

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ (г. Харьков),
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, аспирант, НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ВИБРОТРАНСПОРТИРОВАНИЯ РЕШЕТОМ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ

Розглянуто усталені гармонічні коливання швидкості потоку зернової суміші, вібророзрідженої внаслідок вздовжніх вібрацій плоского решета. В функціях Кельвіна побудовано аналітичний розв'язок граничної задачі для шару в'язкої рідини, в якій коефіцієнт кінематичної в'язкості є лінійною функцією декартової координати, яка перпендикулярна напрямку руху шару.

The established harmonically of fluctuation velocity of a flow a grain mix are considered, vibroliquefaction owing to longitudinal vibrations of a flat sieve. In Kelvin functions the analytical solutions of a regional problem for a layer of a viscous liquid is constructed, in which factor of the kinematical viscosity is linear function of cartesian coordinate, perpendicular direction motion of a layer.

Постановка проблеми. Математические модели движения зерновой смеси используют при разработке способов интенсификации сепарирования зерновых материалов. В условиях вибраций поток смеси по плоскому решету аналогичен движению вязкой жидкости по наклонному лотку. Поэтому для моделирования движения зерна используют гидродинамическую аналогию. Обычно вязкую жидкость считают однородной, т.е. не учитывают зависимость вибровязкости зернового материала от внутреннего давления. Однако эксперименты показывают, что вязкость смеси увеличивается с удалением от свободной поверхности вглубь смеси. Поэтому, разрабатывая уточнённые математические модели, желаттельно учитывать эту зависимость.

Обзор последних публикаций. В рамках гидродинамической аналогии колебания скорости потока зерновой смеси, вызванные вибрациями плоского решета рассмотрены в [1,2,3]. Решения задач получены для однородной вязкой жидкости. Публикации по колебаниям неоднородного слоя немногочисленны. Из работ, в которых учитывалась при колебаниях зависимость вибровязкости смеси от декартовой координаты, отметим [4,5]. В них принята линейная зависимость кинематического коэффициента от поперечной координаты, перпендикулярной направлению потока. Недостатком такой модели является то, что теоретическая вибровязкость на свободной поверхности слоя равна нулю. Такая идеальная текучесть на свободной поверхности в действительности невозможна, поскольку силы трения действуют и на зёрна (частицы смеси), выходящие на эту поверхность. Поэтому результаты указанных публикаций нуждаются в дальнейшем уточнении за счёт использования более точных аппроксимаций вибровязкости, которые лучше согласуются с физическими представлениями о свойствах зернового слоя. Простейший способ уточнения известных решений заключается в дополнении линейной аппроксимации конечным

(ненулевым) значением вибровязкости на поверхности слоя. Именно этот способ реализуется в данной статье.

Целью работы является получение формул для расчёта скорости потока неоднородного виброожиженного слоя зерновой смеси, у которого вибровязкость слоя отлична от нуля на свободной поверхности и возрастает пропорционально удалению от этой поверхности.

Ставится задача анализа установившихся колебаний скорости, вызванных продольными вибрациями решета.

Рассматривается одномерный вариант движения, полученный в результате упрощения исходных уравнений Навье-Стокса. В них заданы равным нулю две проекции скорости, а также отброшены конвективные члены.

Основная часть работы. Изменение кинематического коэффициента вибровязкости смеси по толщине слоя аппроксимируем линейной зависимостью

$$v = v(y) = a_* y + v_0, \quad (1)$$

в которой v_0 - значение коэффициента на свободной поверхности слоя $y = 0$; a_* - положительная постоянная, зависящая от параметров вибраций решета и механико-технологических характеристик зернового материала.

Множитель a_* в работе [4] определяют по формуле

$$a_* = \frac{b}{6\omega r_0 \sqrt{(2A^*)^2 - (\rho b c h)^2}}, \quad (2)$$

где $b = 0,7 f (\pi r_0)^2 g \cos \theta$; $c = \pi (4 M \omega^2)^{-1}$; f - коэффициент внутреннего трения в смеси; r_0 и M - эффективные радиус и масса зёрен в смеси, имеющей плотность ρ ; A^* , ω - амплитуда и частота продольных колебаний решета в своей плоскости; θ - угол наклона рабочей плоскости решета к горизонту; h - толщина движущегося слоя.

Система координат и направление потока смеси показаны на рис. 1.

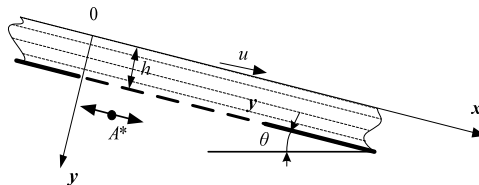


Рисунок 1 – Расчётная схема

Распределение скорости потока по толщине слоя $u(y, t)$ в установившемся режиме колебаний определим, решив дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (3)$$

при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (4)$$

Первое условие выражает отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности слоя, а второе – равенство скоростей смеси и решета в плоскости их контакта, что аналогично “прилипанию” жидкости к твёрдой стенке [6].

Учитывая линейность (3), его решение ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

слагаемые которой удовлетворяют граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad u_2(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t).$$

Подставив (5) в (3), с учётом (1), получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\nu} \left(\nu \frac{du_1}{d\nu} \right) = -\frac{g \sin \theta}{a_*^2}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \frac{1}{a_*^2 \nu} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Двукратное интегрирование приводит к следующему решению краевой задачи для уравнения (6)

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{a_*^2} \left[(v_1 - \nu) + \nu_0 \ln \frac{\nu}{\nu_1} \right], \quad (8)$$

Здесь $\nu_1 = a_* h + \nu_0$.

При $\nu_0 = 0$ решение (8) совпадает с опубликованным в [4].

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$u_2(y, t) = \text{Im} [w(y) \exp(i\omega t)] = \text{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t) + \text{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t), \quad (9)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $w(y)$ – комплексная функция вещественного аргумента, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{dw}{d\nu} - \frac{i\omega}{a_*^2 \nu} w = 0 \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Im} w(h) = 0; \operatorname{Re} w(h) = A^* \omega; \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dy} \Big|_{y=0} = \operatorname{Re} \frac{dw}{dy} \Big|_{y=0} = 0.$$

Общее решение уравнения (10) выражается через функции Кельвина нулевого индекса и сводится к сумме

$$w(y) = (c_1 + ic_2) [\operatorname{ber}(\xi) + i \operatorname{bei}(\xi)] + (c_3 + ic_4) [\operatorname{ker}(\xi) + i \operatorname{kei}(\xi)], \quad (12)$$

в которой c_1, c_2, c_3, c_4 - вещественные произвольные постоянные;

$$\xi = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega(a_* y + \nu_0)}.$$

Если $\nu_0 = 0$, то ограниченность функции $w(y)$ при $y = 0$ приводит к равенствам $c_3 = c_4 = 0$. Эта упрощённая форма решения использована в [4].

Подставив (12) в (11), приходим к системе четырёх алгебраических уравнений относительно неизвестных констант:

$$\begin{aligned} c_1 \operatorname{ber}(\eta) - c_2 \operatorname{bei}(\eta) + c_3 \operatorname{ker}(\eta) - c_4 \operatorname{kei}(\eta) &= A^* \omega; \\ c_1 \operatorname{bei}(\eta) + c_2 \operatorname{ber}(\eta) + c_3 \operatorname{kei}(\eta) + c_4 \operatorname{ker}(\eta) &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c_1 \operatorname{ber}'(\zeta) - c_2 \operatorname{bei}'(\zeta) + c_3 \operatorname{ker}'(\zeta) - c_4 \operatorname{kei}'(\zeta) &= 0; \\ c_1 \operatorname{bei}'(\zeta) + c_2 \operatorname{ber}'(\zeta) + c_3 \operatorname{ker}'(\zeta) + c_4 \operatorname{kei}'(\zeta) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\zeta = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega \nu_0}$; $\eta = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega(a_* h + \nu_0)}$; штрихом обозначены производные функций Кельвина. Они, как и названные функции, затабулированы в [7].

Решив систему (13), находим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} [\operatorname{ber}(\eta) + \delta_1 \operatorname{ker}(\eta) + \delta_2 \operatorname{kei}(\eta)]; \\ c_2 &= -\frac{A^* \omega}{\Delta} [\operatorname{bei}(\eta) + \delta_1 \operatorname{kei}(\eta) - \delta_2 \operatorname{ker}(\eta)]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$c_3 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = \delta_1 c_2 - \delta_2 c_1;$$

$$\begin{aligned} \Delta &= [\operatorname{ber}(\eta) + \delta_1 \operatorname{ker}(\eta) + \delta_2 \operatorname{kei}(\eta)]^2 + [\operatorname{bei}(\eta) + \delta_1 \operatorname{kei}(\eta) - \delta_2 \operatorname{ker}(\eta)]^2; \\ \delta_1 &= -\frac{\operatorname{ber}'(\zeta) \operatorname{ker}'(\zeta) + \operatorname{bei}'(\zeta) \operatorname{kei}'(\zeta)}{(\operatorname{ker}'(\zeta))^2 + (\operatorname{kei}'(\zeta))^2}; \quad \delta_2 = \frac{\operatorname{bei}'(\zeta) \operatorname{ker}'(\zeta) - \operatorname{ber}'(\zeta) \operatorname{kei}'(\zeta)}{(\operatorname{ker}'(\zeta))^2 + (\operatorname{kei}'(\zeta))^2}. \end{aligned}$$

Учитывая (5), (8), (9) и (12), получаем замкнутое решение рассматриваемой краевой задачи

$$\begin{aligned}
u(y, t) = & \frac{g \sin \theta}{a_*^2} \left[(v_1 - v) + v_0 \ln \frac{v}{v_1} \right] + [c_1 \text{ber}(\xi) - c_2 \text{bei}(\xi) + \\
& + c_3 \text{ker}(\xi) - c_4 \text{kei}(\xi)] \sin(\omega t) + [c_1 \text{bei}(\xi) + c_2 \text{ber}(\xi) + \\
& + c_3 \text{kei}(\xi) + c_4 \text{ker}(\xi)] \cos(\omega t),
\end{aligned} \tag{15}$$

в котором константы $c_j, j = \overline{1; 4}$ определены выражениями (14).

Решение (15) описывает установившиеся колебания скорости потока смеси, вызванные гармоническими колебаниями решета.

Для определения удельной производительности решета $\overline{Q}(t)$ и усреднённой по толщине слоя скорости потока $u_{cp} = h^{-1} \overline{Q}(t)$ приходится вычислять интеграл

$$\overline{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy.$$

Интегрирование выражения (15) приводит к формуле

$$\begin{aligned}
\overline{Q}(t) = & \frac{g \sin \theta}{a_*^2} \left[\frac{1}{2} a_* h^2 + \frac{v_0^2}{a_*} \ln \left(1 + \frac{a_* h}{v_0} \right) - v_0 h \right] + \frac{a_*}{2\sqrt{2}\omega} \times \\
& \times [(c_1 S_1 - c_2 S_2 + c_3 S_3 - c_4 S_4) \sin(\omega t) + (c_1 S_2 + c_2 S_1 + c_3 S_4 + c_4 S_3) \cos(\omega t)].
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$S_1 = \eta [\text{bei}_1(\eta) - \text{ber}_1(\eta)] - \zeta [\text{bei}_1(\zeta) - \text{ber}_1(\zeta)];$$

$$S_2 = \zeta [\text{bei}_1(\zeta) + \text{ber}_1(\zeta)] - \eta [\text{bei}_1(\eta) + \text{ber}_1(\eta)];$$

$$S_3 = \eta [\text{kei}_1(\eta) - \text{ker}_1(\eta)] - \zeta [\text{kei}_1(\zeta) - \text{ber}_1(\zeta)];$$

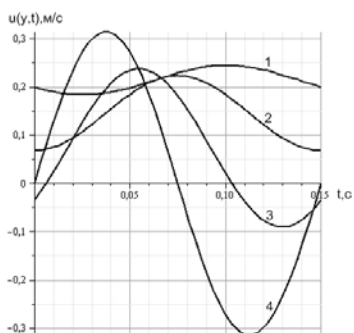
$$S_4 = \zeta [\text{kei}_1(\zeta) + \text{ker}_1(\zeta)] - \eta [\text{kei}_1(\eta) + \text{ker}_1(\eta)];$$

$\text{ber}_1(z), \text{bei}_1(z), \text{ker}_1(z), \text{kei}_1(z)$ – функции Кельвина индекса единица, затабулированные в [8].

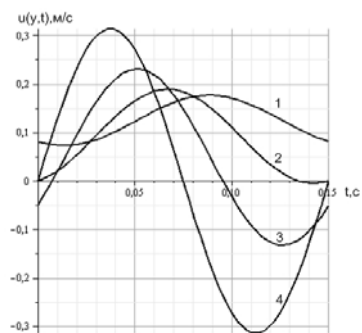
При $v_0 = \zeta = 0$ формула (16) существенно упрощается и переходит в опубликованную в [4].

Таким образом, расчёт профиля скорости потока и удельной производительности решета можно проводить с помощью таблиц специальных функций и их производных.

Проведём численные расчёты. С этой целью используем следующие исходные данные: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $f = 0,47$; $M = 0,00004 \text{ кг}$; $r_0 = 0,001825 \text{ м}$; $h = 0,008 \text{ м}$, $v_{II} = 0,0025 \text{ м/с}$, которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [4]. Работу решета характеризуем параметрами: $\theta = 5^0$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 0,4$.



а)



б)

Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1,2,3,4 - $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$;

а) – $v_0 = 0,000005 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$; б) – $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$

Рассчитанные графики колебаний скорости потока для двух значений v_0 и различных y показаны на рис. 2 а) и б). Поверхностная вибровязкость смеси заметно влияет на неравномерность движения лишь тех частиц, которые удалены от поверхности решета (графики 1 и 2).

Выводы. С увеличением поверхностной вибровязкости зернового материала уменьшается средняя скорость течения приповерхностных слоёв, но возрастает амплитуда колебаний скорости. Теория, в которой принято $v_0 = 0$, завышает среднюю скорость течения у свободной поверхности смеси. Из-за отсутствия формул для вычисления v_0 этот параметр приходится определять экспериментально. Такой способ учёта поверхностной вибровязкости позволяет повысить адекватность рассматриваемой модели потока зерновой смеси на плоском виброрешете.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вибрації в техніці та технологіях. 2009. - №1. - С. 109-113. 2. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О влиянии поперечных колебаний плоского наклонного решета на движение сепарируемой зерновой смеси // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип. 9, Т.2. – С. 131-139. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П. О влиянии поперечных колебаний плоского решета на движение по нём слоя зерновой смеси // Динамика и прочность машин. Вестник НТУ “ХПИ” – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2009. – Вип. 30. – С. 167-176. 4. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: “Міськдрук”, 2010. – 174 с. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. Вип. 10. Т.7. – С. 32-42. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М. Наука, 1977. – 344 с. 8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям(с формулами, графиками и математическими таблицами) – М. : Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 23.09.2010