

УДК 621.372.81

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЮЮ

Э. И. Велиев, А. И. Носич, В. П. Шестопалов

При помощи строгого метода [8] изучаются дисперсионные свойства круглого волновода с продольной щелью. При произвольных параметрах волновода получены дисперсионные уравнения для четных и нечетных H - и E -волн. В случае узкой щели их корни, соответствующие вытекающим волнам, получены в аналитическом виде с оценкой погрешности.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о распространении волн в регулярном волноводе с продольной щелью является примером исследования открытой структуры, где электромагнитные поля существуют в неограниченной области. Первоначально для анализа таких структур применялись приближенные методы [1, 2], позволившие качественно выяснить их свойства. Исключением является лишь полуэллиптический волновод со щелью и с бесконечным фланцем, для которого решение было получено еще в 1946 г. А. А. Пистолькорсом методом разделения переменных в эллиптической системе координат [3] (некоторые численные результаты для этой структуры можно найти также в [4]). На практике чаще всего используются волноводы прямоугольного и круглого сечений. Влияние узкой щели на спектр собственных частот прямоугольного волновода с бесконечным фланцем детально изучено в [5]. Что же касается круглого продольно-щелевого волновода, то для него всестороннее исследование задачи о собственных колебаниях до сих пор не было проведено, хотя отдельные вопросы затрагивались в [6, 7]. Целью данной работы является восполнение такого пробела, в частности, выяснение вопроса о снятии поляризационного вырождения при наличии щели, а также более подробное изучение свойств щелевой волны [3, 5, 12]. Для решения задачи применяется математически строго обоснованный метод [8, 9].

Пусть круглый волновод радиуса a имеет щель с угловым размером 2θ . Поверхность волновода предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей; зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$; угловая координата φ цилиндрической системы координат (r, φ, z) отсчитывается от середины щели.

Известно, что в такой структуре сохраняется деление на волны H - и E -типа, поэтому их можно рассматривать раздельно.

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ H -ВОЛН

Будем искать поле в волноводе и вне его в виде бегущей волны H -типа

$$(1) \quad H_z(r, \varphi, z) = H(r, \varphi) e^{i h z} \quad (\text{Im } h > 0).$$

Функция $H(r, \varphi)$, описывающая поле в поперечном сечении структуры, должна удовлетворять однородному волновому уравнению, граничным усло-

виям Неймана, условию Мейкснера на ребре и условию излучения для открытого волновода.

Для H -волны функцию $H(r, \varphi)$ можно представить в виде потенциала двойного слоя [11] с неизвестной плотностью $\mu(\varphi)$, которая совпадает с плотностью поверхностного тока:

$$(2) \quad H(r, \varphi) = \int_L \mu(\varphi_l) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(g|p-p_l|) dl,$$

где $g^2 = k^2 - h^2$; $k = \omega/c$; $p = \{r, \varphi\}$; $p_l = \{a, \varphi_l\} \in L$; L — контур поперечного сечения волновода; $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля 1-го рода.

Поскольку функция $\mu(\varphi)$ периодична с периодом 2π , разложим ее в ряд Фурье

$$(3) \quad \mu(\varphi) = \frac{1}{2\pi ga} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{im\varphi}.$$

Требую выполнения граничных условий на поверхности волновода и отсутствия тока на щели, приходим к системе функциональных уравнений относительно μ_m

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{im\varphi} = 0, & |\varphi| < \theta, \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m J_m' H_m^{(1)'} e^{im\varphi} = 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi, \end{cases}$$

где J_m' , $H_m^{(1)'}$ — производные функций Бесселя и Ханкеля от аргумента ga .

При помощи метода задачи Римана — Гильберта [8, 9] система (4) сводится к эквивалентной бесконечной системе однородных линейных алгебраических уравнений

$$(5) \quad \mu_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} \mu_n,$$

где

$$\begin{aligned} A_{00} &= -f_0 W_0(-u); & A_{0n} &= -|n| (-1)^n \delta_n W_n(-u); \\ A_{m0} &= \frac{(-1)^m}{m} f_0 V_{m-1}^{-1}(-u); & A_{mn} &= \frac{|n|}{m} (-1)^{n+m} \delta_n V_{m-1}^{n-1}(-u); \\ f_0 &= i\pi (ga)^2 J_0' H_0^{(1)'}; & \delta_n &= 1 + \frac{i\pi (ga)^2}{|n|} J_n' H_n^{(1)'}, \end{aligned}$$

а функции $W_n(-u)$, $V_{m-1}^{n-1}(-u)$ определены в [8], причем $u = \cos \theta$. Отметим, что компоненты полей выражаются через неизвестные μ_m в виде рядов. Например,

$$(6) \quad H_z = e^{ihz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m \begin{cases} J_m(gr) H_m^{(1)'}(ga) & r \leq a, \\ H_m^{(1)}(gr) J_m'(ga) & r \geq a. \end{cases} e^{im\varphi}$$

Остальные компоненты определяются из (6) при помощи уравнений Максвелла.

Поскольку рассматриваемая структура имеет плоскость симметрии $\varphi=0$, то все колебания, возможные в ней, разделяются на четные ($\mu_m = \mu_{-m}$) и нечетные ($\mu_m = -\mu_{-m}$) относительно $\varphi=0$. Действительно, если из (5) вычесть или сложить с ней такую же систему для μ_{-m} , то получим, что система (5) эквивалентна следующим двум системам уравнений.

$$(7) \quad \alpha_m^+ = A_{m0}^+ \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^+ \alpha_n^+, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

$$(8) \quad \alpha_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^- \alpha_n^-, \quad m=1, 2, \dots,$$

где $\alpha_0 = \mu_0$; $\alpha_m^\pm = \mu_m \pm \mu_{-m}$; $A_{mn}^\pm = A_{mn} \pm A_{-mn}$.

Системы (7), (8) независимы друг от друга, поэтому их можно рассматривать отдельно. Приравняв нулю их определители, получаем дисперсионные уравнения соответственно для четных и нечетных H -волн в круглом волноводе со щелью. Оценки функций, входящих в матричные элементы A_{mn}^\pm , при $m, n \rightarrow \infty$ имеют вид [8]

$$|\delta_n| < \frac{C(ga)}{n^2}, \quad |V_{m-1}^{n-1}| < \frac{C(\theta)}{\left| m-n - \frac{1}{2} \right|} \left(\frac{m}{n} \right)^{1/2},$$

откуда следует, что $\sum_{m,n} |A_{mn}^\pm| < \infty$, т. е. определители систем (6), (7) нормальные, поэтому комплексные корни дисперсионных уравнений при любых a и θ можно искать численно, при помощи метода редукции. Если же щель узка, то решение дисперсионных уравнений можно получить аналитически, с оценкой погрешности.

2. ДИСПЕРСИЯ ЧЕТНЫХ H -ВОЛН

Для узких щелей конечный порядок имеют лишь элементы определителя системы (7), входящие в нулевой столбец, нулевую строку и диагональные члены. Поэтому дисперсионное уравнение для четных H -волн имеет вид

$$(9) \quad \left(1 - A_{00}^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{0n}^+ A_{n0}^+}{1 - A_{nn}^+} \right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - A_{mm}^+) + O(\theta^2) = 0.$$

Рассмотрим сначала симметричные H_{0n} -волны, возмущенные щелью. Для них уравнение (9) сводится к

$$(10) \quad i\pi (ga)^2 J_0' H_0^{(1)'} \left(1 + 2\xi_0 \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} + O\left(\theta^2 \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) = 0,$$

где

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n(1-\delta)}$$

Корни (10) можно определить, например, методом Ньютона; они равны

$$(11) \quad ga = v_{0n}' - \frac{\ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2}}{4v_{0n}'} \left(1 + 2\xi_0 \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) + O \left(\ln^{-3} \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

где аргументом цилиндрических функций является $v_{0m}' - m$ -й корень функции $J_0'(x)$.

Полученное выражение для поправок к критической частоте H_{0n} -волн уточняет аналогичную величину, приведенную в [7], и совпадает с ней с точностью до членов порядка $O(\ln^{-2} \sin(\theta/2))$.

Что касается высших типов четных H_{mn} -волн, то для них (9) сводится к уравнению

$$(12) \quad i\pi (ga)^2 J_m' H_m^{(4)'} \left(1 + \frac{\xi_m}{2} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \\ + \frac{1}{2} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{2f_0} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right) + O \left(\ln^{-3} \sin \frac{\theta}{2} \right) = 0,$$

где

$$\xi_m = \frac{1}{m} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{\delta_n}{n(1-\delta_n)},$$

которое дает следующие значения комплексных корней:

$$(13) \quad ga = v_{mn}' - \frac{\ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2}}{4v_{mn}' \left(1 - \frac{m^2}{v_{mn}^2} \right)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_0} + \xi_m \right) \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right] + \\ + O \left(\ln^{-3} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Отметим, что из (11), (13) следует, что мнимая часть добавки к критической частоте отрицательна и меньше реальной части на порядок по параметру малости $\ln^{-1} \sin(\theta/2)$.

3. ЩЕЛЕВАЯ ВОЛНА

Уравнение (9) описывает также дисперсию квазистатической щелевой H -волны [3, 4, 5, 12, 13]. Соответствующий ей корень (9) находится в области $|ga| \ll 1$, поэтому дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$(14) \quad 1 + 2(ga)^2 \left[1 + \frac{i\pi}{4} (ga)^2 \right] \ln \sin \frac{\theta}{2} = 0.$$

Корень (14) равен

$$(15) \quad ga = \left(-2 \ln \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{i\pi}{16} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Квазисобственную функцию распределения тока $\mu(\varphi)$, отвечающего щелевой волне, можно получить в явном виде с оценкой погрешности. Для этого необходимо решить систему (7), считая μ_0 известной величиной, при

ga , равном (15). Оценка нормы матрицы системы (7) дает

$$q = \max_{m \neq n} \sum_{n \neq m} \left| \frac{A_{mn}^+}{1 - A_{mm}^+} \right| < C |ga|^2 \sqrt{1-u^2},$$

откуда следует, что в случае щелевой волны для нахождения μ_m можно применить метод последовательных приближений.

Предполагая, что $q < 1$, в нулевом приближении, используя производящую функцию для полиномов Лежандра, получаем [10]

$$(16) \quad \mu(\varphi) = \begin{cases} 0, & |\varphi| < \theta, \\ \frac{\mu_0}{\pi} \left(-2 \ln \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} \ln \frac{\sin \frac{|\varphi|}{2} - \left(\frac{\cos \theta - \cos \varphi}{2} \right)^{1/2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \theta < |\varphi| \leq \pi, \end{cases}$$

$\mu(\varphi)$ определен с погрешностью

$$\Delta \sim O \left(\frac{q |ga|^2}{1-q} \right)$$

Ток (16) распределен по поверхности волновода симметрично, спадая к нулю при $x \rightarrow 0$ (x — расстояние от ребра) по закону $x^{1/2}$ несмотря на то, что Фурье-коэффициенты $\mu_m = \mu_{-m} = 1/2 \alpha_m^+$ вычислялись приближенно, с погрешностью Δ . Аналогичным образом получаются и выражения для полей, соответствующих щелевой волне. Например, для апертурного поля.

$$(17) \quad E_\varphi|_{r=a} = \begin{cases} -e^{i\theta z} \frac{2k}{\pi g} \mu_0 \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2} (\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}}, & |\varphi| < \theta, \\ 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi. \end{cases}$$

Картину силовых линий электрического поля щелевой волны получаем, построив линии равных амплитуд для компоненты H_z , которая также удовлетворяет граничным условиям и имеет требуемое поведение на ребре, а построенное по нему распределение поля в поперечном сечении волновода (рисунок) показывает, что оно сосредоточено в области щели.

4. ДИСПЕРСИЯ НЕЧЕТНЫХ H -ВОЛН

Поскольку при $\theta \ll 1$ лишь диагональные элементы системы уравнений (8) имеют конечный порядок, то дисперсионное уравнение для нечетных H -волн имеет вид

$$(18) \quad \prod_{m=1}^{\infty} (1 - A_{mm}^-) + O(\theta^4) = 0.$$

Его корни равны

$$(19) \quad ga = v_{mn}' + \frac{m^2 a^2}{v_{mn}' \left(1 - \frac{m^2}{v_{mn}'^2} \right)} + O(\theta^4)$$

и соответствуют нечетным H_{mn} -волнам круглого продольно-щелевого волновода.

Заметим, что добавка к критической частоте (19) в рассматриваемом приближении является чисто реальной. Для того чтобы определить мнимую часть добавки, необходимо учесть внедиагональные члены определителя системы (8). Громоздкие вычисления показывают, что мнимая часть добавки отрицательна и имеет порядок $O(\theta^4)$.

5. ДИСПЕРСИЯ E-ВОЛН

Представим поле в волноводе с продольной щелью в виде бегущей волны E-типа

$$(20) \quad E_z(r, \varphi, z) = E(r, \varphi) e^{ikz} \quad (\text{Im } k > 0).$$

В отличие от H-волн функцию $E(r, \varphi)$ будем искать в виде потенциала простого слоя с плотностью $\rho(\varphi)$ [11]. Как и ранее, задача сводится к решению однородной системы алгебраических уравнений относительно Фурье-коэффициентов ρ_m

$$(21) \quad i\pi J_m H_m^{(1)} \rho_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{mn} \rho_n, \\ m=0, \pm 1, \dots,$$

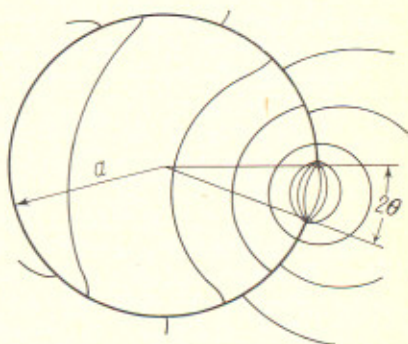
где

$$B_{00} = W_0(u); \quad B_{0n} = \varepsilon_n W_n(u);$$

$$B_{m0} = -\frac{1}{m} V_{m-1}^{-1}(u);$$

$$B_{mn} = -\frac{1}{m} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}(u);$$

$$\varepsilon_n = 1 - i\pi |n| J_n H_n^{(1)},$$



Линии $H_z = \text{const}$ при $\theta = 10^\circ$

которая разделяется на две независимые системы для четных и нечетных E-волн.

$$(22) \quad i\pi J_m H_m^{(1)} \beta_m^+ = B_{m0}^+ \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^+ \beta_n^+, \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

$$(23) \quad i\pi J_m H_m^{(1)} \beta_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^- \beta_n^-, \quad m=1, 2, \dots,$$

где

$$\beta_0 = \rho_0; \quad \beta_m^\pm = \rho_m \pm \rho_{-m}; \quad B_{mn}^\pm = B_m \pm B_{-m}.$$

Приравнивая нулю определители систем (22), (23), получаем соответствующие дисперсионные уравнения, которые можно решить аналитически с оценкой погрешности при узких щелях ($\theta \ll 1$).

Выделяя диагональные элементы определителя системы (22), получаем дисперсионное уравнение для четных E-волн

$$(24) \quad \prod_{m=0}^{\infty} (i\pi J_m H_m^{(1)} - B_{mm}^+) + O(\theta^4) = 0.$$

Решение (24) для E_{0n} -волн имеет вид

$$(25) \quad ga = v_{0n} - \frac{v_{0n}}{8} \theta^2 + O(\theta^4),$$

что совпадает с аналогичным выражением, полученным в [7].

Для высших типов четных E_{mn} -волн

$$(26) \quad ga = v_{mn} - \frac{v_{mn}}{4} \theta^2 + O(\theta^4),$$

где v_{mn} — n -й корень функции $J_m(x)$.

Дисперсия нечетных E_{mn} -волн в случае узких щелей описывается уравнением

$$(27) \quad \prod_{m=1}^{\infty} (i\pi J_m H_m^{(1)} - B_{mm}^-) + O(\theta^8) = 0,$$

корни которого равны

$$(28) \quad ga = v_{mn} - \frac{v_{mn} m^2}{8} \theta^4 + O(\theta^6).$$

Как и в случае нечетных H -волн, вычисление мнимой добавки к собственной частоте требует учета внедиагональных членов определителя. Она также отрицательна и имеет порядок $O(\theta^4)$ для четных E -волн и $O(\theta^8)$ для нечетных E -волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как и следовало ожидать, продольная щель сильнее возмущает H -волны круглого волновода, чем E -волны, так как в первом случае она более эффективно пересекает линии поверхностного тока, чем во втором. По этой причине влияние щели носит емкостный характер для H -волн и индуктивный для E -волн. Это приводит к тому, что, как вытекает из формул (11), (13), (19), (25), (26), (28), реальная часть добавки к критической частоте положительна для H -волн и отрицательна для E -волн, и тем самым снимается, например, вырождение E_{1n} - и H_{0n} -волн. Кроме того, появление щели снимает поляризационное вырождение у высших типов волн — добавка к критической частоте всегда больше для четных волн, чем для нечетных. Это можно объяснить тем, что в случае четных волн тангенциальные поля по разные стороны от середины щели излучают в фазе (сильноизлучающая щель), а в случае нечетных — в противофазе (слабоизлучающая щель).

Это хорошо согласуется с результатами работы [2], полученными приближенным методом поперечного резонанса. Кроме того, сравнение с прямоугольным щелевым волноводом [5] указывает на сходство свойств обеих структур.

В соответствии с принятой классификацией волны круглого волновода со щелью, отвечающие найденным здесь корням, являются квазисобственными (неспектральными) быстрыми вытекающими волнами. При $\theta \rightarrow 0$ вытекающие волны переходят в обычные волноводные волны. Исключением является лишь щелевая H -волна, так как для нее $g \rightarrow 0$, чему в закрытом волноводе соответствует поле $H_z = \text{const} e^{i\alpha z}$. Однако из уравнений Максвелла вытекает [14], что $\text{const} = 0$, так что $g = 0$ не отвечает какой-либо реальной волне (в случае акустических колебаний подобная волна существует и называется поршневой). Этим и объясняется тот факт, что поле щелевой волны сосредоточено в области щели.

В этой статье основное внимание уделено изучению собственных колебаний круглого волновода в случае узкой продольной щели. Для выяснения особенностей этой открытой структуры в случае произвольной ширины щели необходимо исследование полных дисперсионных уравнений, соответствующих (7), (8) и (22), (23), численными методами. Такая работа

проделана и ее результаты будут представлены в печать. Из этой работы следует, что полученные нами приближенные аналитические формулы совпадают с результатами точного счета, при значениях ширины щели $\theta < 10-15^\circ$, с точностью не хуже, чем 0,001-0,01.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. O. Goldstone, A. A. Oliner, IRE Trans., 1959, AP-7, 307; 1961, AP-9, 280.
2. A. A. Oliner, P. G. Clarricoats, Proc. I.E.E., 1967, 114-B, 4, 445.
3. А. А. Пистолькорс, ЖТФ, 1946, 16, 10, 1061.
4. А. М. El-Sherbiny, IRE Trans., 1972, AP-20, 785.
5. X. Л. Гарб, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 1, 1.
6. В. Н. Кошпаренко, С. В. Червова, Сб. Радиотехника, вып. 20, Изд. Харьковск. ун-та, 1972.
7. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 12, 2458.
8. В. П. Шестопапов, Метод задачи Римана - Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, Изд. Харьковск. ун-та, 1971.
9. В. Н. Кошпаренко, Г. Г. Половников, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 1972, 42, 10, 2039.
10. В. В. Щербак, Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1975, 18, 7, 1009.
11. Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 1966, 11, 7, 1159.
12. P. G. Clarricoats, P. E. Green, A. A. Oliner, Electr. Letters, 1966, 2, 8, 307.
13. Э. И. Велнев, А. И. Носич, В. П. Шестопапов, Докл. АН УССР, Сер. А, 1976, 10, 928.
14. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.

Поступила в редакцию
8 VIII 1975