Потрібне робоче зусилля натискних елементів:

$$Q_н=P_в/u_в\ . \qquad (1.17)$$

У разі застосування ПЦ указане зусилля є постійним, як при коливаннях висоти шару, так і при пропусканні твердих включень. При використанні пружин бажання зменшити вплив коливань товщини шару на тиск під валком і знизити пікові навантаження на елементи агрегату спонукає до зменшення жорсткості пружин.

Список литературы: **1.** Пат. № 51794 UA, B02C 15/06, B28C 1/10. Барабанно-валковый активатор: *Болотских Н.С., Фёдоров Г.Д., Савченко А.Г., Крот А.Ю., Волков В.И.* - № 2000010381; Заявл. 24.01.2000; Опубл. 16.12.2002:–6 с. **2.** Патент України на винахід №58226А за заявкою №2002108659 від 31 жовтня 2002р."Активатор бетонної суміші". Опубліковано 15.07.2003 бюллетень №7 *Автори*: *Болотських М.С., Федоров Г.Д., Савченко О.Г., Крот О.Ю., Тимощенко А.М. Заявник – Федоров Георгій Дмитрович*. **3.** *Крот О.Ю., Савченко О.Г., Праведніков В.І., Тимощенко А.М., Супряга Д.В.* Вимірювальна система для визначення тиску прокатування матеріалу під валком з застосуванням аналого-цифрового перетворювача // Науковий вісник будівництва. – Харків ХДТУБА; ХОТВ АБУ, 2003. – Вип. №24. – С. 168 – 175. **4.** *Болотских Н.С., Федоров Г.Д., Савченко А.Г., Крот А.Ю., Волков В.И.* Производство кирпича из шлака с использованием барабанно-валкового активатора. Строительные материалы и изделия. Всеукраинский научно-технический и производственный журнал. №4, 2001. **5.** *М.С. Болотських, О.Г. Савченко, Г.Д. Федоров, О.Ю. Крот, В.І. Волко*. Визначення параметрів робочого режиму барабанно-валкового агрегату для активації шлаків.// Вісник національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Хімія, хімічна технологія й екологія». – 2002. – С. 56– 62. **6.** *Савченко О.Г., Крот О.Ю., Праведніков В.І., Супряга Д.В.* Математична модель процесу нарощування тиску під валком барабанно-валкового агрегату / Науковий вісник НТУ ХПІ. Хімія, хімічна технологія і екологія". – Харків: НТУ ХПІ, 2005. – Вип.41. - С.46-50.

Надійшла до редколегії 16.09.06.

УДК 531 + 535.39 + 539.3

Ю.В. ЧОВНЮК, канд. техн. наук, «ЭКОМЕН», КНУСиА (г. Киев),
О.М. ШУТОВСКИЙ, канд. физ.- мат. наук, КНУСиА (г. Киев)

МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК И ПРЕСС-ФОРМ ИЗ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ В ПРОЦЕССАХ ИХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Запропонований метод аналізу нелінійної динаміки та стійкості оболонок та прес-форм з порошкових матеріалів у процесах їх формоутворення за різноманітних термосилових навантажень, який дозволяє враховувати різні нелінійно-пружні властивості матеріалу, а також швидкоплинні зміни властивостей полів навантаження.

The method of analysis of nonlinear dynamics and stability of the powder materials' shells and press-forms during the processes of their forming and various thermo-forced loadings is proposed. One may account with the help of this method various nonlinear elastic properties of the material and short-time' changes of the loading fields' properties as well.

Нестационарные процессы, сопровождающиеся распространением волн в сплошных средах и их взаимодействием с различными препятствиями, границами тел, их полостями являются сложными волновыми процессами, часто встречающимися во многих областях техники, в том числе в авиационной и ракетной технике.

Линейная теория вязкоупругости и термовязкоупругости как одна из моделей механики сплошной среды возникла давно, однако большое значение она приобрела в последнее время, главным образом в связи с созданием разнообразных полимерных, порошковых материалов (ПМ) и пластмасс и их применением в различных областях народного хозяйства. Широкое развитие получили различные теоретические и экспериментальные исследования в области вязкоупругости, в том числе линейная и нелинейная теории деформирования вязкоупругих (порошковых) материалов.

Следует заметить, что основное распространение получила теория вязкоупругости при медленных процессах деформирования (ПМ), что привело к развитию теории ползучести и ее приложений в различных областях техники и строительства. В данной области теории вязкоупругости получено много важных результатов. В то же время во многих областях техники вязкоупругие ПМ подвергаются импульсивным воздействиям, при этом в деформируемом материале (оболочке, пресс-форме и др.) происходят волновые процессы.

Исследование волновых процессов в вязкоупругих телах (оболочках, пресс-формах из ПМ) является весьма сложной и актуальной проблемой (особенно, в процессах их формообразования и различных импульсных термосиловых нагружениях). Сложность исследования указанных процессов, главным образом, связана со сложностью математической постановки динамических задач вязкоупругости, как для самого ПМ, так и для вырожденных вязкоупругих систем, таких как стержни, пластинки, оболочки, пресс-формы и т.д.

Нестационарные термоупругие поля в диспергирующих, диссипативных деформируемых средах (телах), к которым относятся и ПМ (изделия из ПМ) могут формироваться при воздействии на эти среды (тела) коротких волновых импульсов (например, при их лазерной обработке, нагреве и пр.). Эффекты ударного возбуждения и распространения таких волн привлекают сейчас внимание не только в вышеуказанной сфере человеческой деятельности, но и в некоторых областях радиофизики, квази- и металлооптики, физики лазеров (твердотельных), материаловедении. Такое внимание обусловлено целым рядом причин:

1. Успехи последних лет в генерации видеоимпульсов с помощью широкополосных радаров (характерная длительность импульса $t_0 = 1\ldots10$ нс),

систем пикосекундной оптики ($t_0 \approx 0,1...1\ nc$) стимулировали интерес к перспективам использования видеоимпульсов для передачи энергии и информации через сплошные среды (в т.ч. для упрочнения ПМ). Структура таких импульсов существенно отличается от традиционно обсуждаемых моделей модулированных квазимонохроматических сигналов с прямоугольной или гауссовой (супергауссовой) формой огибающей: а) огибающая видеоимпульса содержит всего одно или несколько колебаний поля, формы которых обычно далеки от синусоидальной; б) передний и задний фронты несимметричны; в) расстояния между точками пересечения нуля огибающей неравны.

Тенденция к формированию термоупругих (термовязкоупругих) видеоимпульсов (ТВИ) характерна в последнее время и для фемтосекундной оптики, где ультракороткие импульсы, выходящие из оптического компрессора и взаимодействующие с твёрдой мишенью, содержат 3…5 колебаний электромагнитотермовязкоупругого поля. Кроме того, аналогичная тенденция отмечается и в зарождающейся оптике (металлооптике) аттосекундных сигналов, взаимодействующих с деформируемым телом/средой, обрабатываемым изделием из ПМ.

2. Традиционные решения уравнений термовязкоупругости [1 – 3] в сплошных средах связаны с представлением решений в виде произведения функций, зависящих либо от координат, либо от времени (т.н. разделяющиеся решения). При этом для ряда моделей (линейных) деформируемых тел [1 – 3] уравнения движения преобразуются к волновым уравнениям. В случае установившихся движений (в т.ч. «высокочастотных») решение задач сводится к решению уравнений Гельмгольца (скалярным или/и векторным). Временная зависимость обычно исследуется с помощью преобразования Фурье. Многие десятилетия именно такой подход формировал язык описания квазимонохроматических волн в квази- и металлооптике, акустике, радиофизике, механике деформируемого твердого тела, материаловедении; однако попытки применить этот же подход в динамике взаимодействия коротких видеоимпульсов (скажем, электромагнитной или тепловой природы) с диспергирующими деформируемыми средами, ПМ (с последующей генерацией в последних термоупругих импульсов, связанных полей близкой длительности) натолкнулись на неожиданные трудности как концептуальные, так и вычислительные: а) при фурье-преобразовании огибающая сигнала конечной длительности усредняется по бесконечному интервалу времени (от $-\infty$ до $+\infty$). Участки быстрого изменения огибающей оказываются при этом скрытыми; однако именно эти участки важны для регистрации сигнала (любой физической природы) в информационных системах (!). С другой стороны, для восстановления временной огибающей локализованного сигнала с помощью обратного фурье-преобразования нужно исключить поля гармоник вне области локализации, однако для уточнения области локализации требуется учитывать всё возрастающее количество гармоник; б) деформация импульса в диспергирующей среде (ПМ) описывается в частотной области, как показано в [4], методом разложения фазы в ряд по степеням отношения спектральной ширины импульса $\Delta\mu$ к несущей частоте μ. Однако для коротких широкополосных (термовязкоупругих) импульсов, содержащих одно или несколько колебаний связанного поля, отношение $\Delta\mu / \mu$ не является малым параметром; при этом количество спектральных компонент, требуемое для синтеза поля (термовязкоупругого) импульса в глубине деформируемой среды или обрабатываемого лазерным импульсом ПМ, становится непомерно большим. Такая ситуация, в свою очередь, порождает целый «букет» вычислительных трудностей.

Следует подчеркнуть, что отмеченные трудности связаны не с уравнениями движения деформируемых сред (тел), выведенными в рамках их линейных моделей авторами [1 – 3], а с традиционным методом их решения с помощью разделения переменных и преобразований Фурье. Однако представление термовязкоупругих полей в ПМ с помощью этого метода является не следствием этих уравнений движения, а лишь одним (традиционным) из способов их решения. Этот способ удобен для описания квазимонохроматических волн в деформируемых средах, телах и ПМ с медленно меняющейся амплитудой и фазой, но малоэффективен для анализа нестационарных и негармонических связанных полей различной физической природы (в т.ч. термовязкоупругих) в указанных объектах исследования.

Получить информацию о таких полях можно в рамках метода, развитого в [4].

Цель настоящей работы состоит в исследовании новых точных решений уравнений термовязкоупругости для линейных моделей деформируемых тел, сред, ПМ, представленных в [1 – 3, 5], при использовании подхода [4]. Указанный подход используется также для всестороннего анализа нелинейной динамики и устойчивости стержней, пластин, оболочек и пресс-форм из ПМ в процессах их формообразования при различных термосиловых нагружениях. Причем получение таких (новых) точных решений производится без использования стандартного разделения переменных и вне рамок фурье-разложений. Такие «неразделяющиеся» точные аналитические решения, не связанные традиционными допущениями о малости или медленности изменения (термовязкоупругих) полей в ПМ, образуют, вообще говоря, математическую основу описания быстропеременных непериодических полей (различной физической природы) и коротких импульсов (используемых в лазерной обработке с целью упрочнения ПМ) в диспергирующих деформируемых средах/телах. Сама среда (ПМ) при этом предполагается покоящейся и стационарной, а нестационарность пространственно-временной структуры распространяющегося связанного поля обусловлена значительным изменением его огибающей за характерное время, определяемое микроскопическими процессами установления поля (этой физической природы) в деформируемой среде, ПМ (например, время температурной релаксации). Такая механика нестационарных связанных полей (в данной работе термовязкоупругого происхождения) стационарных деформируемых сред (ПМ), тел и пр. и является предметом настоящего исследования. При этом использование метода [4] позволяет произвести редукцию уравнений движения для моделей деформируемых тел [1-3,5] к стандартному (эталонному) уравнению Клейна – Гордона (линейный вариант) и определить его «неразделяющиеся» решения, являющиеся одновременно нестационарными, непериодическими (и точными!).

1. Пространственно-временная эволюция ТВИ в рамках моделей связной теории термоупругости при конечной скорости распространения температуры по ПМ.

Исходя из общих соотношений линейной теории термовязкоупругости ПМ, рассмотрим частный случай – связную теорию термоупругости ПМ при конечной скорости распространения температуры [5], а также пространственно-временную эволюцию (ПВЭ) ТВИ в указанных материалах при различных начальных принятых допущениях.

Основные уравнения линейной теории термоупругости (ПМ) сводятся к уравнениям движения термоупругой среды:

$$(ª + 2«)\cdot grad(div\vec{u}) - «\cdot rot(rot\vec{u}) = °\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + ¥\cdot gradT; \qquad (1)$$
$$¥ = \sim\cdot(3ª + 2«)$$

и уравнению распространения температуры T:

$$\Delta T - \frac{1}{c_0{}^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = ¦_0\cdot\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{u}) + ¦_1\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}(div\vec{u}), \qquad (2)$$

где $\sim, ¦_0, ¦_1$ – параметры среды (ПМ); $c_0{}^2$ – коэффициент температуропроводности; c – скорость распространения температуры; $°$ – плотность среды (ПМ). Остальные обозначения общепринятые. (При этом закон связи между напряжениями, деформациями и температурой задаётся законом Дюамеля-Неймана).

Для всех исходных допущений, принятых ниже для системы уравнений (1), (2), считаем $rot\vec{u} \equiv 0$.

<u>Допущение 1.</u> $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = 0.$ В этом случае рассматривают квазистатическую устойчивость среды (ПМ). Исходная система уравнений (1), (2) сводится к следующей:

$$\begin{cases} div\vec{u} = \dfrac{¥}{(ª + 2«)}\cdot T; \\ \Delta T - \dfrac{1}{c_0{}^2}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Второе уравнение системы (3) является (по своему виду) телеграфным уравнением и для него методом [4] могут быть найдены точные решения для непериодических термовязкоупругих волн, распространяющихся в ПМ, а также полностью изучена их ПВЭ.

<u>Допущение 2.</u> $²_0\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} << \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$, где $²_0$ – длительность ТВИ (либо время термоупругой релаксации в ПМ). Фактически это допущение эквивалентно $\frac{\Delta\mu}{\mu} >> 1$ при $\Delta\mu \sim \frac{1}{²_0}$. Тогда вместо (1), (2) получим:

$$\begin{cases} div\vec{u} = \dfrac{¥}{(ª + 2«)}\cdot T, \\ \Delta T - \dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \left(\dfrac{1}{c_0{}^2} + \dfrac{¦_0\cdot¥}{(ª + 2«)}\right)\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Снова второе уравнение (4) совпадает с телеграфным.

<u>Допущение 3.</u> $°\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} << ¥\cdot gradT$. В этом случае имеем:

$$\begin{cases} div\vec{u} = \dfrac{¥}{(ª + 2«)}\cdot T, \\ \Delta T - \left(\dfrac{1}{c^2} + ¦_1\cdot\dfrac{¥}{(ª + 2«)}\right)\cdot\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \left(\dfrac{1}{c_0{}^2} + ¦_0\cdot\dfrac{¥}{(ª + 2«)}\right)\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Второе уравнение системы (5) является телеграфным.

Следует отметить, что во всех трех вариантах (принятых допущениях) решение телеграфного уравнения для T позволяет определить $div\vec{u}$ и $\vec{u}$. Поэтому новые точные решения для T (непериодические и нестационарные) определяют таковые и для $\vec{u}$.

Рассмотрим ещё одну простейшую задачу о распространении в ПМ сферической термовязкоупругой волны.

Пусть к поверхности сферической полости в ПМ радиуса r_0 в момент времени $t=0$ прикладывается температурный импульс интенсивностью $F(t)$. При $t>0$ по такой вязкоупругой среде (модели ПМ) будет распространяться вязкоупругая и термоупругая волны. Однако, теперь будем предполагать, что среда (ПМ) удовлетворяет модели Максвелла ($²_0$ – параметр релаксации) и используем несвязную теорию термовязкоупругости. Тогда для радиального смещения $\vec{u}$ и температуры T получаем систему интегродифференциальных уравнений [5], в которой уравнение для T имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{²_0}{a_0^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{1}{a_0^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6)$$

где $a_0=\frac{\sim}{(ª+2«)}$. Вводя вместо T замену $T\Rightarrow\frac{f}{r}$, получим из (6):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{²_0}{a_0^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{1}{a_0^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7)$$

Уравнение (7) опять является телеграфным (!), но уже для описания ПВЭ T в ПМ со сферической симметрией.

2. Уравнение теплопроводности для твердых тел (ПМ) с учетом конечной скорости распространения температуры. (Задача Л.Д. Ландау с поправками Каттанео [6] – Мюллера [7]).

А. В работе [8] определена деформация неограниченной упругой среды с заданным распределением температуры $T(x,y,z)$, таким, что на бесконечности температура стремится к постоянному значению T_0 и деформация отсутствует. При этом связь $\vec{u}$ с T для изотропной упругой среды имеет вид:

$$div\vec{u}=\frac{(1+±)}{3\cdot(1-±)}\cdot\sim\cdot(T-T_0), \quad (8)$$

где $\sim$ – коэффициент теплового расширения среды (тела), $±$ – коэффициент Пуассона.

Уравнение движения указанной изотропной упругой среды имеет вид:

$$2\cdot(1-±)\cdot graddiv\vec{u}-(1-2±)\cdot rotrot\vec{u}+$$
$$+\frac{2\cdot°\cdot(1-2±)\cdot(1+±)}{E}\cdot(\vec{g}-\ddot{\vec{u}})=\frac{2\sim\cdot(1+±)}{3}\cdot\nabla T, \quad (9)$$

где E – модуль упругости (Юнга) среды, $\vec{g}$ – ускорение земного тяготения (свободного падения), $\ddot{\vec{u}}\equiv\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$. При условии: $\frac{u}{c_l^2\cdot²^2}<<\frac{\sim\cdot T}{L_{ТИ}}$, где c_l – скорость продольных (звуковых) волн в среде, $²$ – характерный временной масштаб изменения поля перемещений ($\vec{u}$) в среде, $L_{ТИ}$ – характерный пространственный масштаб изменения температурного поля в среде, последним членом в левой части уравнения (9) можно пренебречь. (Следует отметить, что данное упрощение (9) возможно при эквивалентном условии:

$$£<<\sim\cdot T\cdot\frac{L_{ВВ}^2}{L_{ТИ}\cdot L},$$

где $£$ – деформация среды, $L_{ВВ}$ – характерный пространственный масштаб волновых возмущений в среде, L – характерный размер (масштаб) тела).

Используя (8) и упрощенное уравнение (9), можно получить уравнение теплопроводности в твердой среде по аналогии с [8]:

$$\frac{(1+±)\cdot C_p+2\cdot(1-2±)\cdot C_v}{3\cdot(1-±)}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=©\cdot\Delta T, \quad (10)$$

где C_p, C_v – теплоёмкость среды при постоянном давлении (p) и постоянном объёме (v), соответственно, $©$ – коэффициент теплопроводности среды, Δ – оператор Лапласа.

Из (10) можно получить следующую запись закона теплопроводности твердой среды:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{3\cdot(1-±)\cdot©}{\{(1+±)\cdot C_p+2\cdot(1-2±)\cdot C_v\}}\cdot\Delta T. \quad (11)$$

В работе Каттанео [6] получено гиперболическое уравнение теплопроводности среды, учитывающее конечность скорости распространения (V) температурных полей в среде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=¡\cdot\Delta T-²\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\quad V^2=\frac{¡}{²}, \quad (12)$$

где $²$ – положительная величина с размерностью времени, малая по шкале времени, ¡ – коэффициент температуропроводности среды. Если Каттанео [6] получил уравнение теплопроводности твердых тел гиперболического типа (с конечной скоростью распространения V температурных полей в среде), исходя из физических соображений и модификации закона Фурье, заменив его на обобщенный закон, то Мюллер [7] использовал другой путь. Он предположил, что поток тепла q и поток энтропии S не связаны друг с другом, и каждый из этих потоков определяется своим собственным определяющим соотношением. Этот метод также приводит к волновому уравнению теплопроводности.

Используя (12), можно получить уравнение теплопроводности для среды, рассматриваемой в задаче Л.Д. Ландау [8], в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \bar{¡}\cdot\Delta T - \frac{\bar{¡}}{\bar{V}^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2};\quad \bar{¡} = \frac{3\cdot(1-±)\cdot\tilde{©}}{\{(1+±)\cdot C_p + 2\cdot(1-2±)\cdot C_v\}};\quad \bar{V}^2 = \frac{\bar{¡}}{\tilde{²}}. \qquad (13)$$

(Следует отметить, что в работе [8] введено обозначение $\tilde{©} \equiv k$).

Таким образом, уравнение теплопроводности в неограниченной изотропной (однородной) твердой среде (модель ПМ) с распределением температуры T, удовлетворяющим только одному условию: на бесконечности температура стремится к постоянному пределу T_0 и деформация отсутствует (задача Л.Д.Ландау [8]), в рамках модели Каттанео [6], имеет вид телеграфного:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \bar{¡}\cdot\Delta T - \tilde{²}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \qquad (14)$$

Б. Уравнение, описывающее распределение температуры вдоль длины тонкого прямого стержня (из ПМ), если хотя бы один из его концов не закреплён, а тепловое расширение стержня приводит только к изменению его длины (без изменения прямолинейной формы и без возникновения внутренних напряжений в нём), также является телеграфным:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{¡}\cdot\Delta T - \frac{\tilde{¡}}{\tilde{V}^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\quad \tilde{¡} = \frac{\tilde{©}}{C_p} = \frac{k}{C_p};\quad \tilde{V}^2 = \frac{\tilde{¡}}{\tilde{²}}. \qquad (15)$$

Подобная задача также рассмотрена в [8].

В. Задача Л.Д. Ландау [8], в рамках модели связной теории термоупруго-

сти [5] (см. п. 1 данной работы) сводится к телеграфному уравнению для T:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ¡'\cdot\Delta T - \frac{¡'}{(V')^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2};\quad ²' = \frac{¡'}{(V')^2} = \frac{\left(\frac{1}{c^2} + ¦_1\cdot\frac{¥}{(ª+2«)}\right)}{\left(\frac{1}{c_0{}^2} + ¦_0\cdot\frac{¥}{(ª+2«)}\right)}; \qquad (16)$$

$$(V')^2 = \left(c^{-2} + ¦_1\cdot\frac{¥}{(ª+2«)}\right)^{-1}.$$

Г. Задача о тепловом ударе по полупространству, занимаемому ПМ, описывается также телеграфным уравнением [5] для T:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ¡^*\cdot\Delta T - ²_0\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\quad ¡^* \equiv c^2, \qquad (17)$$

$²_0$ – время релаксации теплового потока в среде (ПМ).

Д. В работе [5] для исследования ПВЭ плоской термовязкоупругой волны, распространяющейся в среде (ПМ), которая описывается моделью Максвелла (со временем максвелловской релаксации $²_M$), а температурный поток зависит от одного времени релаксации $²_M$ предложено задачу решать с помощью следующих уравнений (причем для полуплоскости $y \geq 0$ в начальный момент задаются смещение v, его производная $\frac{\partial v}{\partial t}$, T и её производная $\frac{\partial T}{\partial t}$, все начальные значения зависят лишь от одной координаты y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{²_M}\cdot\int_0^t \exp\left\{-\frac{t-¶}{²_M}\right\}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,d¶ = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\sim}{(ª+2«)}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{¡^*}\cdot\left(²_0\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t}\right),\quad ²_M = \frac{¦^*}{E},\quad a^2 = \frac{ª+2«}{°}, \qquad (19)$$

где $¦^*$ – коэффициент вязкости, остальные обозначения введены выше. Второе из уравнений системы (18), (19) также является телеграфным.

Приведем все варианты телеграфных уравнений, представленные выше, к единому каноническому виду.

Пусть исходное (телеграфное) уравнение для температуры (в одномерной постановке задачи – по координате z можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{a_0^{\,2}}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{1}{a_0^{\,2}\cdot ²_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (20)$$

$a_0, ²_0$ – параметры модели среды (ПМ), в которой происходит ПВЭ температурного поля. Физический смысл параметра $²_0$, имеющего размерность времени, состоит в том, что он характеризует время релаксации теплового потока в среде (ПМ), а a_0 имеет размерность скорости и характеризует быстроту распространения температурного поля в среде (ПМ). Величина $a_0^{\,2}=\hat{V}^2=\frac{¡}{²_0}=\frac{©}{²_0\cdot c_{уд.}\cdot °}$, где $c_{уд.}$ – удельная теплоёмкость вещества (ПМ), © – коэффициент теплопроводности, а ¡ – коэффициент температуропроводности материала (ПМ). Поэтому $¡=\frac{©}{c_{уд.}\cdot °}$.

Введем безразмерные переменные $f, ², ¦$:

$$T=T_0\cdot f;\quad ²=\frac{t}{T_{пер.}};\quad ¦=\frac{z}{\hat{V}\cdot T_{пер.}};\quad T_{пер.}=2\cdot ²_0, \qquad (21)$$

где T_0 – амплитуда возмущений температурных полей в среде (ПМ). Тогда (20) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial ¦^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial ²^2}=2\cdot\frac{\partial f}{\partial ²}. \qquad (22)$$

Аналогичные соображения можно привести и для канонического представления в форме (22) уравнений вида (14). Такие уравнения (типа (22)) хорошо изучены и в работе [5] получены и исследованы точные непериодические неразделяющиеся их решения.

3. Метод расчета температурных полей при сварке в средах (ПМ) и телах конечных размеров.

Используя результаты работы [9] и конечность скорости распространения тепла в средах и телах ограниченных размеров (в т.ч. из ПМ), можно предложить общий подход и метод расчета температурных полей при сварке, воздействии лазерного излучения на материалы и среды. В цилиндрической

$(r, ¨, z)$ – системе координат при цилиндрической симметрии начально-краевых задач для T обобщенное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{¡}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial^2 T}{V^2\cdot\partial t^2}=0,\quad V^2=\frac{¡}{²˜}. \qquad (23)$$

Применяя для $T(r,z,t)$ преобразование Ханкеля с функцией Бесселя нулевого порядка по переменной r получим:

$$\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2}-\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial t^2}=\overline{˜}^{\,2}\cdot\overline{T}+\frac{1}{¡}\cdot\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}, \qquad (24)$$

$\overline{T}$ обозначает преобразование Ханкеля функции T с аргументом (параметром) преобразования $\overline{˜}$. Последнее уравнение для $\overline{T}$ можно решить методом [4]. При этом полагаем, что $\overline{T}\sim\exp\left[i\cdot\left(\bar{k}z-\mu t\right)\right]$, а:

$$\mu=-\frac{i}{2²˜}\pm\sqrt{V^2\cdot\left(\bar{k}^2+\overline{˜}^{\,2}\right)-\frac{1}{4²˜^2}},\quad i=\sqrt{-1}, \qquad (25)$$

где $(\mu,\bar{k})$ – частота (круговая, циклическая) и волновой вектор (термовязкоупругой волны, распространяющейся в среде (ПМ), материале, теле конечных размеров), соответственно.

Вводя замену переменных:

$$¦=\frac{z}{V\cdot T_{пер.}^{\ *}};\quad ²=\frac{t}{T_{пер.}^{\ *}};\quad T_{пер.}^{\ *}=2\cdot ²˜, \qquad (26)$$

уравнение для $\overline{T}=\overline{T}_0\cdot\Psi$, где $\overline{T}_0$ – амплитуда $\overline{T}$, можно свести к виду, приведенному в [4]:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial ¦^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial ²^2}=\overline{˜}^{\,2}\cdot V^2\cdot(T_{пер.}^{\ *})^2\cdot\Psi+\frac{V^2\cdot T_{пер.}^{\ *}}{¡}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial ²}. \qquad (27)$$

При этом параметры $t_1, t_2, ¥$ $(t_1>t_2)$, присутствующие в определении точных непериодических неразделяющихся решений автора [4], теперь приобретают такие значения:

$$¥=\frac{t_1+t_2}{|t_1-t_2|},\ t_1^{-1}=\frac{1}{2²˜}-\sqrt{\frac{1}{4²˜^2}-\overline{˜}^{\,2}\cdot V^2},\ t_2^{-1}=\frac{1}{2²˜}+\sqrt{\frac{1}{4²˜^2}-\overline{˜}^{\,2}\cdot V^2}. \qquad (28)$$

Все, полученные в [9] решения для сред и тел неограниченных/ограниченных размеров, изготовленных из ПМ, теперь определены и для случая их импульсных термосиловых нагружений.

4. Выпучивание цилиндрических оболочек из ПМ при тепловом ударе.

Задача о поведении тонкой круговой цилиндрической оболочки конечной длины при действии осесимметричного теплового импульса в некоторой зоне, расположенной у одного из торцов, рассмотрена в [10].

Следует заметить, что при распространении теплового потока вдоль конструкции (из ПМ) часть длины оболочки будет подвергаться динамическому сжатию. При известных условиях это приведет к появлению в сжатой зоне оболочки глубоких вмятин, весьма опасных для тонкостенных конструкций из ПМ. В случае, если период времени подвода тепла значительно меньше времени распространения упругой волны вдоль длины конструкции, можно считать, что эффект продольного теплового удара аналогичен воздействию собственно ударной нагрузки.

Для описания поведения оболочки из ПМ в основных уравнениях необходимо учесть силы инерции, соответствующие не только прогибу, но и перемещениям в срединной поверхности, а также конечность скорости распространения возникающей термовязкоупругой волны. Так как подобная задача оказывается весьма сложной, будем условно считать, что изменение термоупругой деформации по длине оболочки не зависит от прогиба и определяется из решения соответствующей одномерной задачи для упругого стержня (с учетом т.н. «тепловой инерции», т.е. конечной скорости распространения тепла). Что же касается явления выпучивания, то примем, что образующиеся при этом прогибы сравнимы с толщиной оболочки и находятся из решения геометрически нелинейной задачи.

Выпишем основные зависимости, относящиеся к распространению температурных напряжений в стержне. Допустим, что элемент стержня нагревается от некоторой абсолютной температуры Θ до температуры $\Theta + ¯$, при этом в стержне из ПМ возникают напряжения $\tilde{±}$. Полная упругая линейная деформация будет:

$$£ = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tilde{±}}{E} + k_T \cdot ¯, \tag{29}$$

где k_T – коэффициент линейного расширения материала (ПМ). Параметры E и k_T, вообще говоря, зависят от температуры. Но в задаче, рассмотренной ниже, когда элементы конструкции подвергаются резкому поверхностному нагреву, можно принять эти коэффициенты в качестве постоянных. Используя подход [10], можно для ¯ получить следующее уравнение:

$$²_0 \cdot \frac{\partial^2 ¯}{\partial t^2} + \frac{\partial ¯}{\partial t} = ¡ \cdot \frac{\partial^2 ¯}{\partial x^2} - ′ \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \tag{30}$$

Здесь введены обозначения:

$$¡ = \frac{©}{C_v \cdot °}, \qquad ′ = \frac{k_T \cdot E \cdot \Theta}{C_v \cdot °}, \tag{31}$$

где © – коэффициент теплопроводности стержня, а остальные обозначения введены выше.

Связанная задача термоупругости для стержня описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} ²_0 \cdot \frac{\partial^2 ¯}{\partial t^2} + \frac{\partial ¯}{\partial t} - ¡ \cdot \frac{\partial^2 ¯}{\partial x^2} + ′ \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_T \cdot \frac{\partial ¯}{\partial x} - \frac{1}{c_s^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $c_s = \sqrt{\frac{E}{°}}$ – по-прежнему скорость распространения деформации сжатия в материале оболочки (ПМ).

Основные динамические соотношения термоупругости теории пологих оболочек приведены в [10] и здесь не представлены ввиду их громоздкости. Заметим, что в выражение функции напряжений Ф [10] входит член, содержащий $p = p(t)$ – интенсивность сжимающих усилий в выбранном сечении оболочки, которая определяется по формуле:

$$p = E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_T \cdot ¯ \right). \tag{33}$$

Для нахождения зависимости между параметрами прогиба оболочки w и изменяющимися во времени сжимающими усилиями воспользуемся применительно к системе уравнений, определяющих основные динамические соотношения термоупругости теории пологих оболочек (здесь не выписаны ввиду громоздкости) методом Бубнова-Галеркина. В результате приходим [10] к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно стрелы прогиба f.

Для примера будем исследовать случай, когда происходит резкий местный нагрев одного из торцов оболочки; остальную поверхность примем теплоизолированной. Решение задачи сводится к интегрированию системы безразмерных разрешающих уравнений, представленных в [10], причем для температуры $¯^{*} = k_T \cdot ¯$ имеем:

$$\left(1+\frac{²_0}{T_u}\right)\cdot\frac{\partial ¯^{*}}{\partial ²} - d\cdot\frac{\partial^2 ¯^{*}}{\partial x^{*2}} + k_T \cdot \; ' \cdot \frac{\partial^2 u^{*}}{\partial x^{*}\partial ²} = 0. \qquad (34)$$

(Здесь принято $²_0 \cdot \frac{\partial^2 ¯^{*}}{\partial ²^2} \approx \frac{²_0}{T_u}\cdot\frac{\partial ¯^{*}}{\partial ²}$, где T_u – длительность теплового нагрева торца оболочки (длительность теплового импульса/удара)). Безразмерные параметры в (34) введены по аналогии с [10]:

$$x^{*} = \frac{x}{L},\quad ² = \frac{c_s \cdot t}{L},\quad u^{*} = \frac{u}{L},\quad d = \frac{\text{i}}{c_s \cdot L}, \qquad (35)$$

где L – длина образующей оболочки. Решение (линейных) уравнений для $¯^{*}, u^{*}$ можно получить в замкнутой форме последовательным применением к ним преобразований Фурье по x^{*} и Лапласа по $²$. При этом граничные и начальные условия имеют вид: $\frac{\partial ¯^{*}}{\partial x^{*}} = u^{*} = 0$ при $x^{*} = 0;1$, а $\frac{\partial u^{*}}{\partial ²} = u^{*} = 0$, $¯^{*} = \frac{h}{C_v \cdot °}$ при $² = 0$, $x^{*} = 0$, где h – количество подведенной тепловой энергии. Уравнение для безразмерной стрелы прогиба s можно [10] проинтегрировать методом Рунге-Кутта в предположении, что дополнительный прогиб и скорости оболочки в начальный момент времени равны нулю:

$$s - s_0 = \frac{ds}{d²} = 0 \text{ при } ² = 0.$$

В процессе решения задачи определялись коэффициент динамичности, представляющий собой отношение величины максимального сжимающего усилия к верхнему критическому значению $p^{*} / p_{верхн.}^{*}$ [10] и число волн, при котором наступает бурный процесс выпучивания оболочек из ПМ. Результаты вычислений представлены в таблице для характеристики темпа нарастания максимальной стрелы прогиба $¶_{\max}$ в оболочке для сечения $x = L/2$, различных значений (параметров) самого теплового импульса $¯^{*}$, $²_{кр.}$ в зависимости от $\frac{²_0}{T_u}$. Расчеты проведены для оболочки с отношением $R/H = 300$ (R – радиус, H – толщина оболочки, соответственно), $L/R = 3{,}75$, амплитудой начальной погиби $s_0 = 0{,}001$ и параметром волнообразования $¶ = 3$. В качестве критического времени $²_{кр.}$ условно принимался момент, соответствующий фронту бурного нарастания прогиба. Следует заметить, что наиболее вероятная форма выпучивания оболочки из ПМ соответствует числу волн $n = 27$. (При этом стрела прогиба $s = 2{,}85$). Для $n = 26$ $s = 2{,}75$; для $n = 28$ $s = 2{,}5$. Аналогичные результаты были получены для оболочек из ПМ с различным сочетанием геометрических соотношений и параметра нагружения. Вычисления и здесь показали, что эффект динамичности проявляется тем сильнее, чем больше отношение R/H.

Таблица

Характеристики выпучивания цилиндрической оболочки из ПМ при тепловом ударе

$²_0/T_u$	0,1	1	10
$¯^{*}$	0,272	0,15	0,027
$²_{кр.}$	0,396	0,72	3,96

5. ПВЭ нелинейных термовязкоупругих волн деформаций в цилиндрической оболочке из ПМ.

Используя подходы работы [11] с учетом результатов, полученных в [3], для нелинейных термовязкоупругих волн деформаций, распространяющихся в цилиндрических оболочках из ПМ, можно получить следующее нелинейное эволюционное уравнение Кортевега-де-Вриза-Бюргерса (КдВБ) для осевой деформации $u_{0¶}$ (использованы обозначения, введенные в [3, 11]):

$$u_{0¶²} + \frac{(1-«^2)^{1/2}}{2}\cdot\left(1+\frac{\sim_4 \cdot A}{l \cdot V}\right)\cdot u_{0¶}\cdot u_{0¶¶} - \left[\frac{«^2}{2} + \frac{\sim_1 \cdot (1-«^2)}{2\cdot l \cdot V}\right]\cdot u_{0¶¶¶} -$$
$$- \frac{(1-«^2)^{1/2}}{2}\cdot\left\{«^2 + \frac{\sim_2 + \sim_3 \cdot (1-«^2)}{l^2 \cdot V}\right\}\cdot u_{0¶¶¶¶} = 0, \qquad (36)$$

где коэффициенты $\sim_i$, $i = \overline{(1{,}4)}$ учитывают: а) диссипативные эффекты ($i = 1$); б) дисперсионные эффекты ($i = 2{,}3$); в) геометрическую и физическую нелинейности материала оболочки (ПМ) ($i = 4$); l – характерная длина возмущения (длина волны деформаций); $«$ – коэффициент Пуассона;

$V=\sqrt{\dfrac{E\cdot g}{¥\cdot(1-«^2)}}$; E – модуль Юнга материала оболочки (ПМ); ¥ – его удельный вес; g – ускорение свободного падения; A – амплитуда возмущения, распространяющегося в оболочке (причем: $A\geq\dfrac{l\cdot V}{\sim_4}$). Введем обозначения:

$$M=\frac{«^2}{2}+\frac{\sim_1\cdot(1-«^2)}{2\cdot l\cdot V};\quad B=-\frac{(1-«^2)^{1/2}}{2}\cdot\left\{«^2+\frac{\sim_2+\sim_3\cdot(1-«^2)}{l^2\cdot V}\right\}.$$

Далее кратко остановимся на структуре ударных термовязкоупругих волн деформаций в цилиндрических оболочках из ПМ. Характер структуры существенно зависит от соотношения между дисперсионными (B) и диссипативными (M) параметрами. Так, при $0<M<<1$ первые несколько осцилляций будут близки к солитонам ($v\equiv u_{0¶^2}$):

$$v=3\cdot W\cdot\sec h^2\left[\sqrt{\frac{W}{4\cdot B}}\cdot(¶-W\cdot{}^2)\right],\tag{37}$$

где W – скорость ударной волны, связанная с предельными значениями [3] $v(\infty)=0,\ \ v(-\infty)=v_1$ соотношениями:

$$W=\frac{1}{2}v_1=\frac{1}{2}\Delta v,\quad \Delta v=v_1(-\infty)-v(\infty).\tag{38}$$

Расстояния между этими солитонами логарифмически растут при $M\to 0$. Если $M>M_{кр.}$, волна имеет монотонную структуру (профиль). Величина $M_{кр.}=\sqrt{4\cdot B\cdot W}$. Выше предполагалось, что $B>0$. При $B<0$ солитоны «отрицательны» и всегда находятся сзади хвоста. В этом случае осциллирующая структура ударной волны имеет иной вид – профиль волны осциллирующий и затухающий (а не нарастающий, как при $B>0$).

Таким образом, в зависимости от механических и теплофизических свойств ПМ/керамики (последние определяют знак B), используемых для изготовления и формообразования цилиндрических оболочек в процессе их уплотнения термосиловым нагружением, структура стационарной ударной термовязкоупругой волны деформаций, описанная выше, будет качественно различной. Следует также отметить, что в полученном нелинейном эволюционном уравнении (36) все коэффициенты: при нелинейном члене, M,B - состоят из двух слагаемых. Первое определяется модельными представлениями

нелинейных волн деформаций в цилиндрических оболочках, как и в [11], а второе – термовязкоупругими, механическими, нелинейными (геометрическими и физическими) свойствами материала оболочки [3]. Критерием, позволяющим учитывать последние свойства, является следующий:

$$|A|\geq|A|_{кр.}=\frac{l\cdot V}{|\sim_4|}.\tag{39}$$

Даже при $|A|<|A|_{кр.}$ все описанные выше нелинейные волнообразования в цилиндрической оболочке из ПМ возможны, однако, в рамках модели самой оболочки (приближение Кирхгофа – Лява).

ВЫВОДЫ

1. Исследована пространственно-временная эволюция тепловых видеоимпульсов в рамках моделей связной теории термоупругости при конечной скорости распространения температуры по ПМ.
2. Получены уравнения теплопроводности твердых тел (ПМ) с учетом конечной скорости распространения температуры.
3. Предложен метод расчета температурных полей при сварке в средах (ПМ) и телах конечных размеров.
4. Исследован процесс выпучивания цилиндрических оболочек из ПМ при тепловом ударе.
5. Проанализирована пространственно-временная эволюция нелинейных термовязкоупругих волн деформаций в цилиндрических оболочках из ПМ.
6. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего совершенствования и уточнения существующих инженерных методик расчета подобных задач, процессов, связанных полей в ПМ и телах конечных размеров.

Список литературы: **1.** *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 308с. **2.** *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – К.: Наукова думка, 1970. – 307с. **3.** *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наукова думка, 1982. – 260с. **4.** *Шварцбург А.Б.* Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах//Успехи физических наук. – 1998. – Т. 168, №2. – С. 85-103. **5.** *Филиппов И.Г., Егорычев О.А.* Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. – М.: Машиностроение, 1983. – 269с. **6.** *Cattaneo G.* Sulla conduzione del calore//Atti del seminario. Mat. e Fis. Univ. Modena. – 1948. – V.3. **7.** *Muller J.* Toward relativistic thermodynamics//Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1969. – V. 34. – P. 259. **8.** *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. – М.: Гостехтеоретиздат, 1954. – 796с. **9.** *Недосека А.Я.* Основы расчета сварных конструкций. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1988. – 263с. **10.** *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432с. **11.** *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках//Известия вузов. Проблемы нелинейной динамики («ПНД»). – 1995. – Т. 3, № 1. – С. 52-57.

Поступила в редколлегию 16.09.06.