УДК 539.3

М. А. ЧУБАНЬ

АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

При оптимизации машиностроительных конструкций возникает задача нахождения функции отклика, устанавливающей связь между диагностическими показателями (напряжения и перемещения, деформация, масса и т. д.) и конструктивными характеристиками, которая обычно решается методом аппроксимации. Рассмотрен метод кусочно-полиномиальной аппроксимации с использованием базисных функций Эрмита. Оценена погрешность метода. Описан и продемонстрирован использующий данный метод подход к построению моделей поверхности отклика в оптимизационных исследованиях объектов машиностроения.

Ключевые слова: аппроксимация, кубические функции Эрмита, поверхность отклика, метод конечных элементов, метод конечных разностей, машиностроительная конструкция, синтез.

Введение. Известно, что если бы можно было легко построить графическое представление поверхности отклика, процесс оптимизации был бы гораздо проще. В некоторых случаях природа взаимосвязи переменной отклика y и управляющей переменной x действительно может быть точно известна, например, базироваться на инженерных, химических или физических принципах. Тогда можно записать модель формы $y = g(x_1, x_2, .., x_k) + \varepsilon$, где ε представляет "ошибку" в системе. Этот тип взаимосвязи часто называется механистической моделью. Но, к сожалению, на практике, например, в интересующем нас случае оптимизации машиностроительных конструкций, этот принцип непонятен, и исследователь должен аппроксимировать неизвестную функцию g с применением подходящей эмпирической модели вида $y = f(x_1, x_2, .., x_k) + \varepsilon$ – модели поверхности отклика [1].

Аппроксимировать функцию отклика можно глобальными функциями или же локальными.

Первый вид аппроксимации может быть выполнен с помощью усеченного ряда Тейлора. При этом принимают во внимание кривизну функции отклика на интересуемой области пространства независимых переменных. Полученная таким образом аппроксимирующая функция является гладкой, но менее точной, чем полученная в результате аппроксимации локальными функциями.

Что касается второго способа получения аппроксимирующей функции, он состоит в разбиении интересуемых интервалов независимых переменных на некоторое число неперекрывающихся подынтервалов и полиномиальной интерполяции по значениям функции в граничных точках подынтервалов [2]. Этот способ будет детально рассмотрен в рамках данной статьи на примере аппроксимации специальными локальными функциями.

Метод решения. В качестве базисных функций предлагается выбрать эрмитовы кубические функции, рис. 1 [3]. Эти функции имеют нули второго порядка на концах. Они интерполируют значения функции и ее производной:

$$\psi(x) = (|x| - 1)^2 (2|x| + 1); \;\; \omega(x) = x(|x| - 1)^2. \qquad (1)$$

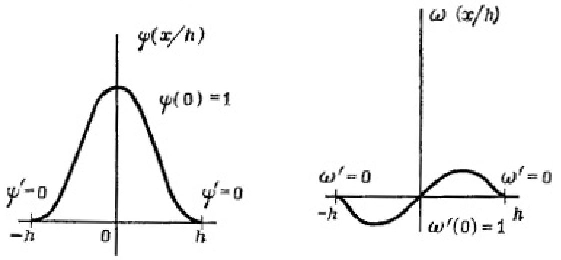

Рис. 1 – Эрмитовы кубические функции

В каждой точке $x = ih$ находится двойной узел, и кубический элемент определяется по его собственным значениям и по значениям его первых производных в обоих концах.

Таким образом, кубический полином на отрезке [0, h] имеет вид:

$$v^h(x) = v_0 \psi\left(\frac{x}{h}\right) + h v'_0 \omega\left(\frac{x}{h}\right) + v_1 \psi\left(\frac{x-h}{h}\right) + + h v'_1 \omega\left(\frac{x-h}{h}\right). \qquad (2)$$

Исходя из этого, было составлено выражение для аппроксимации функции с двумя независимыми переменными x, y:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{nx} \sum_{r=1}^{ny} f_{k,r} \cdot P1_{k,r} + \sum_{k=1}^{nx} \sum_{r=1}^{ny} \frac{df_{k,r}}{dx} \times \times P3_{k,r} \cdot h_x + \sum_{k=1}^{nx} \sum_{r=1}^{ny} \frac{df_{k,r}}{dy} \cdot P2_{k,r} \cdot h_y + + \sum_{k=1}^{nx} \sum_{r=1}^{ny} \frac{\partial f_{k,r}}{\partial x \partial y} \cdot P4_{k,r} \cdot h_x \cdot h_y, \qquad (3)$$

где $P1_{k,r} = \psi(x)_k \cdot \psi(y)_r; P2_{k,r} = \psi(x)_k \cdot \omega(y)_r;$

$P3_{k,r} = \omega(x)_k \cdot \psi(y)_r; P1_{k,r} = \omega(x)_k \cdot \omega(y)_r,$

см. рис. 2;

h_x, h_y – шаг по осям *Ox* и *Oy* соответственно;

nx, *ny* – количество узловых точек для переменных x, y соответственно.

Вообще, число переменных функций отклика теоретически может быть любым. Но на практике обычно рассматривают от одной до четырех переменных, а чаще всего – две-три, что дает возможность представить результаты наглядно. В случае же, когда необходимо рассмотреть более четырех варьируемых параметров, число переменных функции отклика все равно сводят к количеству от одного до четырех, выбирая наиболее важные из параметров. После анализа этой группы переменных переходят к другой и т. д. Причем, взаимосвязанные переменные следует рассматривать в одной группе.

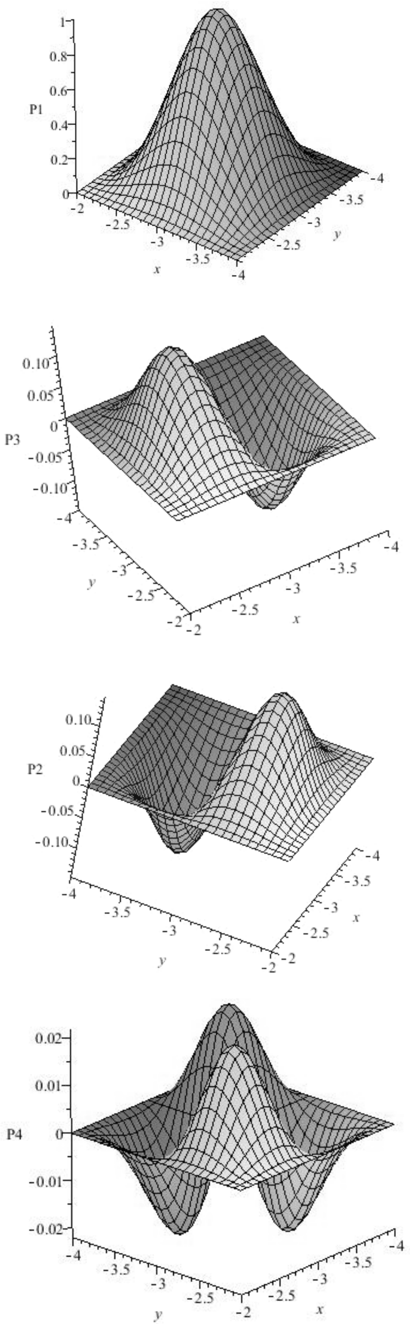

Рис. 2 – Функции, служащие для аппроксимации

Представление (3) было апробировано на ряде функций и продемонстрировало хорошее соответствие. В частности, с использованием данного представления была получена аппроксимация некоторой функции $f = x^4 + x^3 + y^2$. На рис. 3 изображены сама функция и ее аппроксимация (темным цветом) в одной системе координат.

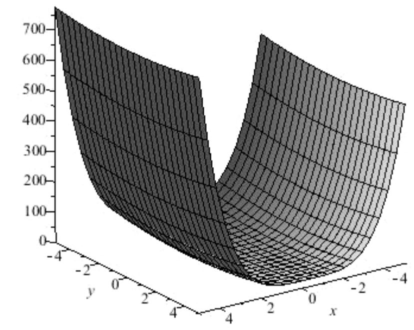

Рис. 3 – Функция и ее аппроксимация в одной системе координат

Также для оценки погрешности была выведена разница между аппроксимированной (заданной) и аппроксимирующей функциями, рис. 4. Из данного графика видно, что погрешность при аппроксимации составила 0,0075%.

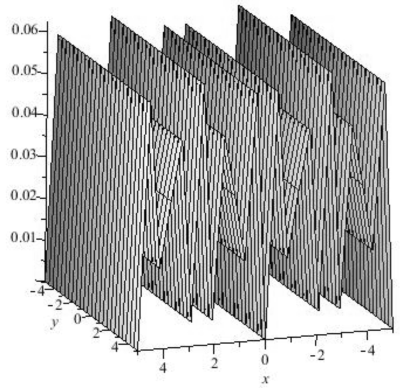

Рис. 4 – Разница между аппроксимированной и аппроксимирующей функциями

Представление (3) также хорошо работает, если функция содержит взаимодействие параметров, например для функции $f = x^4 \cdot y^4$, рис. 5. Погрешность аппроксимации при этом составляет 0,0125%, рис. 6.

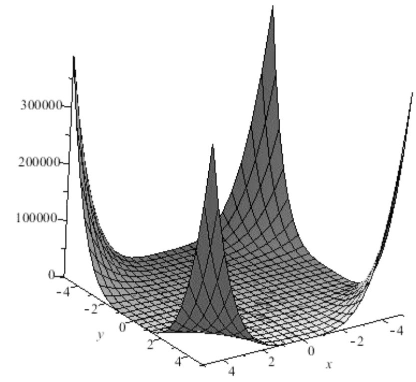

Рис. 5 – Функция и ее аппроксимация

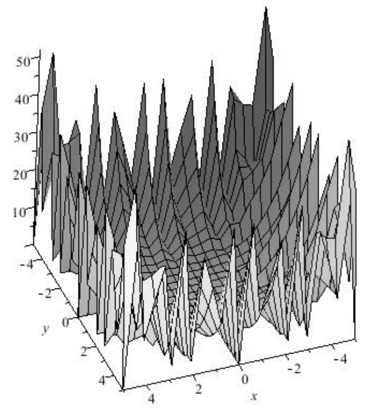

Рис. 6 – Отклонение аппроксимирующей функции

Применение предложенного подхода. Далее на основе описанного подхода была построена модель поверхности отклика в ходе решения задачи структурной оптимизации железнодорожной цистерны [4]. В данном случае управляющими переменными стали толщины обечайки x и днищ y, а зависимыми – напряжения и масса конструкции.

Сначала при помощи метода конечных элементов (МКЭ) были получены так называемые «реперные» решения для задачи анализа напряжений от действия гидростатической нагрузки, учитывающей заполненность цистерны, и массы цистерны при варьировании отмеченных параметров x и y [5, 6]. Заданные кинематические граничные условия – закрепления от всех перемещений и поворотов в области расчетной модели, соответствующей опиранию, рис. 7.

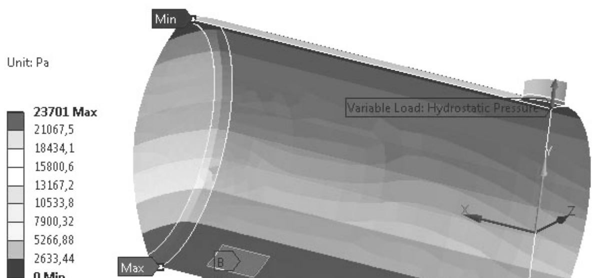

Рис. 7 – Расчетная модель цистерны

Интервалы переменных x и y были разбиты на 7 подынтервалов (nx=ny=8). Соответственно, потребовалось найти 64 решения. Далее по этим данным были построены непосредственно аппроксимации поверхностей отклика.

Следует отметить, что, так как функции отклика изначально не известны, для нахождения производных в узловых точках был применен метод конечных разностей (МКР) [7, 8]. При этом чтобы найти производные во всех узловых точках были введены промежуточные узлы. В результате количество необходимых «реперных» решений задачи возросло на $nx \times ny + (nx + ny)$.

МКР – численный метод, поэтому вносит в результаты дополнительную погрешность, которая также была оценена.

Так, на рис. 8 представлена разница аппроксимирующей функции при вычислении производной явно заданной функции $f = x^4 \cdot y^4$ и ее аппроксимации с использованием для вычисления производной метода конечных разностей. Таким образом, определено, что использование метода конечных разностей при аппроксимации дополнительно вносит в модель поверхности отклика погрешность 0,0625%.

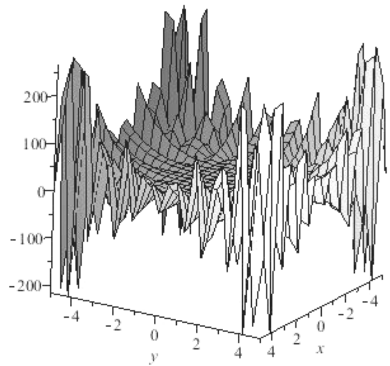

Рис. 8 – Оценка погрешности, вносимой методом конечных разностей

Итого, погрешность аппроксимации составляет 0,075%.

Поверхности отклика напряжений в железнодорожной цистерне и ее массы представлены на рис. 9, 10.

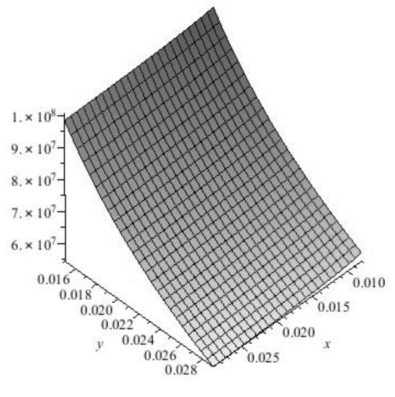

Рис. 9 – Модель поверхности отклика напряжений

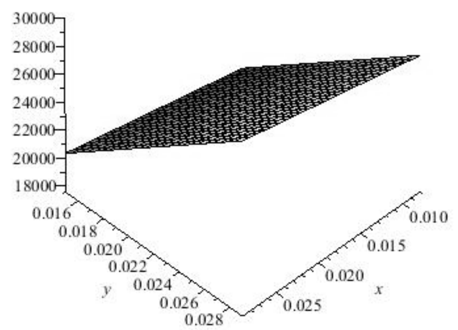

Рис. 10 – Модель поверхности отклика массы

Данный подход к построению поверхности отклика был оформлен в виде программного модуля. В качестве исходных данных он требует ввода количества узловых точек для управляющих переменных (данный программный модуль работает для двух переменных) в зависимости от желаемой точности аппроксимации и текстовые файлы с «реперными» решениями в них.

Далее с целью решения задачи структурной оптимизации задействуются методы оптимизации и математическое программирование [9]. В зависимости от вида модели поверхности отклика, которая на данном этапе считается целевой функцией, и ограничений в виде равенств и неравенств, применяют методы линейного, целочисленного, выпуклого, нелинейного программирования или программирования с наличием неопределенности.

В частности, полученные нами функции отклика по напряжениям и массе – нелинейные и требуют применения методов нелинейного программирования [10]. Решение задачи оптимизации является направлением дальнейших исследований и будет освещено в дальнейших публикациях.

Выводы. Таким образом, в статье предложен подход к построению модели поверхности отклика методом кусочно-полиномиальной аппроксимации с использованием в качестве базисных эрмитовы кубические функции. Проведенные исследования показали, что погрешность такой аппроксимации составляет около 0,075%, что позволяет сделать вывод о применимости получаемых на основе предложенного подхода моделей поверхности отклика в процессе оптимизации машиностроительных конструкций.

Список литературы: **1.** *Myers R.* Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. - 3rd ed. / R. Myers, D. Montgomery, C. Anderson-Cook. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2009. – 1247 p. **2.** *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. - 216 с. **3.** *Стренг Г., Фікс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. – 351 с. **4.** *Christensen P.* An Introduction to Structural Optimization / P. Christensen, A. Klarbring. – New York: Springer Science + Business Media B.V. – 2009. – 211 p. **5.** *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542. **6.** ЛитвиненкоА. *В., Шейченко Р. И., Граборов Р. В., Бондаренко М. А.*/ Метод линеаризации поверхности отклика в задаче обоснования проектных параметров тонкостенных элементов машиностроительных конструкций. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Проблеми механічного приводу. – 2014.– №31(1074). – С. 88-98. **7.** *Самарский А. А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 592 с. **8.** *Ильин В. П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345 с. **9.** *Шуп Т*, Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.— 238 с. **10.** *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. – М.: Мир, 1975.— 536 с.

Bibliography (transliterated): **1**. Myers R. Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. - 3rd ed. / R. Myers, D. Montgomery, C. Anderson-Cook. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2009. – 1247 p. **2.** Mitchell E., Ueyt R. Metod konechnyih elementov dlya uravneniy s chastnyimi proizvodnyimi. Moscow: Mir, 1981. - 216 p. **3.** Streng G., FIks Dzh. Teoriya metoda konechnyih elementov. Moscow: Mir, 1977. – 351 p. **4.** Christensen P. An Introduction to Structural Optimization / P. Christensen, A. Klarbring. – New York: Springer Science Business Media B.V. – 2009. – 211 p. **5.** Zenkevich O. Metod konechnyih elementov v tehnike / O. Zenkevich. – Moscow: Mir, 1975. – 542. **6.** LitvinenkoA. V., Sheychenko R. I., Graborov R. V., Bondarenko M. A./ Metod linearizatsii poverhnosti otklika v zadache obosnovaniya proektnyih parametrov tonkostennyih elementov mashinostroitelnyih konstruktsiy. // Visnik NTU «KhPI». SerIya: Problemi mehanIchnogo privodu. – 2014.– No31(1074). – P. 88-98. **7.** Samarskiy A. A., Nikolaev E.S. Metodyi resheniya setochnyih uravneniy. — Moscow: Nauka, 1978. — 592 p. **8.** Ilin V. P. Metodyi konechnyih raznostey i konechnyih ob'emov dlya ellipticheskih uravneniy. – Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 2000. – 345 p. **9.** Shup T, Reshenie inzhenernyih zadach na EVM: Prakticheskoe rukovodstvo. Per. s angl. – Moscow: Mir, 1982.— 238 p. **10.** Himmelblau D. Prikladnoe nelineynoe programmirovanie. Per. s angl. – Moscow: Mir, 1975.— 536 p.

Поступила (received) 1.08.2015

Відомості про автора/ Сведения об авторе / About the Author

Чубань Марина Александровна – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант каф. Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: s803@tmm-sapr.org.

Chuban Maryna Oleksandrivna – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", postgraduate student at the Department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines"; phone: (057) 707-69-01; e-mail: s803@tmm-sapr.org.