

## У ПОРЯДКУ ОБГОВОРЕННЯ

УДК 531

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук,  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, аспирант, НТУ «ХПИ» (г. Харьков)

### **О ДВИЖЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ШАРА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ**

Розв'язано рівняння падіння однорідного шару змінного радіуса з вертикальною віссю обертання без урахування опору зовнішнього середовища. За лінійного закону зміни радіуса в часі перші інтеграли рівняння руху виражені в елементарних функціях, а другі, для початкового етапу руху, зведені до інтегралів Френеля.

The equations of fall of a homogeneous sphere with variable radius and a vertical axis of rotation without the account of resistance of external environment are solved. At the linear law of change of radius in time the first integrals of the equation of motion are expressed in elementary functions, and second, for the initial stage of movement, are shown to Fresnel's integrals.

**Проблема и краткий анализ публикаций по ней.** Движение тел переменной массы, кроме ракетодинамики, имеет место в различных технологических процессах. Это полёт сгорающих частиц жидких и твёрдых топлив [1,2], движение испаряющихся капель диспергированных огнетушащих веществ [3], падение коагулирующих (укрупняющихся) частиц в атмосфере [4,5]. Поэтому изучение баллистических свойств частиц, которые уменьшают или увеличивают свои размеры и массу при полёте, является актуальной задачей, на что в своё время обратил внимание И.В. Мещерский [6]. Вращение тел при полёте их в газовой среде сопровождается действием силы Магнуса [7]. Эта сила искривляет траекторию движения. Поэтому вращающаяся частица не может в общем случае двигаться прямолинейно даже при падении её в гравитационном поле. От действия сил Магнуса зависит скорость движения. Её влияние на процесс полёта исследовано в основном для тел постоянных размеров и массы [8]. Менее изученным остаётся влияние названной силы на движение тел переменных размеров, чем мотивирована цель этого исследования.

**Целью статьи** является исследование влияния силы Магнуса на кинематические характеристики полёта однородной сферической частицы переменного радиуса во времени.

**Постановка задачи Коши.** Решим задачу в упрощённой постановке, без учёта сил сопротивления внешней среды. Такой подход позволяет найти аналитическое решение, которое с приемлемой точностью моделирует движение быстровращающихся тел в неподвижной газовой среде на начальном этапе полёта.

Ось вращения сферического тела считаем вертикальной, т.е. направленной против оси  $oz$  координатной системы, показанной на рис. 1.

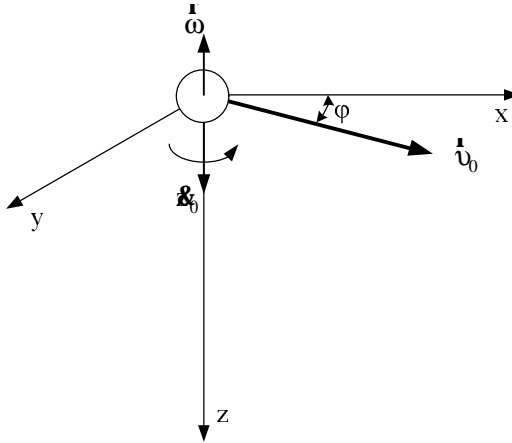


Рисунок 1 – Расчётная схема

При указанной ориентации оси вращения проекции силы Магнуса на оси координат можно вычислить по формулам

$$F_{mx} = \frac{8\rho}{3} dr^3 w u_{0y}; \quad F_{my} = -\frac{8\rho}{3} dr^3 w u_{0x}; \quad F_{mz} = 0, \quad (1)$$

в которых  $d$  - плотность газовой среды;  $w$  - угловая скорость вращения шара радиуса  $r = r(t)$ ;  $t$  - время;  $u_{0x}$  и  $u_{0y}$  - проекции линейной скорости движения центра масс шара на оси  $ox$  и  $oy$  соответственно.

Без учёта сопротивления среды, в однородном поле гравитации, движение тела массой  $m$  описывается уравнениями

$$m \ddot{x} = F_{mx}; \quad m \ddot{y} = F_{my}; \quad m \ddot{z} = mg, \quad (2)$$

где  $g$  - ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по времени  $t$ .

Если плотность однородного шара равна  $\rho$ , то  $m = \frac{4}{3} \rho r^3$  и с учётом

(1) система уравнений (2) принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{2d}{r} w \cdot u_{0y}; \quad \ddot{y} = -\frac{2d}{r} w \cdot u_{0x}; \quad \ddot{z} = g. \quad (3)$$

Начальными условиями к ней берём

$$x(0) = u_0 \cos j; \quad y(0) = u_0 \sin j; \quad z(0) = 0, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\dot{u}_0$  - проекция стартовой линейной скорости центра масс на горизонтальную плоскость  $xoy$ , а  $j$  - угол, который образует эта проекция с осью  $ox$ .

Третье уравнение в системе (3) не связано с остальными. При выбранных начальных условиях его решением есть

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + gt; z(t) = \dot{x}_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad (5)$$

что является таким, как и при падении тела постоянной массы.

Решения первого и второго уравнения в (3) зависят от  $w = w(t)$ . Поэтому нужно сначала найти  $w$ . Эту зависимость определим из закона сохранения кинетического момента отдельно для шара, убывающего и возрастающего радиусов.

**1. Движение сферического тела убывающего радиуса.** Считаем, что относительная скорость отбрасываемых частиц равняется нулю (частицы отделяются от вращающегося тела без ударов). Для такого случая нужно принять при отсутствии моментов внешних сил [9]:

$$w = w_0 = const. \quad (6)$$

Исключив в (3) неизвестные  $\dot{x}$  и  $\dot{z}$  с учётом (6) получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{w} + b^2 w = 0, \quad (7)$$

в котором  $b = 2dw_0 r^{-1}$ .

Общее решение уравнения (7) находим в элементарных функциях

$$w = \dot{x}(t) = c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt) \quad (8)$$

с точностью до произвольных постоянных  $c_1, c_2$ .

Из первого уравнения в (3), с учётом (8), получаем

$$\dot{z}(t) = c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt).$$

Константы  $c_1$  и  $c_2$  определяем, с помощью (4), что приводит к решению для скоростей

$$\dot{x}(t) = u_0 \cos(bt - j), \quad (9)$$

$$\dot{z}(t) = u_0 \sin(j - bt).$$

Проинтегрировав (9) с учётом (4), получаем

$$x(t) = \frac{u_0}{b} (\sin(bt - j) + \sin(j)), \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{u_0}{b} (\cos(j - bt) - \cos j).$$

Вследствие принятых выше упрощений, независимо от закона изменения  $r(t)$ , шар движется по той же траектории, что и тело постоянного радиуса. Это винтовая линия радиуса  $u_0 b^{-1}$  с возрастающим во времени шагом витков. Зависимости (10) были ранее получены в [8] при рассмотрении движения шара постоянного радиуса.

**2. Движение сферического тела возрастающего радиуса.** Считаем, что радиус шара увеличивается вследствие оседания на него (прилипания) с ударами (импульсами) частиц внешней неподвижной среды. При таком увеличении массы, при отсутствии моментов внешних сил, из закона сохранения кинетического момента следует, что [9]

$$w_0 r_0^5 = w r^5 \Rightarrow w(t) = \frac{w_0 r_0^5}{r(t)^5}; \quad (11)$$

Для определения  $w(t)$  нужно задать функцию  $r(t)$ . Далее ограничимся случаем линейной зависимости

$$r(t) = r_0 + g t, \quad (12)$$

в которой  $g > 0$  - характеризует скорость увеличения радиуса шара.

Исключив в (3) неизвестные  $\mathfrak{K}$  с учётом (11) и (12), получаем однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{5}{r} \frac{dh}{dr} + \frac{b^2}{g^2} \frac{1}{r^{10}} h = 0, \quad (13)$$

в котором  $b = 2dw_0 r_0^5 r^{-1}$ ;  $h = \mathfrak{K}$

Преобразуем (13) в уравнение с постоянными коэффициентами. С этой целью введём новую переменную  $x = r^{-4}$ . Тогда

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{4}{r^5} \frac{dh}{dx}; \quad \frac{d^2 h}{dr^2} = \frac{20}{r^6} \frac{dh}{dx} + \frac{16}{r^{10}} \frac{d^2 h}{dx^2}$$

и вместо (12) получаем уравнение свободных колебаний

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{b^2}{16g^2} h = 0. \quad (14)$$

В результате находим общее решение уравнения (13) в элементарных функциях

$$h = \mathfrak{K}(r) = c_1 \sin\left(\frac{b}{4gr^4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{b}{4gr^4}\right) \quad (15)$$

с точностью до произвольных постоянных  $c_1, c_2$ .

Из первого уравнения в (3), с учётом (15), получаем

$$\mathfrak{X}(r) = -c_1 \cos\left(\frac{b}{4gr^4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{b}{4gr^4}\right).$$

Константы  $c_1$  и  $c_2$  определяем, с помощью (4), что приводит к решению

$$\mathfrak{X}(r) = u_0 \cos\left[\frac{b}{4g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right) - j\right]; \quad (16)$$

$$\mathfrak{Y}(r) = -u_0 \sin\left[\frac{b}{4g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right) - j\right].$$

Из (16) следует, что

$$[\mathfrak{X}(r)]^2 + [\mathfrak{Y}(r)]^2 = u_0^2,$$

т.е. несмотря на переменность параметров шара и угловой скорости его вращения, модуль проекции линейной скорости движения центра масс тела на горизонтальную плоскость, перпендикулярную оси вращения, является постоянной величиной.

На начальном этапе движения, когда соблюдается неравенство

$$\frac{g}{r_0} \ll 1, \quad (17)$$

с малой погрешностью можно положить

$$\frac{b}{4g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right) \approx at^2 + bt, \quad (18)$$

где  $a = -5dw_0g(rr_0)^{-1}$ .

Тогда, на основании (16) и (18)

$$\mathfrak{X}(t) \approx u_0 \cos(at^2 + bt - j); \quad \mathfrak{Y}(t) \approx -u_0 \sin(at^2 + bt - j). \quad (19)$$

Координаты центра масс шара на траектории его движения определяем интегрированием

$$x(t) = \int_0^t \mathfrak{X}(t) dt; \quad y(t) = \int_0^t \mathfrak{Y}(t) dt, \quad (20)$$

удовлетворяя условиям (4).

В общем случае квадратуры (20) не выражаются через известные функции. Но при соблюдении неравенства (17) подстановка (19) в (20) даёт

$$x(t) \approx u_0 \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2a}} \left\{ \cos q \left[ C \left( \frac{2at+b}{\sqrt{2ap}} \right) - C \left( \frac{b}{\sqrt{2ap}} \right) \right] + \sin q \left[ S \left( \frac{2at+b}{\sqrt{2ap}} \right) - S \left( \frac{b}{\sqrt{2ap}} \right) \right] \right\}; \quad (21)$$

$$y(t) \approx u_0 \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2a}} \left\{ \sin q \left[ C \left( \frac{2at+b}{\sqrt{2ap}} \right) - C \left( \frac{b}{\sqrt{2ap}} \right) \right] - \cos q \left[ S \left( \frac{2at+b}{\sqrt{2ap}} \right) - S \left( \frac{b}{\sqrt{2ap}} \right) \right] \right\}.$$

Здесь  $q = \frac{4aj + b^2}{4a}$ ;  $C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{p}{2}t^2\right) dt$ ;  $S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{p}{2}t^2\right) dt$  -

интегралы Френеля. Они затабулированы в [10,11] и других изданиях по специальным функциям.

Если  $g \rightarrow 0$ , то  $a \rightarrow 0$  и в решении (21) возникает неопределённость. Раскрыв её, приходим к (10).

**Численные результаты.** Движение тела с убывающей массой. Проведём расчёты при следующих исходных данных:  $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $g = -10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ;  $r = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $d = 1,36 \text{ кг/м}^3$ ;  $j = 45^0$ ;  $u_0 = 5 \text{ м/с}$ ;  $z_0 = 10 \text{ м/с}$  и различных  $w$ .

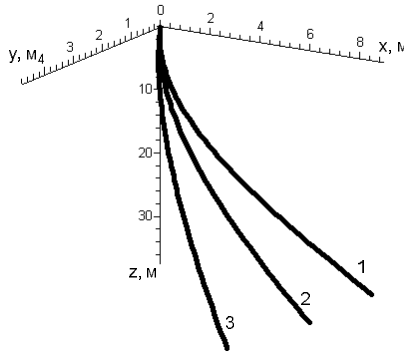


Рисунок 2 – Траектории шара при различных значениях  $w$

На рисунке 2 цифрами 1,2,3 обозначены кривые, полученные для значений  $w = 100; 200; 300 \text{ с}^{-1}$ . С увеличением значения угловой скорости происходит разворачивание траектории движения.

Движение тела с возрастающей массой. Проведём расчёты при следующих исходных данных:  $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $g = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ;  $r = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $d = 1,36 \text{ кг/м}^3$ ;  $j = 45^0$ ;  $u_0 = 5 \text{ м/с}$ ;  $z_0 = 10 \text{ м/с}$  и различных  $w$ .

Изучим, как влияет угловая скорость  $w$  на траекторию движения шара возрастающей массы.

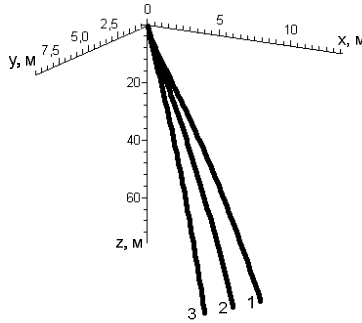


Рисунок 3 – Траектории шара при различных значениях  $W$

На рис. 3 цифрами 1,2,3 обозначены кривые соответствующие значениям  $w = 100; 200; 300 \text{ с}^{-1}$ . Для возрастающей массы траектории имеют малую кривизну.

Проверим точность приближённых формул (21) для вычисления перемещения сферического тела. Для этого используем указанные выше исходные данные и  $w = 200 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 4 и 5 сплошной линией обозначены кривые, полученные с помощью численного интегрирования системы (3), а пунктирными по формулам (21).

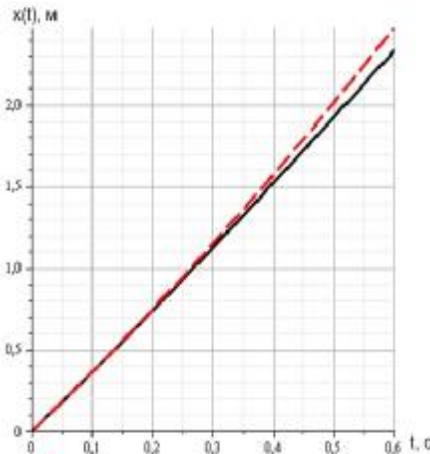


Рисунок 4 – Зависимости проекции перемещения  $x(t)$  от времени, полученные различными способами

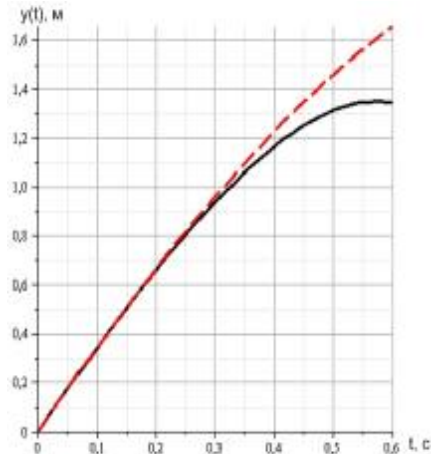


Рисунок 5 - Зависимости проекции перемещения  $y(t)$  от времени, полученные различными способами

Из результатов на рис. 4 и 5 можно сделать вывод, что приближённые формулы (21) при  $gr_0^{-1} < 0,2$  хорошо описывают начальный этап движения сферического тела возрастающей массы.

**Выводы.** При линейном законе изменения радиуса летящего шара во времени и вращении его вокруг вертикальной оси, без учёта реактивной силы и силы сопротивления среды, первые интегралы уравнения движения выражаются через элементарные функции, а вторые, для тела с возрастающей массой – через интегралы Френеля, а для тела с убывающей массой – в элементарных функциях. Кинематические характеристики движения шара убывающей массы с нулевой относительной скоростью отделения частиц остаются такими, как и в шаре постоянной массы. Сила Магнуса искривляет траекторию полёта в пространственную линию.

**Список литературы:** 1. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. 2. *Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф.* и др. Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. 3. *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. 4. *Матвеев Л. Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1965. — 751 с. 5. *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. – Л., Гидрометеиздат, 1969. — 320 с. 6. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 7. *Прандтль Л.* Эффект Магнуса и ветряной корабль // Успехи физических наук. – 1925. – Т. V, - Вып. 1-2, С. 1 – 27. 8. *Сагитов М.Н.* О движении вращающегося шара постоянной и переменной массы: автореферат дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.01 “Теоретическая механика” – Алма-Ата, 1965. – 14 с. 9. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2, [3-е изд.], – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 10. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям(с формулами, графиками и математическими таблицами) – М. : Наука, 1979. – 832 с. 11. *Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф.* Специальные функции – М.: Наука, 1977. – 344с.

*Поступила в редколлегию 26.06.2009*