полученные численным интегрированием квадратуры (15), со значениями, к которым приводят формулы (17) и (18). При этом сохраним указанные выше исходные данные. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Максимальная высота вертикального полёта тела  $H$ , полученная для различных начальных скоростей тремя способами

$u_0$ , м/с	$t^*$ , с	$H$ , м		
		численное ин- тегрирование (15)	по фор- муле (17)	по фор- муле (18)
5	0,472	1,134	1,134	1,134
10	0,795	3,498	3,512	3,494
15	0,990	5,912	5,990	5,899
20	1,111	8,036	8,263	8,010

Результаты в табл. 2 свидетельствуют о хорошей точности предложенных формул (17) и (18), из которых формула (18) проще в использовании.

Результаты в таблице 3 показывают, что и при значительном изменении коэффициента аэродинамического сопротивления точность приближённых

формулы остаётся высокой. С увеличением коэффициента  $k$  уменьшается высота и время полёта шара вверх.

В целом расчёт максимальной высоты вертикального полёта частицы по изложенной методике связан с вычислением значений функций Бесселя, что удобно выполнять с помощью таблиц, имеющихся в [9,10,11] и другой литературе по специальным функциям.

Таблица 3 – Максимальная высота вертикального полёта тела  $H$ , полученная для различных  $k$  при  $u_0 = 10$  м/с

$10^4 k$	$t^*, \text{с}$	$H, \text{м}$		
		численное интегрирование (15)	по формуле (17)	по формуле (18)
1,5	0,731	3,077	3,100	3,073
2	0,682	2,764	2,794	2,760
3	0,610	2,322	2,366	2,318

**Выводы.** Скорость вертикального движения сферического тела с экспоненциально убывающей массой выражается с помощью функций Бесселя. При использовании асимптотических значений цилиндрических функций расчёт максимальной высоты полёта сводится к замкнутым формулам.

**Список литературы:** 1. Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М. Моделювання польоту крапель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 203 с. 2. Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків. 2007. – 304 с. 3. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Нижня оцінка дальності польоту іспаряючихся крапель распылених огнетушачих веществ // Науковий вісник будівництва. – Вип. 35. – Харків: ХДТУБА, – 2006. – С. 188 – 193. 4. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Нижня оцінка дальності польоту іспаряючоїся краплі огнетушачої жидкості // Інженерно – фізический журнал. – 2007, – Вип. 75, № 4. – С. 59 – 62. 5. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд., М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 6. Циолковский К.Э. Собр. соч., т. II, АН СССР, – 1954. 7. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. К расчёту максимальной высоты выброса капель, испаряющихся при полёте // Коммунальное хозяйство городов. – Вип. 76. – К.: Техника, 2007. – С. 412 – 417. 8. Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев ГТУ, 1996. – 260 с. 9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с. 11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

Поступила в редколлегию 23.04.08