

УДК 539.3

Н. Н. ТКАЧУК, Н. Б. СКРИПЧЕНКО, Н. А. ТКАЧУК, К. Д. НЕДЕЛЬКО**ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ШЕРОХОВАТОГО СЛОЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ В СОПРЯЖЕНИИ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ**

Статья содержит результаты численного исследования контактных давлений между сложнопрофильными телами, которые задаются поверхностями сложной формы, не имеющих в общем случае простого аналитического описания. Учитывается влияние податливости винклера слоя, который моделирует шероховатость контактирующей поверхности. Определено влияние податливости этого слоя и распределения зазора между телами на распределение контактных давлений. Для определения контактных давлений используется метод граничных интегральных уравнений. Для дискретизации применяются соотношения метода граничных элементов. В ходе численного эксперимента исследовано влияние распределения зазора между контактирующими телами на распределение контактного давления. При этом также варьируется податливость упругого слоя, имитирующего жесткостные свойства шероховатости поверхностей контактирующих тел. Получены характерные распределения контактных давлений, а также зависимость максимальных контактных давлений от варьируемых параметров.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод граничных интегральных уравнений, Винклерово основание, сложнопрофильное тело, контактное давление.

Введение. В работах [1, 2] для анализа распределения контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных тел, свойства податливости которых в нормальном направлении к поверхности контакта можно аппроксимировать свойствами полупространств, предложено использовать метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Там же представлены основные соотношения, полученные при дискретизации уравнений и неравенств МГИУ с привлечением подхода метода граничных элементов (МГЭ).

Следуя работам [1, 2], для контактирующих тел (рис. 1) можно записать для случая статического упругого контакта следующую систему соотношений:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (1)$$

Далее, используя известное интегральное соотношение, связывающее давления p_i и перемещения u_i , а также учитывая очевидное равенство $p_1(\xi, \eta) = p_2(\xi, \eta)$, получаем:

$$\begin{aligned} u = u_{z_1} + u_{z_2} &= \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\nu_i, E_i, i = 1, 2$ – коэффициенты Пуассона и модули упругости материала каждого из контактирующих тел, $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Контактная площадка S и распределение давлений $p(\xi, \eta)$, присутствующие в правой части равенства, как указывается в [1, 2], являются неизвестными и искомыми.

В работах [1, 2] для дискретизации искомого контактного давления p использовано кусочно-линейное представление его распределения, которому отвечают

непрерывные и гладкие поверхностные смещения, характерные для контакта сложнопрофильных тел. Искомая функция контактных давлений приближается суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которых расположены в узлах регулярной сетки с шагом c , состоящей из равносторонних треугольников, и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давлений p_n (см. рис.1).

Подставляя данное представление p_n в соотношения (2) и удовлетворяя системе (1) в узловых точках построенной сетки граничных элементов, получим [1, 2]:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{вне контакта,} \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение;

$h_n = h(x_n, y_n)$ – узловое значения первоначального зазора,

C_{nm} – коэффициенты влияния, определяющие перемещение в узле m сетки при действии локального линейно распределенного давления со значением $p_n = 1$ в узле n и $p_\psi = 0$, где ψ – номера множества узлов, сопредельных узлу m (см. рис. 1).

Справедливы условия неотрицательности давлений внутри области контакта и обнуление таковых вне этой области:

$$\begin{cases} p_m \geq 0, m = 1, \dots, N, \text{ узел } J_m - \text{в контакте;} \\ p_m = 0, J_m - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (4)$$

Кроме того, справедливо интегральное равенство силы P прижатия совокупному воздействию единичных распределений контактных давлений:

$$\sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \quad (5)$$

Система соотношений (3-5) составляет основу для

отыскания гранично-элементной аппроксимации искомого давления p и области контактирования S гладких упругих тел. Единственным ограничением здесь является близость направлений нормалей (с плавным их поворотом при обходе поверхности) контактирующих поверхностей S_1, S_2 тел 1 и 2, а также значительное превышение размерами последних характерных размеров площадки S .

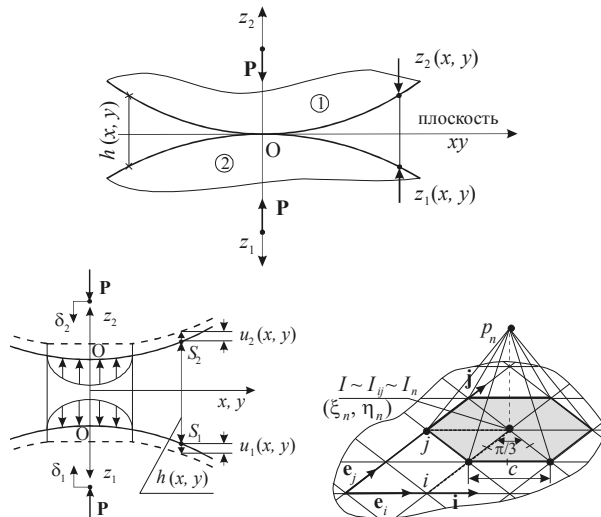


Рис. 1 – Начальное расположение контактирующих (соприкасающихся при усилии $\mathbf{P} = 0$) тел, актуальное их состояние (разнесенный вид поверхностей S_1, S_2) и вид базисных функций для аппроксимации контактного давления

В работах [1, 2] предложено также расширение соотношений (3-5) на случай шероховатого упругого тела (рис.2).

При этом между перемещениями точек u_z^Σ поверхности S' , участвующих в описании условий контактного взаимодействия, перемещениями гладкого тела u'_z и шероховатого слоя u_z^\wedge существует зависимость

$$u_z^\Sigma = u'_z + u_z^\wedge \quad (6)$$

В качестве модели этого слоя использовано основание Винклера [3, 4]:

$$u_z^\wedge = \lambda p, \quad (7)$$

где λ – податливость слоя (или слоев), зависящая от свойств материала и качества обработки материала поверхностного слоя исследуемого тела. Например, по данным работы [3], для отдельных групп и форм деталей машин податливость λ изменяется в пределах $10 \div 35 \cdot 10^{-12}$ м/Па.

В результате такого представления соотношения (3-5) также и для контакта шероховатых тел сохраняют свою структуру, однако в качестве коэффициентов матрицы влияния выступают величины

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}. \quad (8)$$

Другими словами, вместо матрицы влияния C появляется матрица

$$C^\Sigma = C + \lambda E \quad (9)$$

где E – единичная матрица.

Т.о., в работах [1, 2] на единой основе предложены подходы, модели и разрешающие соотношения для анализа распределения контактных давлений в сопряжении сложнопрофильных гладких и шероховатых тел.

Преимуществами данной методологии перед известными аналитическими и численными методами [5-9], в частности, перед методом конечных элементов и моделью Герца, является широкий спектр решаемых задач и высокая оперативность расчетов при сохранении приемлемой точности результатов. По сравнению же с пакетом CONTACT [10] предложенный подход имеет то преимущество, что предоставляет возможность естественным образом перейти к физически нелинейным моделям упругого слоя, имитирующего шероховатость.

Имея в распоряжении предложенный в статьях [1, 2] инструмент расчетного моделирования, можно ставить и решать различные прикладные задачи для реальных машиностроительных конструкций: подшипников; зубчатых колес; элементов штампов и пресс-форм; опорных поверхностей механизмов перекачивания; систем «ударник-преграда», «каток-основание», «колесо-рельс» и т.п. В то же время представляет первичный интерес анализ влияния отдельных факторов на характер распределения контактных давлений и размеры контактных площадок. Поскольку созданный и описанный ранее [1, 2] инструмент анализа оперирует с численными моделями, то для установления указанных влияний требуется проведение серии численных расчетов. Это является целью данной работы.



Рис. 2 – Модель шероховатого сложнопрофильного упругого тела с линейным упругим слоем

Постановка задачи. С использованием предложенной ранее [1, 2] математической модели в среде MatLab [11] был создан программный модуль «SBEM», реализующий итерационную процедуру поиска контактных площадок и контактного давления p на треугольной сетке, расположенной на плоскости, касательной к поверхностям контактирующих тел 1 и 2 в начальный момент их соприкосновения (см. рис. 1). При этом варьируемыми входными данными являются: усилие P ; свойства материалов E, ν ; форма поверхностей (z_1, z_2) , диктующая в итоге распределение зазора h ; податливость винклера слоя λ .

В данной статье ставится задача определения

влияния вида распределения зазора h и податливости винклера слоя λ на контактные площадки S и давления p .

В частности, распределение зазора представляется в следующих частных видах:

$$h = U \cdot \left(\frac{|x|}{a}\right)^K + V \cdot \left(\frac{|y|}{b}\right)^L \quad \text{или} \quad h = U \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{K/2}}{a^K}, \quad (10)$$

где $[a \times b]$ – размеры задаваемой фиксированной площадки, заведомо покрывающей S при заданных P, E, v ;

U, V – размеры подъема поверхности $h(x, y)$ в координатных сечениях x и y соответственно;

K, L – показатели степени ($K > 1, L > 1$), определяющие крутизну (плавность) сечений распределений $h(x, y)$ координатными плоскостями $y = \text{const}, x = \text{const}$ соответственно.

В (10) второе из выражений соответствует осесимметричному распределению зазора между контактирующими телами, т.е. зависящему от расстояния до центральной точки $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина r определяет радиус-вектор точки в плоскости, касательной к соприкасающимся (при $P = 0$) телам.

Следует заметить, что в данном случае множество «пробных» распределений h расширено по сравнению с традиционными подходами (например, в модели Герца $K = L = 2$, в теории Штаермана [5, 12, 13] $K = L = 4, \dots$ и т.д. [5, 8, 9]). Это связано с тем, что разрешающая система соотношений (1-9) оперирует со значениями только самой функции в узловых точках сгенерированной на поверхности S треугольной сетки. Следуя логике подхода [1, 2], от функции $h(x, y)$ требуется только непрерывность, что используемым представлением (см. рис. 1 и соотношения (2)) обеспечивается. Более того, K и L могут принимать и нецелые значения.

Зафиксировав величины U и V , закон распределения h можно варьировать путем изменения a, b, K и L . Далее, учитывая изотропность свойств в направлениях x и y , можно зафиксировать, например, величину a , а варьировать b путем изменения некоторого коэффициента χ :

$$b = \chi \cdot a, \quad \chi \in]0; \infty[. \quad (11)$$

При этом, представив χ через другой параметр φ в виде

$$\chi = \text{tg} \varphi, \quad \varphi \in]0; \pi/2[, \quad (12)$$

можно получить ограниченную область варьирования параметра (в данном случае – уже φ).

Аналогично представляя K и L в виде:

$$K = 1 + \text{tg} \alpha, \quad L = 1 + \text{tg} \beta, \quad (13)$$

получаем область варьирования параметров α и β – $]0; \pi/2[$.

В итоге получаем область варьирования в

пространстве 3-х параметров α, β, φ – в виде открытого куба со стороной $\pi/2$. В этом параметрическом множестве содержится все многообразие решений задачи (1-9). Отсюда – частная задача 1: определить зависимости

$$S = S(\alpha, \beta, \varphi); \quad p(x, y) = p(x, y, \alpha, \beta, \varphi). \quad (14)$$

Частными характеристиками (14) могут выступать величины

$$\tau = \tau(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{\bar{S}(\alpha, \beta, \varphi)}{\bar{S}(\pi/4; \pi/4; \pi/4)}; \quad (15)$$

$$q = q(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{p_{\max}(x, y, \alpha, \beta, \varphi)}{p(0; 0; \pi/4; \pi/4; \pi/4)}.$$

Здесь \bar{S} – площадь S , p_{\max} – максимальные значения p в пределах S , а выражения в знаменателях соответствуют контакту параболоидов вращения (осесимметричная задача Герца).

Другим направлением исследований является определение влияния податливости λ на распределение контактных давлений. Для этого в соотношениях (8) при $m=n$ полагается

$$C_{mn}^{\lambda} = \theta \cdot C_{mn} \Rightarrow C_{mn}^{\Sigma} = C_{mn}(1 + \theta) = C_{mn}(1 + \text{tg} \gamma), \quad (16)$$

$$\chi = C_{mn} \text{tg} \gamma; \quad \gamma \in [0; \pi/2[.$$

С учетом этого частная задача 2 трансформируется к определению зависимостей типа (14, 15), но уже и от параметра γ (или при фиксированных α, β, φ – только от γ).

Для унификации получаемых зависимостей «характеристики распределения давлений – свойства контактирующих тел» можно ввести в рассмотрение параметры

$$\tilde{\tau} = \arctg \tau, \quad \tilde{q} = \arctg q. \quad (17)$$

При этом получаемые характеристики, $\tilde{\tau}$ и \tilde{q} , равно как и варьруемые параметры $\alpha, \beta, \varphi, \gamma$, будут изменяться в пределах $[0; \pi/2[$. Однако возможно представление результатов и в исходных параметрах.

Численная модель. Решение поставленных частных задач 1 и 2 осуществлялось при следующих параметрах: $E_{1,2} = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{1,2} = 0.3$, $P = 10^3$ Н, $c = 2$ м, $a = 2$ м. Для случая $a = b, K = L = 2$ (параболоид вращения $\alpha = \beta = \gamma = \pi/4$), полученные распределения p и значение S отличаются, как показало решение тестовых задач, от полученных по модели Герца незначительно (в пределах 1% при сетке с количеством узлов $10 \div 12$ вдоль осей пятна контакта). Т.о., получена исходная оценка погрешности численного моделирования. Далее эта модель была использована для последующих многовариантных расчетов.

Учитывая большое количество получаемых данных, проиллюстрированы только некоторые результаты исследований.

Результаты решения осесимметричной задачи. Исследуется контакт двух тел вращения, зазор между

которыми представляет собой степенную функцию радиус-вектора r (см. (10)) с показателем степени K . Моделирование влияния упругих свойств слоя, имитирующего шероховатость, осуществлено путем варьирования параметра θ (или γ) – см. (16).

Полученные характерные распределения контактных давлений представлены на рис. 3. Видно, что случай, соответствующий задаче Герца ($K = 2, \alpha = \pi/4$), является в некотором смысле разделителем для

получаемых картин распределений.

Для $K < 2$ получаемые распределения контактных давлений имеют единственный максимум в центральной точке, причем тем более резко выраженный, чем ближе K к единице. При этом, чем выше податливость промежуточного упругого слоя, тем меньше максимум в центре и тем менее резко он выражен по сравнению со случаем $\lambda = 0$.

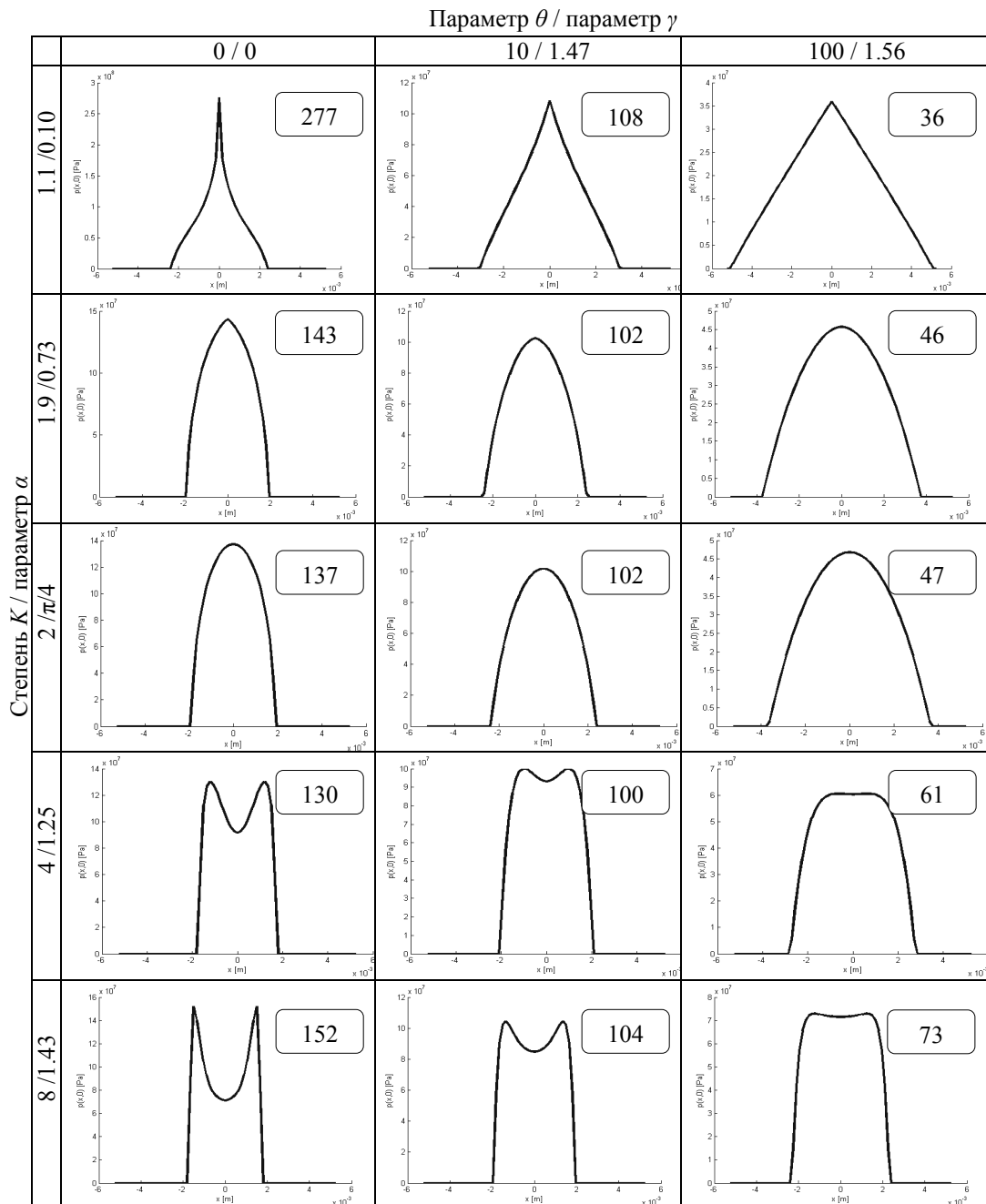


Рис. 3. –Влияние распределения зазоров в сопряжении тел вращения и податливости упругого слоя, имитирующего шероховатость, на характер распределения контактных давлений p , МПа

Для $K > 2$ наблюдается, как правило, локальный минимум в центральной точке зоны контакта, а на некотором удалении от нее достигается глобальный максимум. Значение этого максимума в тем большей степени превышает значение локального минимума,

чем больше величина K . При этом возрастание податливости промежуточного упругого слоя выравнивает распределение контактного давления в центральной части области контакта, снижая разницу между максимальным его значением и значением в

точке локального минимума

Для всех видов распределения зазоров тенденция изменения картин распределения контактного давления при доминировании податливости промежуточного слоя (по сравнению с податливостью гладких тел) одинакова: они повторяют в пределах области контакта распределение первоначальных зазоров, перевернутое и приподнятое на некоторую высоту. Данная высота определяется величиной усилия прижатия контактирующих тел. В то же время следует заметить, что для $K > 2$ при любом конечном λ все равно (в отличие от «перевернутого» распределения зазора) в зоне центральной точки наблюдается локальный минимум контактного давления, хотя и слабо выраженный.

Обработка полученных распределений контактных давлений дает возможность построить зависимость относительной величины максимального контактного давления от параметров K (или α) и θ (или γ). На рис. 4 представлены данные зависимости в различных ракурсах и проекциях.

Представленные зависимости дают исходные данные для первоначального представления о реализуемых тенденциях. Так, при невысоких значениях податливости (в данном случае – θ не выше 20) зависимость $q(K)$ имеет тенденции к росту при $K \rightarrow 1$ (сверху) и при $K \rightarrow \infty$. Минимум q наблюдается в интервале $2 < K < 4$. С другой стороны, при очень больших податливостях $q(K)$ является монотонно возрастающей функцией.

Т.о., существует некоторая область значений податливости упругого слоя, в пределах которой степень K слабо сказывается на величине q .

Полученные результаты могут иллюстрировать возможности анализа зависимости контактных давлений от варьируемых параметров. При этом важно отметить, что здесь речь идет о конкретном примере при заданных неварьируемых многих параметрах (усилие прижатия, модуль упругости и т.п.). Для более широкого множества варьируемых параметров необходимы дополнительные исследования, однако даже на представленном наборе результатов возможности инструмента численных исследований продемонстрированы в полной мере.

Результаты решения частных задач при отдельных видах распределения зазоров. На рис. 5 представлены некоторые характерные распределения давлений, соответствующие различным показателям степеней K и L в распределении первоначального зазора между телами (см. (10)) и параметру податливости θ (см. (16)).

Представленные распределения контактных давлений характеризуются значительным разнообразием, что резко отличает эти картины от традиционных, подобных герцевским распределений. При этом в центральной точке могут наблюдаться и глобальные максимумы, и локальные минимумы, и седловые точки (в зависимости от сочетаний различных параметров). Максимумы же контактных давлений могут достигаться в одной, двух или четырех точках.

Представленные данные не могут служить основой для построения более-менее определенных количественных зависимостей контактных давлений от варьируемых параметров в силу их ограниченного объема. Однако следует заметить, что общие качественные особенности проявляются достаточно четко, равно как и подтверждаются широкие потенциальные возможности созданного инструмента численного моделирования.

1. В развитие и в реализацию предложенных ранее [1, 2] подходов, моделей и разрешающих соотношений разработан инструмент численного анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных гладких и шероховатых тел, который дает возможность решать поставленные задачи отыскания распределения контактного давления и контактных площадок с высокой точностью для широкого множества вариантов формы сопрягаемых поверхностей контактирующих деталей машиностроительных конструкций.

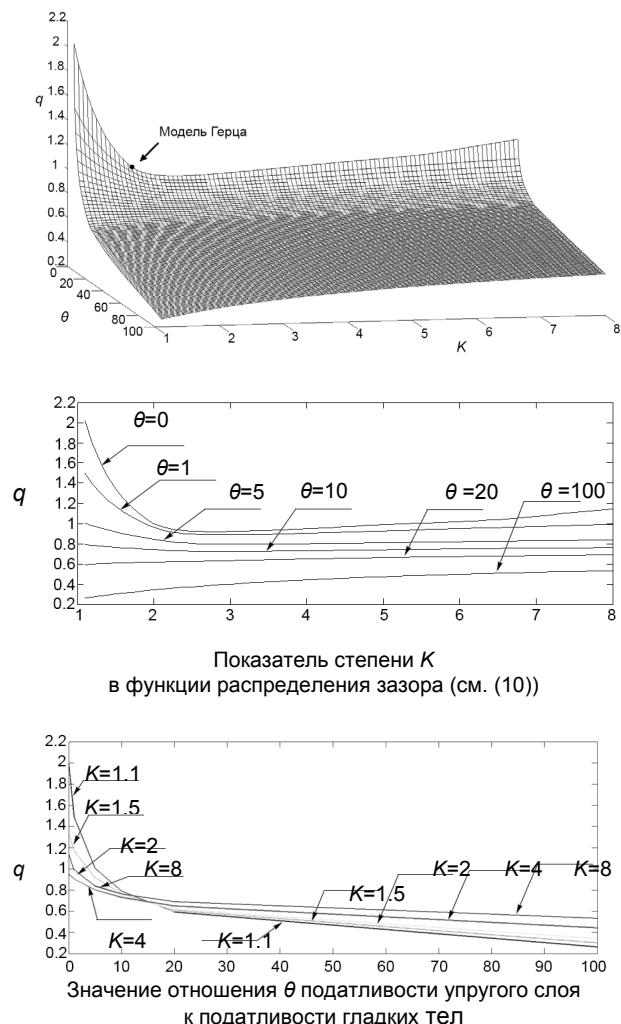
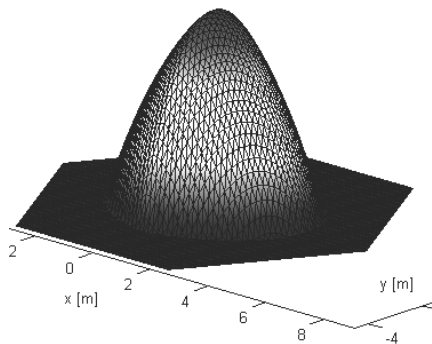


Рис. 4 – Зависимость максимальных контактных давлений p_{max} отнесенных к таковым для задачи Герца ($\theta=0$, $K=2$), (т.е. параметра q , см. (15)) от параметров K и θ

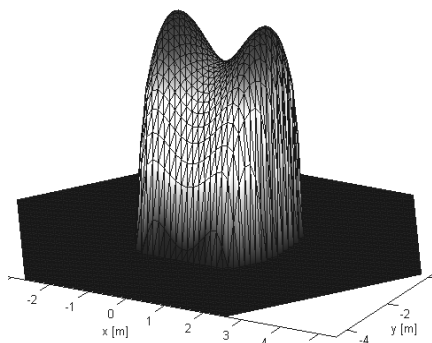
2. С целью установления влияния формы поверхностей тел в контакте и диктуемого ими распределения зазора $h(x,y)$ в сопряжении сложнопрофильных тел, а также податливости λ

винклера слоя, моделирующего упругие свойства, которые порождаются наличием шероховатости поверхности контактирующих тел, для частных случаев разработан механизм задания модели распределения первоначального зазора путем назначения показателей степенных функций (в данном случае – описывают распределение зазора), характерных размеров площадок, покрывающих пятно контакта, а также податливости упругого слоя при помощи набора безразмерных параметров $\alpha, \beta, \varphi, \gamma$. В пространстве этих параметров в пределах некоторого гиперкуба каждая точка определяет вариант сочетаний геометрических и физико-механических свойств, отличный от задаваемых иной точкой. Кроме того, множество всех этих точек исчерпывает все многообразие таких вариантов (для частного случая степенного распределения зазора и линейно-упругого слоя). Это дает основание для установления однозначного соответствия между точками этого гиперкуба, с одной стороны, а с другой – получаемыми распределениями контактных давлений.

$$K=1.5 \quad L=2 \quad \theta=20$$



$$K=4 \quad L=2 \quad \theta=0$$



$$K=4 \quad L=4 \quad \theta=0$$

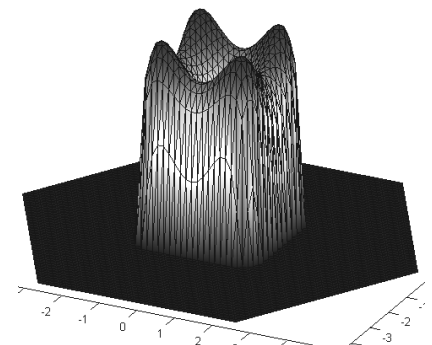


Рис. 5 – Картины распределения контактных давлений при различных параметрах (K, L (см. (10)) и θ (см. (16)))

С точки зрения обезразмеривания характеристик этих получаемых результирующих распределений давлений можно ввести новые параметры $\tilde{\tau}, \tilde{q}$, которые изменяются в конечных пределах. В результате, если пополнить пространство ($\alpha \times \beta \times \varphi \times \gamma$) размерностями ($\tilde{\tau} \times \tilde{q}$), то в пределах гиперкуба со сторонами $\pi/2$ (уже в этом шестимерном пространстве) станет возможным построить (путем решения множества задач численным методом граничных элементов, реализованным в виде специализированного программного кода) некоторое многообразие (гиперповерхность), характеризующее реакцию контактных давлений на варьирование формы контактирующих поверхностей сложнопрофильных тел и свойств упругой прослойки между ними. Любое сечение одной или несколькими координатными плоскостями этого гиперкуба даст частичную гиперповерхность (вплоть до визуализируемых поверхностей или линий в 3D или 2D случаях). Кроме того, состав множества варьируемых параметров и вычисляемых характеристик можно изменять, следуя предложенной в данной работе логике.

3. Установлены характерные тенденции влияния варьируемых параметров на распределение контактных давлений и контактных площадок при невысоких уровнях параметров податливости промежуточного упругого слоя. Так, для случаев, когда распределение зазора между контактирующими сложнопрофильными телами вращения представляется в виде степенной функции со степенью, большей двух, максимальные контактные давления вначале уменьшаются, а затем – возрастают (по сравнению с «герцевским» распределением, для которого эти степени равны 2). Для случая тех же степеней, но меньше 2 – ситуация иная: с ростом степени от единицы до двух давления уменьшаются. При этом с удалением от «герцевского» распределения зазора (т.е. параболоида) данные тенденции в целом усиливаются по мере роста/уменьшения показателей степени. Если рассмотреть влияние податливости слоя, моделирующего шероховатость, то с ее увеличением площадка контактирования растет, максимальные контактные давления – уменьшаются, а вид получаемого распределения изменяется, например, от первоначального «герцевского» (т.е. эллипсоида) до близкого к параболоиду (т.е. к «перевернутой») поверхности распределения зазора), трансформируясь непрерывно.

Такой же по характеру эффект – и для профилей зазора, отличных от параболоида. С другой стороны, для случая очень больших величин податливости промежуточного упругого слоя с ростом показателя степенной функции, описывающей зазор, максимальные контактные давления возрастают во всем диапазоне его варьирования. Кроме того, существует некоторый уровень величины податливости упругого слоя, при котором максимальное контактное давление практически не зависит от показателя степенной функции,

описывающей зазор.

4. Получаемые распределения контактных давлений при неучете шероховатости (т.е. контакт гладких тел) и при задании степенных распределений зазора по координатам (или по удалению от центральной точки) с показателями степени $K > 2$, $L > 2$ имеют в центральной точке локальный минимум. Это хорошо согласуется с известными, в т.ч. получаемыми аналитически, результатами [5, 8, 12, 14]. При введении между контактирующими телами упругого слоя распределение контактных давлений между максимумами, достигаемыми на некотором удалении от центральной точки, выравнивается, а при дальнейшем росте податливости глобальный максимум практически сравнивается с локальным минимумом, хотя при любом конечном λ локальный минимум в центральной точке сохраняется. Это отличается от предельного случая распределения контактного давления между абсолютно жестким телом и упругим слоем, когда в центральной точке наблюдается глобальный максимум.

5. Для случая $K \in]1; 2]$, $L > 2$ (или наоборот) распределение контактного давления характеризуется наличием седловой центральной точки.

6. Распределение контактных давлений при задании зазора в виде степенных функций от x , y с показателями степени $1 < K < 2$, $1 < L < 2$ (то же – от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в осесимметричном случае) приводит к формированию более резко выраженного максимума в центральной точке, чем для «герцевского» распределения. При этом введение упругого слоя между контактирующими телами снижает уровень максимума и сглаживает его характер.

7. Для случая распределения зазора между гладкими телами в виде степенных функции с произвольными показателями степени получаемая картина распределения контактных давлений характеризуется своеобразным соединением распределений. При этом в центральной зоне наблюдается либо максимум, либо седловая точка и т.п. Все зависит от соотношений степеней K , L и других параметров (a, b, U, V , см. (10)). Однако введение упругого слоя размывает получаемую волнистую картину распределения контактного давления, а при превалировании свойств податливости контактного слоя над податливостью гладких тел получаемое распределение контактных давлений стремится к характерному для модели «пружинный матрац» [5], т.е., как указывалось выше в п.3, повторяющему в «перевернутом» виде распределение первоначальных зазоров (в ненагруженном состоянии) между телами.

Вывод. В заключение можно констатировать, что и податливость упругого слоя, имитирующего свойства шероховатости контактирующих поверхностей, и вид распределения первоначального зазора между контактирующими телами достаточно сильно влияют и на характер распределения контактных давлений, и на их количественные характеристики. Это значит, что путем варьирования

данных параметров контактными давлениями можно управлять, а также подтверждается возможность постановки и решения задачи геометрического синтеза таких распределений зазоров и определения таких податливостей промежуточного слоя, которые удовлетворяют тому или иному сформированному критерию, сформулированному относительно контактных давлений, компонент напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел, величины сближения тел и т.п. Это, в свою очередь, предоставляет возможность решения задач параметрического синтеза, восстановления геометрической формы поверхностей контактирующих тел или комбинированной задачи оптимизации. Решение данных задач является направлением дальнейших исследований.

Список литературы: 1. Ткачук Н. Н., Мовшович И. Я., Ткачук Н. А., Скрипченко Н. Б., Литвиненко А. В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2014. – № 3 – С. 3-10. 2. Ткачук Н. Н., Мовшович И. Я., Ткачук Н. А., Скрипченко Н. Б., Литвиненко А. В. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2014. – № 4 – С. 3-8. 3. Решетов Д. Н., Портман В. Т. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с. 4. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 228 с. 5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 7. Simo J. C. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems // J. C. Simo, P. Wriggers, R. L. Taylor // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – Vol. 50. – P.163-180. 8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с. 9. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – М.: Физматлит, 2004. – 304 с. 10. Vollebregt E. A. H. 100-Fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT". // In W. Zhang, editor, Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Chengdu, P.R. China – 2012. 11. www.mathworks.com. 12. Штаерман М. Я. Контактная задача теории упругости. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 270. 13. Штаерман М. Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. – Докл. АН СССР, 1939, т. 25, № 5, с. 360-362. 14. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – Киев–Одесса: Вища школа, 1982. – 168 с.

Bibliography (transliterated): 1. Tkachuk N.N., Movshovich I. Ya., Tkachuk N. A., Skripchenko N. B., Litvinenko A. V. Analiz kontaktnogo vzaimodeystviya gladkih i sherohovatyih tel metodom granichnyih elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya // KShP. OMD. – Moscow: ООО „Tiso Print“, 2014. – No 3 – P. 3-10. 2. Tkachuk N. N., Movshovich I. Ya., Tkachuk N. A., Skripchenko N. B., Litvinenko A. V. Analiz kontaktnogo vzaimodeystviya gladkih i sherohovatyih tel metodom granichnyih elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya // KShP. OMD. – Moscow: ООО „Tiso Print“, 2014. – No 4 – P. 3-8. 3. Reshetov D. N., Portman V. T. Tochnost metallovezhushchih stankov. – Moscow: Mashinostroenie, 1986. – 336 p. 4. Demkin N. B. Kontaktnoye vzaimodeystviye sherohovatyih poverhnostey. – Moscow: Nauka, 1970. – 228 p. 5. Dzhonson K. Mehanika kontaktnogo vzaimodeystviya. – Moscow: Mir, 1989. – 510 p. 6. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol. 92. – P. 156-171. 7. Simo J. C. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems // J. C. Simo, P. Wriggers, R. L. Taylor // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – Vol. 50. – P.163-180. 8. Galin L. A. Kontaknyie zadachi teorii uprugosti i vyzkoupugosti. – Moscow: Nauka, 1980. – 303 p. 9. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. Analiticheskie metody v kontaknyih zadachah teorii uprugosti. – M.: Fizmatlit, 2004. – 304 p. 10. Vollebregt E. A. H. 100-Fold speed-up of the normal contact problem

and other recent developments in "CONTACT". // In W. Zhang, editor, Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Chengdu, P.R. China – 2012. **11**. www.mathworks.com. **12**. *Shtaerman M. Ya.* Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti. – L.: Gostehizdat, 1949. – 270. **13**. *Shtaerman M. Ya.* K teorii Gertsy mestnykh deformatsiy pri szhatii uprugih tel. – Dokl. AN SSSR, 1939, t. 25, No 5, p. 360-362. **14**. *Popov G. Ya.* Kontaktnyye

zadachi dlya lineyno-deformiruemogo osnovaniya / G. Ya. Popov. – Kiev–Odessa: Vischa shkola, 1982. – 168 p.

Поступила (received) 1.09.2015 г.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Николай Николаевич – кандидат технических наук, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», докторант кафедры «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин» тел.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru

Тkachuk Mykola Mykolayovych – Ph.D., National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", doctorante at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru.

Скрипченко Наталья Борисовна – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант кафедры «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин» (057) 707-65-34; e-mail: natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu.

Skripchenko Nataliia Borysivna – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", postgraduate student at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-65-34; e-mail: natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu.

Ткачук Николай Анатольевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», заведующий кафедры «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин» тел.: (057) 707-69-01; e-mail: tma@tmm-saprg.org.

Тkachuk Mykola Mykolayovych – doctor of technical sciences, professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Head at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-69-01; e-mail: tma@tmm-saprg.org.

Неделько Катерина Дмитриевна – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», студент, тел.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-saprg.org.

Nedilko Katerina Dmitrievna – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student, tel.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-saprg.org.