

А. В. ВОРОПАЙ

## РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ А. Н. ТИХОНОВА В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Описан регуляризирующий алгоритм академика А. Н. Тихонова и его применения для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, к которым могут быть сведены задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции. В рамках регуляризирующего алгоритма рассмотрена конечномерная аппроксимация некорректной задачи и сглаживающего функционала. Описан пример решения тестовой некорректной задачи с использованием регуляризирующего алгоритма. Особое внимание уделено вопросу выбора параметра регуляризации.

**Ключевые слова:** некорректная задача, нестационарное нагружение, интегральные уравнения Вольтерра, сглаживающий функционал, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, параметр регуляризации.

**Введение.** Как известно, задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или их системами [1 – 2]. При их аналитическом решении относительно переменной времени  $t$  одним из наиболее эффективных методов является использование операционного исчисления [3 – 4]. В случае использования преобразования Лапласа дифференциальным уравнениям в пространстве изображений соответствуют алгебраические уравнения относительно переменной Лапласа  $s$ . Трудность состоит, как правило, только в обратном преобразовании сложных функций. Использование теоремы о свертке при получении оригиналов функций приводит к тому, что искомое решение представляется в виде *интеграла Дюамеля* (свертки):

$$u(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

которое при известных функциях  $u(t)$ ,  $F_2(t)$  и неизвестной функцией  $F_1(t)$  является *интегральным уравнением Вольтерра I-го рода*.

Такие уравнения встречаются при решении обратных нестационарных задач механики [5 – 6], когда зависимость изменения во времени возмущающей силы  $z(t)$  неизвестна, а известны ее косвенные проявления. Например,  $u(t)$  – это изменения во времени перемещений или деформации в некоторой точке элемента конструкции, вызванные этой силой. Классический вид интегрального уравнения (1):

$$\int_0^t K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t), \quad (2)$$

где функцию  $K(t)$  принято называть разностным ядром интегрального уравнения.

Решение интегральных уравнений Вольтерра (2) зачастую является некорректной задачей. В работах [7 – 10] подробно описаны условия некорректности задач математической физики, а также некоторые методы их решения, например *метод регуляризации Тихонова*.

Отметим, что все математические аспекты (доказательства, возможности применения метода регуляризации, сходимости, устойчивости и т.п.) детально описаны в многочисленных трудах академика А. Н. Тихонова и его последователей [8 – 10], посвященных современной теории некорректных задач математической физики. Наибольшее развитие метод регуляризации Тихонова получил в задачах астрофизики [10]. В настоящее время регулярно появляются математические работы, посвященные обобщениям метода регуляризации Тихонова [11], а также вопросам выбора параметра регуляризации [12 – 13].

В этой работе описываются прикладные аспекты *регуляризирующего алгоритма* А. Н. Тихонова, особенности его использования при решении некорректных нестационарных задач механики, а также вопросы, связанные с выбором параметра регуляризации.

**Описание регуляризирующего алгоритма.** При численном решении некорректных задач необходимо аппроксимировать исходную бесконечномерную задачу конечномерной, для которой разрабатывается алгоритм, реализуемый на ЭВМ. Рассмотрим регуляризирующий алгоритм для решения интегрального уравнения Вольтерра I-го рода.

Запишем уравнение (2) в операторной форме:

$$A \cdot z = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (3)$$

где  $Z$  и  $U$  – гильбертовы пространства;  $A$  – интегральный оператор, соответствующий ядру  $K(t)$ ;  $z$  – искомая функция, соответствующая  $z(t)$ ;  $u$  – соответствует правой части  $u(t)$ .

Конечно-разностная аппроксимация выражения (3) строится с использованием квадратурных формул (например, формул *метода прямоугольников*, *метода трапеций* и т.п.). *Дискретным аналогом* для операторного уравнения (3) является система линейных алгебраических уравнений, записанная в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица, соответствующая интегральному оператору  $A$ , элементы которой могут быть найдены согласно зависимости  $a_{i,j} = K[(i-j)\Delta t]$ ;  $\Delta t$  – шаг дискретизации по времени;  $\mathbf{z}$  – вектор, соответствующий неизвестной функции  $z(t)$ ;  $\mathbf{u}$  – вектор, соответствующий правой части  $u(t)$ , элементы которого определяются как  $u_i = u(i \cdot \Delta t)$ .

Отметим, что в случае дискретизации интегрального оператора  $A$ , соответствующего ядру  $K(t, \tau)$ , на самом деле возникнет уже новый оператор  $A_h$ , соответствующий  $K_h(t, \tau)$ , такой что, согласно А. Н. Тихонову,  $\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h_\delta^\infty$ , где  $h_\delta$  – так называемая погрешность дискретизации. Так как  $h_\delta \rightarrow 0$ , для простоты в матричном соотношении (4) и везде в дальнейшем индекс  $h$  будет опускаться.

В случае невырожденного ядра и хорошо обусловленной матрицы  $\mathbf{A}$ , возможности вычисления обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1} \subset \emptyset$ , можно получить следующее выражение для искомого вектора:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}. \quad (5)$$

Если вместо точного значения  $\bar{u} = A \cdot \bar{z}$ , нам известно приближенное значение  $u_\delta$ , такое что  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$ , где  $\delta > 0$  – погрешность задания правой части уравнения (исходных данных), то  $U = L_2[0, T]$ , где  $T$  – величина всего промежутка исследования  $T = J \cdot \Delta t$ ,  $J$  – число шагов по времени. Из физических соображений можно считать, что точное решение  $\bar{z}$ , соответствующее  $\bar{u}$ , есть непрерывная функция и имеет почти всюду производную, интегрируемую на  $[0, T]$  с квадратом, тогда естественно положить  $Z = W_2^1[0, T]$ . В описанной постановке для безразмерного уравнения (3) сглаживающий функционал А. Н. Тихонова имеет вид:

$$M^\alpha[z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2, \quad (6)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации.

В развернутом виде (6) можно записать так:

$$M^\alpha[z] = \int_0^T \left[ \int_0^t K(t-\tau)z(\tau)d\tau - u(t) \right]^2 dt + \alpha \int_0^T \left\{ z^2(t) + [z'(t)]^2 \right\} dt.$$

Решение некорректной задачи сводится к отысканию минимума сглаживающего функционала  $\inf_{z \in Z} M^\alpha[z]$  или его дискретного аналога  $\inf_{z \in Z} \hat{M}^\alpha[z]$ . Дискретизацию проще всего осуществлять на основе конечно-разностной аппроксимации с равномерным и одинаковым шагом сеток  $\Delta t = \Delta \tau = T/J$  на отрезке  $[0, T]$ . При реализации вычислений на ЭВМ исследования показали, что удовлетворительные результаты получаются уже при  $J \geq 100$ . Увеличение количества шагов во времени влечет за собой уменьшение  $\Delta t$ , что уже несет некоторое регуляризирующее действие, как показано, например, в [7]. Значительное повышение количества шагов вызывает большие затраты машинного времени. При проведении вычислительных экспериментов, было установлено, что при решении тестовых задач хорошие устойчивые результаты были достигнуты при  $J = 500$ .

Таким образом, согласно регуляризирующему алгоритму Тихонова решение интегрального уравнения Вольтерра (2) эквивалентно решению регуляризированной системы линейных уравнений:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{A}^T$  – транспонированная к  $\mathbf{A}$  матрица,  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная  $(J \times J)$  матрица, имеющая вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+1/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/\Delta t^2 & 1+1/\Delta t^2 \end{bmatrix}.$$

Решение системы (7) можно записать в явном виде:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (8)$$

**Выбор параметра регуляризации.** Определенной сложностью для ряда исследователей является оптимальный выбор параметра регуляризации. Подробно рассмотрим вопрос выбора параметра регуляризации  $\alpha$  при решении уравнений Вольтерра I-го рода с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова, реализуемого на ЭВМ.

Классическими и наиболее удобными методами выбора параметра регуляризации  $\alpha$  для большинства обратных задач являются методы минимизации по  $\alpha$  функционалов *невязки* типа:

$$\|z^\alpha - \bar{z}\|_C; \quad (9)$$

$$\|A_z z^\alpha - u\|_{L_2}^2, \quad (10)$$

где  $\bar{z}$  – точное решение,  $z^\alpha$  – приближенное, полученное с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова при различных  $\alpha$ .

Укажем, что введение и минимизация функционала (9) возможна только в некоторых случаях, например, в тестовых задачах, при тарировке и др., когда известно точное решение или его оценки. Соответственно в большинстве случаев необходимо использовать функционал вида (10). Причем, в зависимости от конкретных задач, иногда приходится искать глобальные экстремумы, иногда локальные – тогда удобно для более удачного выбора параметра регуляризации вводить дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию об искомой функции (ограничение величины и тому подобное).

Отдельно рассмотрим влияние параметра регуляризации при решении некорректных задач механики, сводящихся к интегральным уравнениям Вольтерра.

При  $\alpha = 0$  из зависимости (8) можно получить следующее соотношение:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad (10)$$

которое при сокращении справа и слева на  $\mathbf{A}^T$  совпадает с соотношением (3); однако соотношение (10) также имеет место, поскольку иногда невозможно найти  $\mathbf{A}^{-1}$ , но удается приблизительно вычислить  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ .

Из соотношения (8) видно, что чем меньше значение параметра регуляризации  $\alpha$ , тем меньшая неточность вносится в исходное уравнение (2), то есть при равных значениях функционалов желательно брать по возможности меньшие значения параметра регуляризации. Однако при очень малых значениях  $\alpha$  сглаживающий функционал Тихонова будет иметь очень слабый стабилизирующий эффект и при незначительных возмущениях правой части интегрального уравнения решение будет неустойчивым.

Так же отметим, что в (7) параметр регуляризации умножается на матрицу  $\mathbf{C}$ , элементы которой пропорциональны  $1/\Delta t^2$ , то есть матрица  $\mathbf{C}$  может состоять из достаточно больших чисел (в рассмотренном ниже примере это величины порядка  $10^9 \div 10^{10}$ ), так как при исследовании переходных процессов, к которым относится нестационарное (высокоскоростное) деформирование упругих элементов конструкции, анализируются очень короткие промежутки времени с достаточно большим числом шагов дискретизации. В связи с этим для ненормированных матриц  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ , приходится использовать достаточно малые величины параметра регуляризации ( $\alpha < 10^{-20}$ ).

Так как сглаживающий функционал Тихонова справедливо вводить только для безразмерных операторных уравнений вида (3), рассмотрим варианты перехода к безразмерной задаче:

1) В исходных уравнениях пространственные координаты относятся к длине или ширине пластины, а время делится на этот же параметр и умножается на характерную скорость (волн сдвига или изгиба), то есть переменная времени относится к времени пробега волны через пластину. Например:  $t_{II} = l/\sqrt{E/(\rho(1-\nu))}$ .

2) Перед дискретизацией время берется не в секундах, а в долях наибольшего периода по первой гармонике. Также в сглаживающем функционале слагаемое при искомой функции (нагрузке) делится на квадрат статической жесткости механической системы в исследуемой точке пластины. Для описанного ниже примера в случае использования указанного варианта обезразмеривания  $\alpha_{opt} = 10^{-2}$ .

3) Все размерные величины делятся на единичные размерные коэффициенты. С точки зрения минимизации вычислений – это самый быстрый и простой метод, но он приводит к очень маленьким величинам параметра регуляризации  $\alpha < 10^{-20}$ . Укажем, что приведенные далее расчеты были выполнены согласно этому варианту перехода к безразмерной задаче. Для этого случая возможна дополнительная нормировка матриц с целью приведения их элементов к величинам порядка  $1 \div 10$ , в таком случае  $\alpha \in [0.001; 10]$ .

Отметим, что в случае размерного операторного уравнения в обратных нестационарных задачах механики деформируемого твердого тела можно использовать модифицированный сглаживающий функционал вида:

$$\widehat{M}^\alpha [z] = \|A_z z - u\|_{L_2}^2 + (\alpha^*)^2 \cdot c_{st}^2 \left[ \omega_{\min}^2 \cdot \|z\|_{L_2}^2 + \|z\|_{L_2}^2 \right],$$

где  $\alpha^*$  – безразмерный параметр регуляризации в размерной задаче;  $c_{st}$  – статическая жесткость системы в исследуемой точке;  $\omega_{\min}$  – минимальная собственная частота колебаний пластины. Для описанного в статье примера  $\alpha_{opt}^* = 10^{-5}$ .

**Пример решения обратной некорректной задачи для упругодеформируемой пластины.** Рассмотрим детально численное решение обратной некорректной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины средней толщины, аналогичной изложенной в [14]. Поскольку здесь будет описан вычислительный эксперимент по решению обратной задачи, то, в отличие от реальных экспериментальных исследований, точная зависимость

возмущающей силы будет известна. Соответственно для такой тестовой задачи имеется дополнительная возможность оценки точности идентификации внешней нагрузки при разных значениях параметра регуляризации.

При идентификации неизвестной нестационарной нагрузки  $P(t)$ , действующей на пластину, по известным изменениям прогиба  $w(t)$  в некоторой точке пластины, вызванным этой силой, как раз необходимо решать интегральное уравнение Вольтера I-го рода

$$\int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau = w(t), \quad (11)$$

где  $K(t)$  – его ядро, которое определяется на основании аналитического или численно-аналитического решения прямой задачи (то есть системы дифференциальных уравнений в частных производных). Как показано в [5 – 6, 11] ядро  $K(t)$  для прямоугольных пластин имеет следующий вид:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \Omega_{jkn} \cdot \sin \omega_{jkn}(t).$$

Порядок проведения вычислительного эксперимента по решению обратной некорректной задачи был принят следующим:

- Предварительно задавалась возмущающая нагрузка  $\bar{P}(t)$  (полуволна синусоиды определенной амплитуды).

- Из соотношения (11) определялись значения прогиба  $\bar{w}(t)$  при действии заданной нагрузки.

- Вместо точных значений  $w(t)$  в качестве исходных данных для обратной задачи задавались приближенные значения  $w_{\delta}(t)$ . Возмущение с уровнем  $\delta = 10\%$  осуществлялось по зависимости:

$$w_{\delta}(t) = \bar{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t),$$

где  $w_{\max}$  – максимальное значение прогиба пластины при действии нагрузки  $\bar{P}(t)$ ,  $Rnd(t)$  – случайные числа в диапазоне  $[-1; 1]$ .

- Уравнение (11) решалось при точно заданной функции  $\bar{w}(t)$  и возмущенной  $w_{\delta}(t)$  правой части.

- Производился выбор оптимального параметра регуляризации.

- Производилась оценка точности идентификации по заданной возмущающей нагрузке  $\bar{P}(t)$ .

При расчетах срединная плоскость пластины совпадала с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат.

Расчеты производились при следующих значениях:  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $h = 0.04 \text{ м}$ ;  $l = 0.6 \text{ м}$ ,  $m = 0.4 \text{ м}$ . Координаты точки приложения возмущающей нагрузки:  $x_0 = 0.4 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0.3 \text{ м}$ . Координаты точки, значения прогиба в которой использовались при решении обратной задачи:  $x_s = 0.25 \text{ м}$ ,  $y_s = 0.1 \text{ м}$ . Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье  $50 \times 50$ .

На рис. 1 показаны изменения во времени прогиба  $w_s(t) = \bar{w}(t)$ , найденного в результате решения прямой задачи – точные значения правой части уравнения (жирная кривая) и  $w_{\delta}(t)$  – неточно заданные значения правой части, используемые в качестве исходных данных (тонкая кривая).

Неизвестная возмущающая нагрузка  $P(t)$  определялась из выражения вида (8). Если выписать матрицу при векторе, соответствующем искомой нагрузке для регуляризированной системы линейных уравнений, то видно, что она будет иметь два слагаемых  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})$ . Очевидно, что элементы матрицы  $\alpha \cdot \mathbf{C}$ , содержащие параметр регуляризации не должны превышать или быть значительно меньше элементов матрицы  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ . Для данного расчетного случая максимальные значения элементов матрицы  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  были порядка  $2 \cdot 10^{-18}$ , минимальные значения для взятых по модулю элементов этой матрицы  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  были порядка  $5 \cdot 10^{-28}$ . Максимальное значение элементов матрицы  $\mathbf{C}$  для исследуемого промежутка времени было равно  $\max(\mathbf{C}) = 7.813 \cdot 10^9$  или порядка  $10^{10}$ . Следовательно, для описанного случая параметр регуляризации  $\alpha$  должен находиться примерно в диапазоне от  $10^{-18} \cdot 10^{-9} = 10^{-27}$  до  $10^{-28} \cdot 10^{-9} = 10^{-37}$ , сдвинутом на  $10^{+2}$ . Таким образом в настоящей работе величина параметра регуляризации исследовалась в диапазоне  $\alpha \in [10^{-35}; 10^{-25}]$ . Укажем, что на некоторых из следующих рисунков для удобства анализа показан не весь диапазон, а только его часть.

Причем, при решении тестовой задачи, хорошо видно, что при значениях  $\alpha = 10^{-25}$  приближенное решение получалось недостаточно точным, а максимальная амплитуда получалась сильно заниженной, рис. 2, где жирной кривой соответствует точная сила  $\bar{P}(t)$ , а тонкой – идентифицированная. Это обусловлено тем, что слагаемое  $\alpha \cdot \mathbf{C}$  превышает матрицу  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ , содержащую ядра интегрального уравнения. При всех  $\alpha > 10^{-25}$  ситуация усугубляется и найденное приближенное решение не имеет смысла.

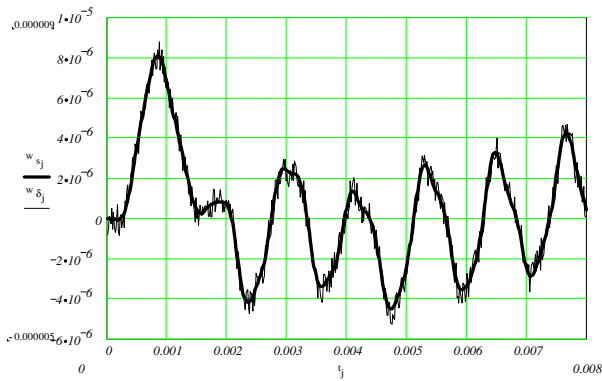


Рис. 1 – Исходные данные для обратной задачи.

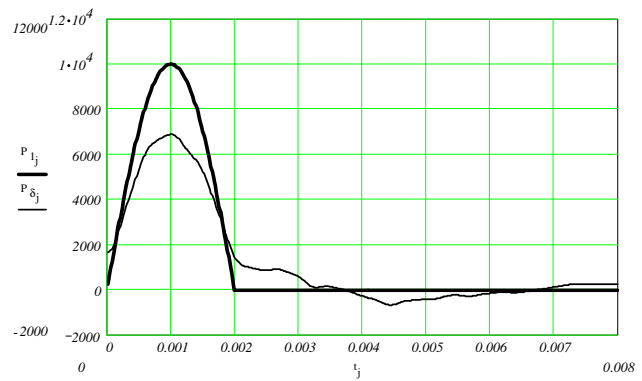


Рис. 2 – Возмущающая и определенная приближенно нагрузка.

Для выбора оптимальных значений параметра регуляризации  $\alpha$  при решении регуляризированной системы линейных уравнений (5) исследовались несколько функционалов, графические зависимости которых приведены ниже. Укажем, что на всех этих графиках параметр регуляризации для наглядности отложен вдоль оси абсцисс в логарифмической шкале.

На рис. 3 показаны функционалы типа невязки, на основе которых зачастую выбирается параметр регуляризации:

В случае неточно заданной правой части интегрального уравнения  $w_\delta(t)$  функционал невязки можно записать в виде:  $\|A \cdot P^\alpha - w_\delta\|_{l_2}^2$  (рис. 3, а); в тестовой задаче мы можем увидеть вид этого функционала для возмущенной правой части  $\bar{w}(t) - \|A \cdot P^\alpha - w\|_{l_2}^2$  (рис. 3, б).

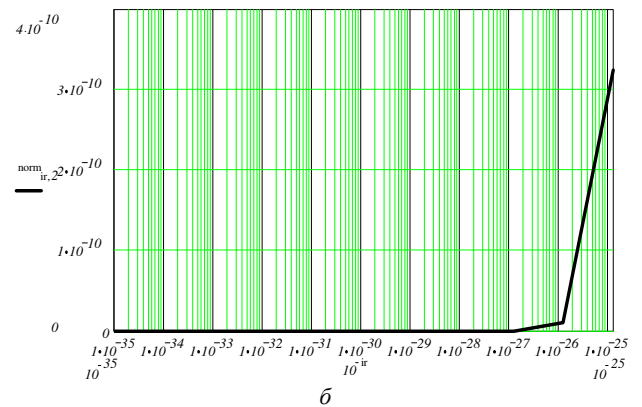
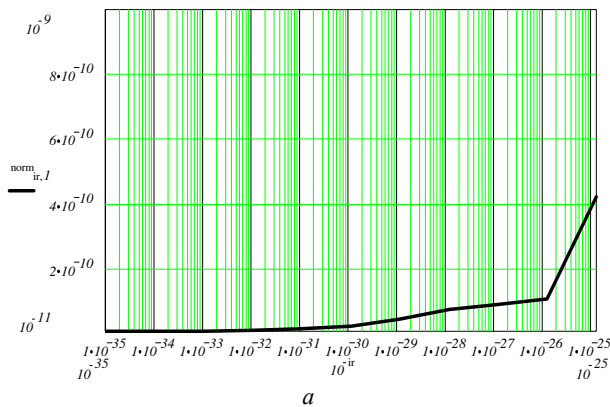


Рис. 3 – Вид функционалов типа невязки  
а – невязка для возмущенной правой части; б – невязка для точно заданной правой части.

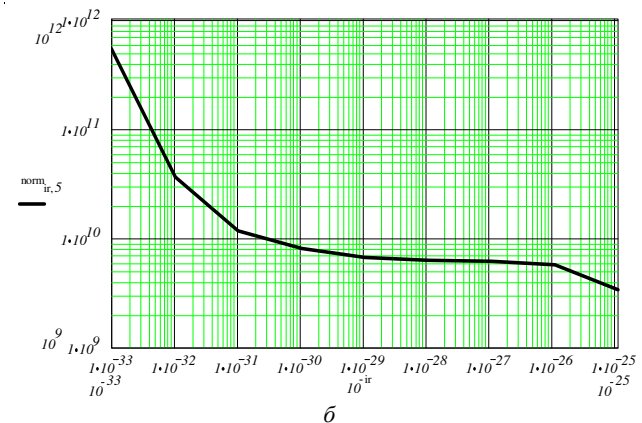
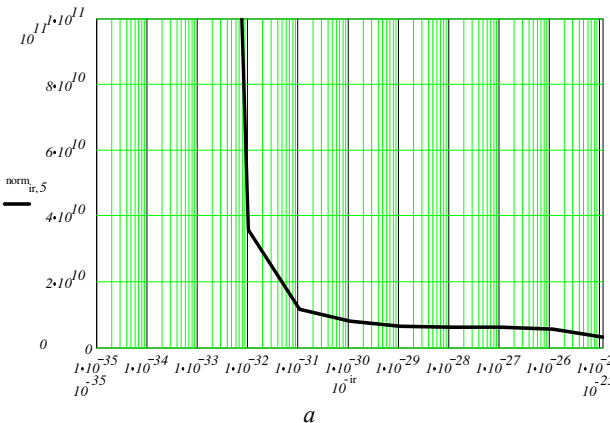


Рис. 4 – Вид функционала «суммарной нагрузки»  
а – ось ординат отложена в обычной шкале; б – ось ординат отложена в логарифмической шкале.

Укажем, что функционал невязки для точно заданной правой части должен стремиться к нулю и на рис. 3 б

видно, что при значениях  $\alpha < 10^{-27}$  значения функционала практически приближаются к нулю. Однако, в случае неточно заданной (возмущенной) правой части значения функционала должны стремиться не к нулю, а к некоторой малой константе, пропорциональной уровню шума  $\delta$ . Как правило, во всех реальных задачах присутствуют погрешности измерения, усиления, преобразования и тому подобное, в этом случае необходимо искать не глобальный, а локальный экстремум функционала. На рис. 3, а можно выделить диапазон выбора параметра регуляризации  $\alpha \in [10^{-31}; 10^{-26}]$ .

Для уменьшения этого диапазона необходимо вводить дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию. Например, функционал «суммарной нагрузки», который можно трактовать как представление минимума энергии (минимума работы возмущающей нагрузки) –  $\|p^\alpha\|_2^2$  (рис. 4, а). На рис. 4, б показан этот же функционал, только для удобства анализа ось ординат также отложена в логарифмической шкале.

Отметим, что требуемые перемещения пластины будут вызваны минимальной, но не нулевой силой, а следовательно, в исследуемом для параметра регуляризации диапазоне  $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$ .

Интересное уточнение можно получить, введя ограничение на отклонение вычисленного по идентифицированной силе прогиба от исходного:  $\|A \cdot P^\alpha - w_\delta\|_C$  (рис. 5). Рассматривая этот функционал в совокупности с предыдущими (рис. 2 – 4), можно предположить, что  $\alpha_{opt} = 10^{-27}$ .

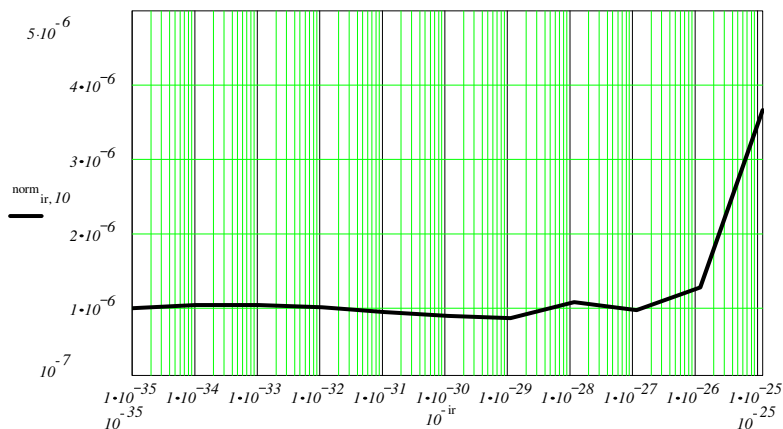


Рис. 5 – К выбору параметра регуляризации.

Также, когда имеется возможность использовать дополнительную априорную информацию о «гладкости» идентифицируемой нагрузки можно исследовать дополнительные функционалы «гладкости»:  $\|(P^\alpha)\|_2^2$  – рис. 6, а и  $\|(P^\alpha)\|_C$  – (рис. 6, б). Изучая функционалы на (рис. 6), можно также выделить  $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$  и особенно  $\alpha = 10^{-27}$ .

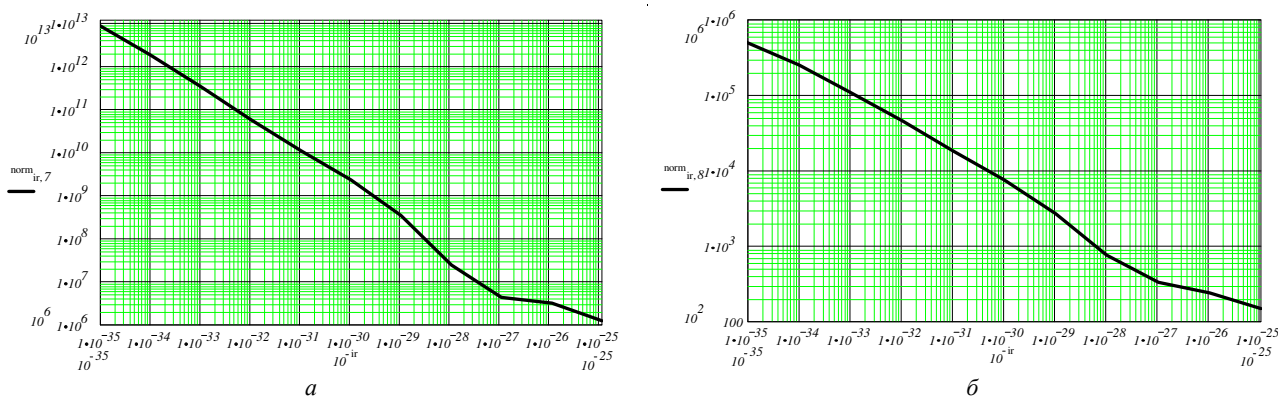


Рис. 6 – Влияние параметра регуляризации на гладкость идентифицируемой нагрузки а – функционал «гладкости» в метрике  $l_2$ ; б – функционал «гладкости» в метрике  $C$ .

В тестових задачах, а також при проведенні експериментальних дослідженнях з точно відомими таривочними навантажками виникає можливість оцінити точність рішення оберненої задачі (відносительну погрешність ідентифікації навантаження) по наступній залежності:

$$\delta_{id} = \frac{\int_0^t [P^\alpha(t) - \bar{P}(t)] dt}{\int_0^t \bar{P}(t) dt} \approx \frac{\|P^\alpha - \bar{P}\|_{L_1}}{\|\bar{P}\|_{L_1}}$$

Графік «відносительної погрешності ідентифікації навантаження» показаний на рис. 7.

На рис. 7 явно видно, що для розглянутого прикладу розрахунок найкращі результати рішення оберненої некорректної задачі отримані при значеннях параметра регуляризації  $\alpha_{opt} = 10^{-27}$  (як і передбачалося раніше, з аналізу функціоналів представлених на рис. 2 – 6).

Функціонал виду  $\|P^\alpha - \bar{P}\|_{l_2}^2 / \|\bar{P}\|_{l_2}^2$  на рис. 8 має ще більш виражений екстремум при  $\alpha_{opt} = 10^{-27}$ .

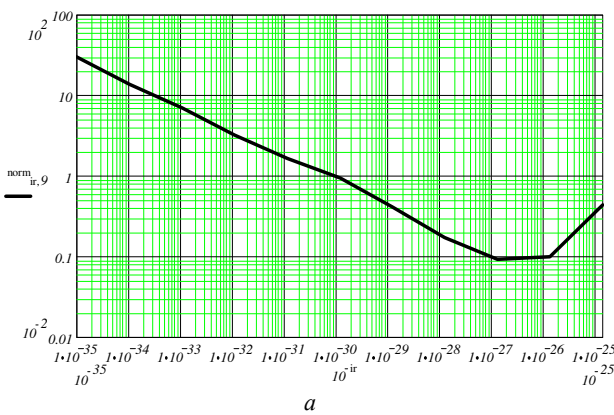


Рис. 7 – Оцінка «точності» ідентифікації.

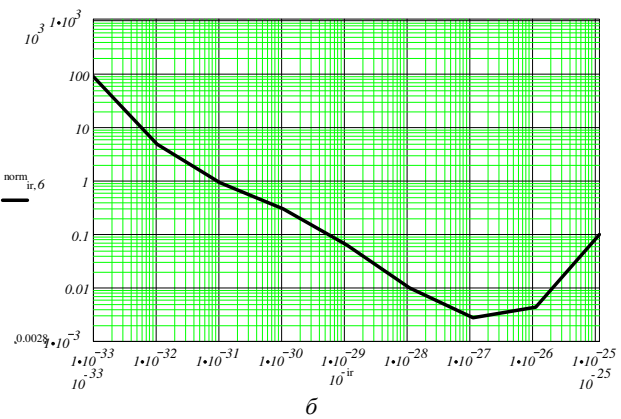


Рис. 8 – Вибір оптимального параметра регуляризації.

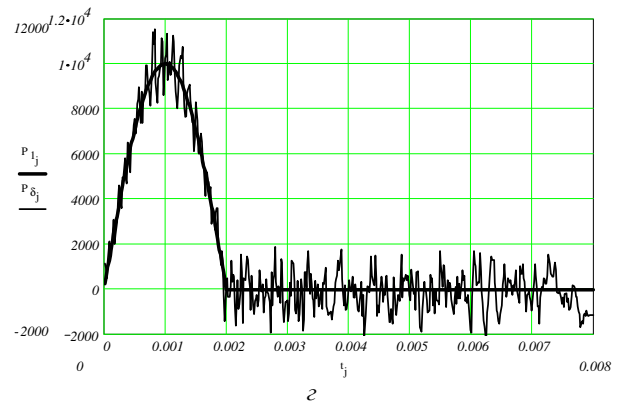
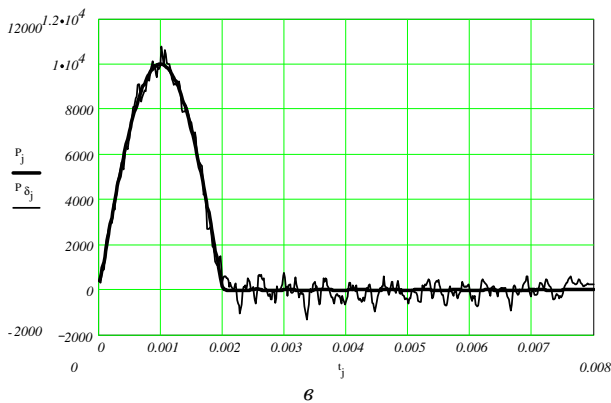
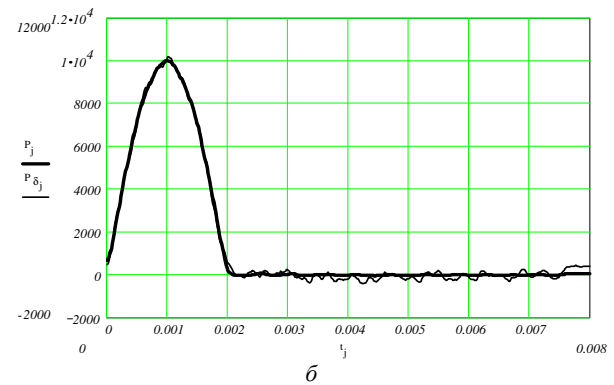
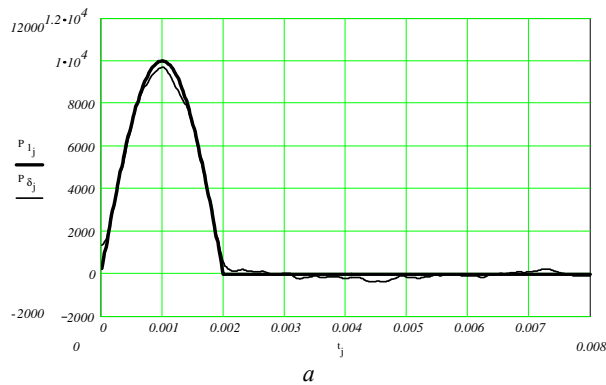


Рис. 9 – Зміна ідентифікованої навантаження в часі  
 а – параметр регуляризації  $\alpha = 10^{-26}$ ; б –  $\alpha = 10^{-27}$ ; в –  $\alpha = 10^{-28}$ ; з –  $\alpha = 10^{-29}$ .

На рис. 9 показаны графики идентифицированной внешней нагрузки при различных значениях параметра регуляризации – тонкая кривая и тестовая нагрузка – полуволна синусоиды (толстая кривая).

На рис. 9, а параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-26}$  – показаны в целом неплохие результаты, однако из-за «большой»  $\alpha$  частично «занижены» максимальные значения. На рис. 9, б  $\alpha = \alpha_{opt} = 10^{-27}$  – видно хорошее совпадение тестовой и идентифицированной нагрузки. На рис. 9, в  $\alpha = 10^{-28}$  – начинают сильно проявляться эффекты, вызванные «зашумлением» исходных данных. Рис. 9, г соответствует значению параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-29}$ , этот рисунок демонстрирует, что при  $\alpha \leq 10^{-29}$  – влияние сглаживающего функционала А. Н. Тихонова недостаточно.

**Выводы.** В настоящей работе описано применение регуляризирующего алгоритма академика А. Н. Тихонова для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, на примере решения обратной некорректной задачи идентификации неизвестной возмущающей нагрузки, вызывающей нестационарное деформирования элемента конструкции в виде пластины. Применение РА Тихонова позволяет получать достаточно устойчивое решение и дает хорошие результаты при «зашумленных» исходных данных. Однако серьезное внимание необходимо уделять выбору параметра регуляризации, желательно выбирать его на основе анализа нескольких функционалов, базирующихся на использовании априорной информации по определяемой функции. Существенное влияние на величину параметра регуляризации оказывают процедуры перехода к безразмерным операторным уравнениям перед введением сглаживающего функционала или нормирования матрицы.

**Список литературы:** 1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наукова думка, 1982. – 400 с. 3. Лурье А.И. Операционное исчисление. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 432 с. 4. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. 5. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воронай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков ХНАДУ, 2004. – 392 с. 6. Янютин Е.Г., Воронай А.В., Поваляев С.И., Янчевский И.В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с. 8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с. 9. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация // Главная редакция физико-математической литературы. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 10. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с. 11. Xiao-Juan Yang, Li Wang. A modified Tikhonov regularization method // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 288, November 2015, – pp. 180 – 192. 12. Hochstenbach M.E., Reichel L., Rodriguez G. Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 273, 1 January 2015, Pages 132 – 149. 13. Gazzola S., Novati P. Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 256, 15 January 2014, – pp. 180 – 195. 14. Янютин Е.Г., Воронай А.В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Межд. Научн. Ж. Прикл. Мех. – Т. 39, – №10, – 2003, – С. 151 – 155.

**Bibliography (transliterated):** 1. Filippov, A. P. *Kolebaniya deformiruemyyh sistem*. Moscow: Mashinostroenie, 1970. Print. 2. Guz', A. N., and V. D. Kubenko. *Metody rascheta obolochek. Vol. 5. Teoriya nestacionarnoy azerogidrouprugosti obolochek*. Kiev: Naukova dumka, 1982. Print. 3. Lur'e, A. I. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Gosteh teorizdat, 1950. Print. 4. Ditkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju*. Moscow: Vysshaja shkola, 1965. Print. 5. Janjutin, E. G., et al. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya jelementov konstrukcij. Monografija*. Kharkov: KhNADU, 2004. Print. 6. Janjutin, E. G., et al. *Identifikacija nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografija v 2-h chastjah. Chast' II*. Kharkov: Izd-vo KhNADU, 2010. Print. 7. Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, programmy. Spravochnoe posobie*. Kiev: Nauk. dumka, 1986. Print. 8. Tihonov, A. N., and V. Ja. Arsenin. *Metody reshenija nekorrektno postavlennyh zadach*. Moscow: Nauka, 1979. Print. 9. Tihonov, A. N., et al. *Reguljarizirujushhie algoritmy i apriornaja informacija*. Moscow: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, 1983. Print. 10. Goncharskij, A. V., A. M. Cherepashuk and A. G. Jagola. *Chislennye metody reshenija obratnyh zadach astrofiziki*. Moscow: Nauka, 1978. Print. 11. Yang, Xiao-Juan, and Li Wang. "A modified Tikhonov regularization method." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 288. 2015. 180–192. Print. 12. Hochstenbach, M. E., L. Reichel and G. Rodriguez. "Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 273. 2015. 132–149. Print. 13. Gazzola, Silvia, and Paolo Novati. "Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 256. 2014. 180–195. Print. 14. Janjutin, E. G., and A. V. Voropaj. "Identifikacija impul'snogo nagruzhenija uprugoj prjamougol'noj plastiny." *Mezhd. Nauchn. Zh. Prikl. Meh.* Vol. 39, No. 10. 2003. 151–155. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

**Воронай Олексій Валерійович** – кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Воронай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.