

**В.М. БЕСПАЛОВ**, канд. техн. наук, Академія внутрішніх військ МВС України (м. Харків),

**Г.М. МАРЕНКО**, канд. техн. наук, Академія внутрішніх військ МВС України (м. Харків),

**Р.О. КАЙДАЛОВ**, канд. техн. наук, Академія внутрішніх військ МВС України (м. Харків)

## **МЕХАНІЧНИЙ ГІСТЕРЕЗИС**

Рассмотрен вопрос формирования петли гистерезиса в системах с линейно зависимыми от величины деформации значениями уровней жесткого скольжения и показана необходимость отдельного определения упругих и диссипативных характеристик таких систем. Проведено исследование коэффициента поглощения энергии колебаний.

The question of forming of loop of hysteresis is considered in the systems with the arcwise dependency upon the size of deformation values of levels of the hard sliding and the necessity of separate determination of resilient and dissipative descriptions of such systems is noted. Research an absorption energy of vibrations is conducted.

**Постановка проблеми.** Гістерезис у перекладі з грецької мови означає запізнення, тобто різні реакції фізичного тіла на зовнішні дії в залежності від того, піддавалося це тіло раніше тим же діям, чи піддається їм уперше. Гістерезис можна пояснити незворотними змінами, що проявляються у протіканні прямих та зворотних процесів. В залежності від суті фізичних процесів прийнято розрізнявати магнітний, діелектричний та пружний гістерезис.

Під пружним гістерезисом розуміють різницю в значенні деформації тіла при одному й тому ж значенні механічної напруги в залежності від значення попередньої деформації тіла. Пружний гістерезис є причиною затухання вільних коливань у твердих тілах і поглинання енергії при вимушених коливаннях. Одразу треба зауважити, що поглинання енергії при коливаннях твердих тіл пов'язане із внутрішнім тертям та пружно-пластичними деформаціями, тобто не зовсім пружними процесами, а для більшості твердих тіл існують поняття пружних характеристик, модуля пружності, пружного прогину та ін. Ось чому більш правильно вживати назву механічний гістерезис”.

Механічний гістерезис може бути шкідливим і тоді з ним необхідно боротися (вузли тертя машин), або корисним, таким що використовується свідомо (системи демпфування коливань). В цих конструкціях паралельно вмикають пружні елементи (ресора, пружина) та елементи, що мають великий механічний гістерезис (наприклад, амортизатор). В таких системах існує так званий конструктивний гістерезис, основні характеристики якого пов'язані вже не тільки із внутрішнім тертям, а із зовнішнім, нерідко – із

внутрішнім тертям у рідині. До основних питань при конструюванні систем із механічним гістерезисом слід віднести свідоме визначення співвідношення пружних та дисипативних характеристик елементів ще на стадії вибору конструктивних схем. Так, свого часу неправильне визначення пружних та дисипативних характеристик каротажних кабелів призвело до похибок в оцінці результатів дослідження Кольської надглибокої свердловини (проектна глибина 15 км).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанням врахування сил тертя при деформуванні пружних систем присвячені роботи [1], [2], які на цей час стали вже класичними. Однак в цих роботах наведено результати великої кількості досліджень врахування сил тертя при коливаннях, при цьому величина сили тертя може приймати два значення: дорівнювати нулю або межовому значенню сили тертя спокою.

В роботі [3] Ю.П. Бусаров запропонував модель сухого тертя із плавною зміною сили тертя від нуля до межового значення, яке відповідає жорсткому ковзанню.

В роботі [4] показано, що для описування гістерезисних характеристик систем із конструктивним гістерезисом, зокрема канатів і каротажних кабелів, математична модель сухого тертя, запропонована Ю.П.Бусаровим, непридатна.

Крім того, при дослідженні коливань велике значення має визначення коефіцієнту поглинання та декременту коливань. В сучасних дослідженнях пружні характеристики визначають, наприклад, методом скінчених елементів, а дисипативними характеристиками часто нехтують. Однак досліди показують, що системи із конструктивним гістерезисом далеко не завжди можуть бути представлені як пружно-в'язке тіло,- такі ж самі за формою віброграми отримаємо при амплітудно-залежному гістерезисному терті, коли в'язке тертя взагалі відсутнє. До того ж виявляється, що дослідження формування вітей гістерезисної петлі впливає на величини коефіцієнту поглинання та декременту коливань; часто їх визначають неправильно.

**Мета статті** полягає у дослідженні пружних та дисипативних характеристик систем із конструктивним гістерезисом при умові лінійної зміни межового значення величини сили тертя.

**Виклад основного матеріалу.** Віти довільного гістерезисного циклу можна зобразити сімействами кривих навантаження ( $\dot{z} > 0$ ) та розвантаження ( $\dot{z} < 0$ ). Перехід з одного рівня жорсткого ковзання  $-T_0$  на інший  $+T_0$  та назад відбувається плавно у межах зони попереднього зміщення  $z_{пз}$  (рис. 1,а). Наявність плавного переходу від пружного ковзання до жорсткого відмічається багатьма авторами.

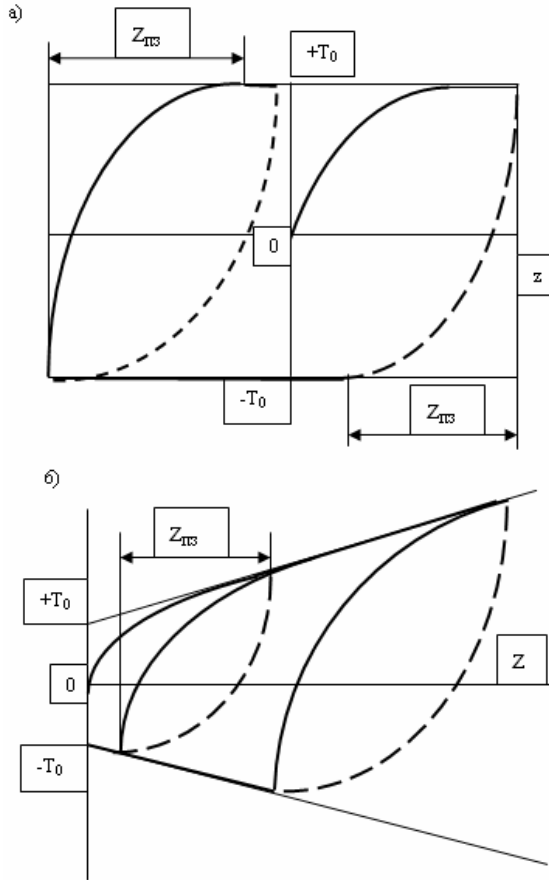


Рисунок 1 – Залежність сили тертя від поперечного зміщення

Залежність сил тертя  $T$  від попереднього зміщення  $z$  добре описується інтегральними функціями

$$\begin{cases} T = T_0 \cdot \{1 - \exp[-b(z - c_1)]\}, \dot{z} > 0; \\ T = -T_0 \cdot \{1 - \exp[b(z - c_2)]\}, \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ці інтегральні функції є рішенням системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dT/dz = b(T_0 - T), \dot{z} > 0; \\ dT/dz = b(T_0 + T), \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут  $c_1$  та  $c_2$  - константи, що враховують переміщення кривої по горизонталі;  $b$  – показник експоненти. Така модель відповідає принципу Релея-Мазінга, необхідною умовою для цього є постійність межового значення сили тертя в процесі навантаження [3].

В загальному випадку опір системи зовнішньому діянню буде визначатись сумарним опором пружного елемента  $S = m \cdot z$  та не пружного елемента  $T_0 + k \cdot z$ , тобто (див. мал. 1, б)  $T = S \pm (T_0 + k \cdot z)$  (де  $m$  – коефіцієнт жорсткості пружного елемента, а  $k$  – коефіцієнт збільшення межового значення сили тертя в залежності від деформації  $z$ ). У такому разі математична модель буде виглядати так:

$$\begin{cases} T = m \cdot z + T_0 \{1 + k \cdot z - \exp[-b(z - c_1)]\}, \dot{z} > 0; \\ T = m \cdot z - T_0 \cdot \{1 + k \cdot z - \exp[b(z - c_2)]\}, \dot{z} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Якщо ввести позначення  $M = m / T_0$ ,  $T / T_0 = \eta$ , віт навантаження  $\eta_n$  та розвантаження  $\eta_p$  будуть представлені у відносних величинах (замість постійних  $c_1$  та  $c_2$  введені характеристики  $a_n$  та  $a_p$ ):

$$\begin{cases} \eta_i = (M + k)z + 1 - a_i \cdot \exp(-\beta z); \\ \eta_o = (M - k)z - 1 + a_o \cdot \exp(\beta z). \end{cases} \quad (4)$$

Значення характеристик  $a_n$  та  $a_p$  можна знайти із умови, що в точках зміни напрямків деформації  $z_n$  та  $z_p$  ординати віт навантаження та розвантаження рівні між собою, тобто  $\eta_n(z_n) = \eta_p(z_n)$  та  $\eta_n(z_p) = \eta_p(z_p)$ . З цієї умови:

$$\begin{cases} a_i = [2(1 + k \cdot z_o) - a'_o \cdot \exp(\beta z_o)] \cdot \exp(\beta z_o); \\ a_o = [2(1 + k \cdot z_i) - a'_i \cdot \exp(-\beta z_i)] \cdot \exp(-\beta z_i). \end{cases} \quad (5)$$

де  $a'_n$  та  $a'_p$  - значення характеристик для віт, попередніх тим, що розглядаються (мал. 2). При навантаженні від точки  $z = 0$   $a_n = 1$ .

Якщо «історія навантаження» конструкції невідома, а деформаційний стан її визначається значенням  $z^*$ , то при відомих параметрах системи

$$\begin{cases} a_i = [kz^* - z^*(k-m)/T_0] \cdot \exp(\beta z^*); \\ a_d = [kz^* + 2 + z^*(k-m)/T_0] \cdot \exp(\beta z^*). \end{cases} \quad (6)$$

Із рис. 2 видно, що завантаження такої конструктивної системи (ряд 1) та її розвантаження (ряд 2) зображується різними вітками внаслідок дисипації енергії в не пружному елементі (амортизаторі). Пружні ж деформації  $S = m \cdot z$  відбуваються для лінійно пружних матеріалів за законом прямої лінії. Якщо розвантаження здійснити не повністю, скажімо до точки б, і знов перейти до навантаження (ряд 3), отримаємо петлю гістерезису. Петля умовно показана замкненою, хоча зрозуміло, що дисипація енергії відбувається при кожному циклі коливань, тому в дійсності для реальної системи замість петлі отримаємо спіраль.

Як бачимо, лінія пружних деформацій перетинає петлю не симетрично; часто за лінію пружних деформацій помилково приймають лінію I-I, що приводить до невірних розрахунків.

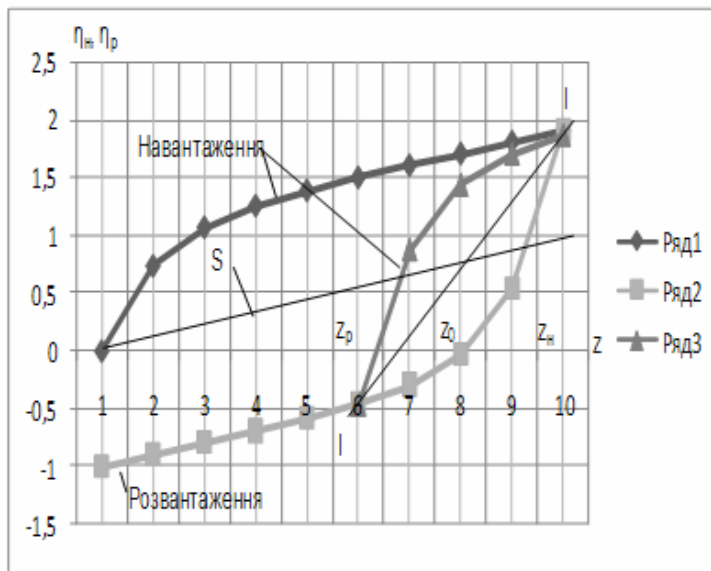


Рисунок 2 – Побудова петлі гістерезису

Інтенсивність затухання коливань визначається коефіцієнтом поглинання  $\Psi$ , величина якого характеризує долю поглинутої енергії за цикл деформації у відношенні до роботи пружних сил. Кількість поглинутої

енергії визначається площею петлі гістерезису. Для віртуальної замкненої петлі можна знайти:

$$\begin{cases} a_{ic} = \exp(\beta z_0) \cdot [(1+k \cdot z_0) / \operatorname{ch}(\beta A) - k \cdot A / \operatorname{sh}(\beta A)]; \\ a_{dc} = \exp(-\beta z_0) \cdot [(1+k \cdot z_0) / \operatorname{ch}(\beta A) + k \cdot A / \operatorname{sh}(\beta A)]; \end{cases} \quad (7)$$

де  $z_0 = (z_n + z_p)/2$ ,  $A = (z_p - z_n)/2$ .

Інтегрування різниці ординат віт замкненої петлі в межах від  $z = z_0 - A$  до  $z = z_0 + A$  дає площу петлі:

$$V = \int_{z_0 - A}^{z_0 + A} (\eta_i - \eta_d) dz = 4(1+k \cdot z_0) [A - \operatorname{th}(\beta A) / \beta]. \quad (8)$$

Інтегрування функції пружних деформацій  $Sdz$  у тих же межах дає значення потенційної енергії пружних деформацій, яка чисельно дорівнює роботі пружних сил за цикл:  $w = 2Mz_0A$ .

Згідно до визначення, коефіцієнт поглинання

$$\psi_0 = V / w = 2(1+k \cdot z_0) [1 - \operatorname{th}(\beta A) / \beta A] / Mz_0. \quad (9)$$

Для систем із постійним значенням межового не пружного опору у наведених формулах слід прийняти  $k = 0$ .

В тріботехніці, скільки нам відомо, не розглядають випадки лінійно залежного від деформації межового значення  $T_0$ , тобто приймають  $T = S \pm T_0$ . Петля у цьому випадку має форму паралелограма, площа петлі  $V^* = 4 A m/M$ . При цьому легко знайти коефіцієнт поглинання:

$$\psi_0^* = V^* / w = 2m / M^2 z_0. \quad (10)$$

Легко визначити величину похибки  $\gamma$ :

$$\gamma = (\psi_0 - \psi_0^*) / \psi_0 = 1 - T_0 / ((1+mz_0) [1 - \operatorname{th}(\beta A) / \beta A]). \quad (11)$$

Аналіз дає: при  $z_0 \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma^* = 1 - T_0 / [1 - \operatorname{th}(\beta A) / \beta A]$ ; при  $z_0 \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ . Таким чином, значення коефіцієнту поглинання і декременту коливань можуть переоцінюватись майже у два рази у бік збільшення. Свого часу при дослідженні Кольської надглибокої свердловини на глибині майже 13 км амплітуда коливань кінця каротажного кабеля із приладом перевищила 100 м, тоді як за попередніми розрахунками вона мала бути суттєво меншою.

Наведені дані можуть бути використані при проектуванні різних систем із конструктивним гістерезисом, наприклад, підвіски автомобіля, поліспаств монтажних кранів, шахтного підйому та ін.

Ще більш цікаві результати можна отримати при двовісному навантаженні, наприклад, розтягуванні та згині, але це вже тема для іншого дослідження.

### **Висновки.**

Легко бачити, що коефіцієнт поглинання (9) залежить:

від амплітуди коливань  $A$ ;

від швидкості зростання не пружного опору (параметр  $\beta$ );

від співвідношення жорсткості пружного елемента і межового не пружного опору (параметр  $M$ );

від величини попередньої деформації пружного елемента  $z_0$ .

Величина  $\Psi_0$  швидко зменшується в області малих амплітуд  $A$ . Ось чому затухання відбувається більш інтенсивно при більших зовнішніх діях на систему. Згадайте: інтенсивність звуку струни музичного інструменту швидко зменшується, після чого із низькою інтенсивністю струна довго звучить. Аналіз показує, що при  $z_0 \rightarrow 0$ ,  $\Psi_0 \rightarrow 0$ , а при  $z_0 \rightarrow \infty$ ,  $\Psi_0 \rightarrow 2k/M$ .

Зауважимо також що назва «логарифмічний декремент затухання», що традиційно вживається в літературі, - неправильна, тому що декремент затухання  $\delta$  (декремент коливань) це і є натуральний логарифм відношення двох сусідніх амплітуд в один і той же бік. При наявності сухого тертя  $\Psi_0 = 2\delta$ .

Таким чином, силові характеристики пружного ( $k$ ,  $S_{max}$ ) та дисипаційного ( $\beta$ ,  $T_0$ ) елементів конструкції слід визначати окремо. При експериментальному визначенні характеристик у стані агрегату слід скористатися методикою обробки експериментальних даних, наведеною в [4].

**Список літератури:** 1. *Пановко Я.Г.* Внутренне трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960, 380 с. 2. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев, «Наукова думка», 1970, 239 с. 3. *Бусаров Ю.П., Островский М.С.* Математическая модель гистерезиса внешнего трения. Машиностроение, 1976, № 5, с. 51 – 82. 4. *Беспалов В.Н., Ковальский Б.С., Смоляков С.Л., Карпунин Ю.И.* Гистерезис при статическом растяжении каротажных канатов. – Механика технологического оборудования. Ч.1. Методическое пособие. Под редакцией В.А.Прокопова, МО СССР, 1989, с. 57 – 72.

*Поступила в редколлегию 30.09.10*