АЗӘРБАЈҸАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫ
АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ХӘБӘРЛӘР
ИЗВЕСТИЯ

(АЈРЫҸА НҮСХӘ)
(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

«ЕЛМ» НӘШРИЈЈАТЫ ● ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЭЛМ»

АЗӘРБАЈҸАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә риjазиjjат елмләри серијасы, 1983, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1983, № 5

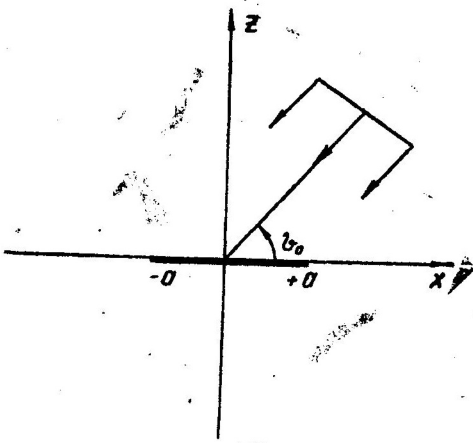
УДК 517.9 535.4

Т. М. АХМЕДОВ, Э. И. ВЕЛИЕВ

РЕШЕНИЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ E-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ЛЕНТЕ

Задачу дифракции плоской E-поляризованной электромагнитной волны на плоской ленте (рис.), как показано в [1], можно свести к решению парного интегрального уравнения:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{i\varepsilon\alpha\eta}\, d\alpha = 2\pi i e^{i\kappa\alpha_0\eta}, & |\eta| < 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha\eta}\, d\alpha = 0, & \eta > 1. \end{cases} \tag{1}$$



Здесь $\varepsilon = \kappa a$, a — полуширина ленты, $\kappa = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, $\eta = x/a$ — безразмерная координата, $\alpha_0 = \cos\vartheta$, ϑ — угол падения, $\varphi(\alpha)$ обозначает трансформанту Фурье функции $\psi(\eta)$ — плотности тока на поверхности экрана. Функция $\psi(\eta)$ и y-я компонента рассеянного поля E_y выражаются через $\varphi(\alpha)$ следующим образом [1]:

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha\eta}\, d\alpha, \quad |\eta| < 1; \tag{2}$$

$$E_y = e^{i\kappa\left(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|\right)} \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{i\kappa\left(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}|z|\right)}\, d\alpha, \quad z \lessgtr 0.$$

Особенностью рассматриваемого типа поляризации, в отличие от H-поляризации [1, 2], является то, что на кромках экрана функция $\psi(\eta)$ имеет корневую особенность, т. е. при $\eta \to \pm 1$

$$\psi(\eta) \sim (1 - \eta^2)^{-1/2}. \tag{3}$$

Ниже покажем, что для выполнения условия (3) достаточно, чтобы трансформанты Фурье $\varphi(\alpha)$ функции $\psi(\eta)$ при $\alpha \to \infty$ вели себя как $O(\alpha^{-1/2})$.

Приступим к решению системы парных интегральных уравнений (СПИУ) (1). Эту систему можно свести к двум СПИУ с интервалом интегрирования $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi_+(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cos(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = 2\pi i \cos(\varepsilon\alpha_0\eta), & 0<\eta<1 \\ \int\limits_0^\infty \varphi_+(\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = 0, & \eta > 1; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{\varphi_-(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = 2\pi i \sin(\varepsilon\alpha_0\eta), & 0<\eta<1, \\ \int\limits_0^\infty \varphi_-(\alpha)\sin(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = 0, & \eta > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\varphi_\pm(\alpha) = \varphi(\alpha) \pm \varphi(-\alpha)$.

Решение СПИУ (4), (5) будем искать в виде рядов Неймана с неизвестными пока коэффициентами:

$$\begin{aligned} \varphi_+(\alpha) &= \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_{2\nu} J_{2\nu}(\varepsilon\alpha), \\ \varphi_-(\alpha) &= \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_{2\nu+1} J_{2\nu+1}(\varepsilon\alpha), \end{aligned} \tag{6}$$

где $J_\nu(x)$—функции Бесселя.

Лемма. *Если при $\alpha \to \infty$ функция $\varphi(\alpha) \sim O(\alpha^{-1/2})$, то $\psi(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha\eta}\, d\alpha$, где $\eta \in [-1,1]$ при $\eta \to \pm 1$ удовлетворяет условию (3).*

Покажем это. Подставляя ряды Неймана (6) в (2), получим

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= \int\limits_0^\infty \varphi_+(\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha + i \int\limits_0^\infty \varphi_-(\alpha)\sin(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = \\ &= \pi \int\limits_0^\infty \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_{2\nu} J_{2\nu}(\varepsilon\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha + \\ &+ i\pi \int\limits_0^\infty \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_{2\nu+1} J_{2\nu+1}(\varepsilon\alpha)\sin(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha. \end{aligned}$$

Из равномерной сходимости этих рядов [3] следует, что можно произвести перестановку порядков интегрирования и суммирования. Тогда, учитывая, что [4]

$$\int\limits_0^\infty J_{2\nu}(\varepsilon\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\, d\alpha = \begin{cases} \frac{(-1)^\nu}{\varepsilon} \frac{T_{2\nu}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, & 0<\eta<1 \\ 0, & \eta>1, \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_0^{\infty} J_{2\nu+1}(\varepsilon\alpha)\sin(\varepsilon\alpha\eta)\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\nu}}{\varepsilon}\,\dfrac{T_{2\nu+1}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, & 0<\eta<1 \\ 0, & \eta>1, \end{cases}$$

для функции $\psi(\eta)$ получаем следующее представление:

$$\psi(\eta) = \frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{1-\eta^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} [x_{2\nu} T_{2\nu}(\eta) + i x_{2\nu+1} T_{2\nu+1}(\eta)], \qquad (8)$$

что и требовалось доказать.

В (8) $T_{\nu}(\eta)$—полиномы Чебышева 1-го рода. Из (7) также следует, что однородные уравнения в СПИУ (4) и (5) удовлетворяются.

Теперь приступим к определению неизвестных коэффициентов x_2 и $x_{2\nu+1}$. Ниже приведена схема нахождения $x_{2\nu}$. Для коэффициентов $x_{2\nu+1}$ все выкладки производятся аналогично. Введем в рассмотрение параметр $\delta(\alpha)$, который определяется как

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{i}{\alpha}[1-\delta(\alpha)];\ \delta(\alpha) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}. \qquad (9)$$

При $\alpha \to \infty$ $\delta(\alpha) \sim O(\alpha^{-2})$.

Подставляя ряды Неймана для функции $\varphi_+(\alpha)$ (6) в неоднородное уравнение СПИУ (4) и выделяя нулевой член в этом ряду, а также учитывая (9), получим

$$\begin{aligned} &\pi x_0 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\varepsilon\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cos(\varepsilon\alpha\eta)\,d\alpha + \\ &+ \pi i \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} x_{2\nu} J_{2\nu}(\varepsilon\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\frac{d\alpha}{\alpha} - 2\pi i\cos(\varepsilon\alpha_0\eta) + \\ &+ \pi i \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} x_{2\nu} J_{2\nu}(\varepsilon\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\,\delta(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Поскольку [4]

$$\int_0^{\infty} J_{2\nu}(\varepsilon\alpha)\cos(\varepsilon\alpha\eta)\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu} T_{2\nu}(\eta),\quad 0<\eta<1,$$

то, используя соотношение ортогональности для полиномов Чебышева:

$$\int_0^1 \frac{T_{2\nu}(\eta)\,T_{2\mu}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \nu=\mu=0 \\ \dfrac{\pi}{4}\delta_{\nu\mu}, & \nu+\mu\neq 0, \end{cases}$$

из (10) для нахождения неизвестных коэффициентов $x_{2\nu}$ получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 2-го рода:

$$x_{2\kappa} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\kappa} x_{2\nu} + b_{\kappa}, \qquad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (11)$$

где

$$a_{\nu\kappa} = \begin{cases} (-1)^{\nu+\kappa} 4\kappa \left(M_{\nu\kappa} - M_{\nu 0}\dfrac{c_{2\kappa}}{c_0}\right), & \kappa = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{i}{c_0}(-1)^{\nu} M_{\nu 0}, & \kappa = 0, \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma^2\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{2(n+\mu)}}{\Gamma^2(n+1)\,\Gamma^2(n+2\mu+1)}.$$

Для вычисления A_2 воспользуемся представлением произведения функций Бесселя в виде контурного интеграла [3]:

$$J_0(\varepsilon\alpha)\,J_{2\mu}(\varepsilon\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(-s)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(s+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+\mu+1)(\varepsilon\alpha)^{2(s+\mu)}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma^2(s+2\mu+1)}\,ds, \quad (16)$$

где $Re(2\mu-2) > -1$, а путь интегрирования $Re\, s = c$ лежит в полосе $Re(\mu+1/2) < c < 0$. Подставляя (16) в A_2, меняя порядок суммирования и интегрирования, а также вычисляя интеграл Эйлера 1-го рода, для A_2 получаем представление в виде контурного интеграла. Вычисляя этот интеграл на основе теории вычетов, находим, что

$$A_2 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma^2\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{2(n+\mu)}}{\Gamma^2(n+1)\,\Gamma^2(n+2\mu+1)}\left\{2\ln\varepsilon + 2\psi\left(n+\mu+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\right) - 2\psi(n+2\mu+1) - 2\psi(n+1)\right\},$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

В заключение заметим, что СЛАУ (11) и (13) позволяют получить для функций $\varphi_\pm(\alpha)$ интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Действительно, подставляя $x_{2\nu}$ и $x_{2\nu+1}$ из (11) и (13) в (6) и переставляя порядки суммирования и интегрирования, получим:

$$\varphi_+(\alpha) = \pi a_0 E + 8\pi K_+(\alpha, \alpha_0) + 4\int_0^{\infty}\varphi_+(\beta)K_+(\alpha, \beta)\,\delta(\beta)\frac{d\beta}{\beta}, \quad (17)$$

$$\varphi_-(\alpha) = 4\pi K_-(\alpha, \alpha_0) + 2\int_0^{\infty}\varphi_-(\beta)K_-(\alpha, \beta)\,\delta(\beta)\frac{d\beta}{\beta}, \quad (18)$$

$$a_0 = \int_0^{\infty}\varphi_+(\alpha)\,J_1(\varepsilon\alpha)\,d\alpha.$$

Здесь введены обозначения:

$$E = J_0(\varepsilon\alpha_0) + 4i\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa c_{2\kappa}\,J_{2\kappa}(\varepsilon\alpha),$$

$$K_+(\alpha, \beta) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa J_{2\kappa}(\varepsilon\beta)\,J_{2\kappa}(\varepsilon\alpha), \quad (19)$$

$$K_-(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{\infty}(2\mu+1)\,J_{2\mu+1}(\varepsilon\alpha)\,J_{2\mu+1}(\varepsilon\beta).$$

Для ядер интегральных уравнений $K_\pm(\alpha, \beta)$ можно получить также следующие представления [6]:

$$K_+(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{4}\,\varepsilon\,\frac{\beta J_0(\varepsilon\beta)\,J_1(\varepsilon\alpha) - \alpha J_1(\varepsilon\beta)\,J_0(\varepsilon\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$K_{-}(\alpha, \beta) = \frac{\beta\alpha}{2}\, \varepsilon\, \frac{\beta J_0(\varepsilon\alpha) J_1(\varepsilon\beta) - \alpha J_1(\varepsilon\alpha) J_0(\varepsilon\beta)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Используя (19), можно показать, что ядра и свободные члены интегральных уравнений (17), (18) являются квадратично интегрируемыми функциями.

Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода типа (17), (18) получены также в работе [7] при решении рассматриваемой задачи дифракции.

Литература

1. Хепл Х., Мауэ А., Вестопфаль К. Теория дифракции. М., „Мир", 1964.
2. Ахмедов Т. М., Велиев Э. И. „ДАН УССР", серия А, № 3, 1983.
3. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций, т. I. ИЛ, 1949.
4. Градштейн И. Г., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., „Наука", 1971.
5. Демидович Б. М., Марон Н. А. Основы вычислительной математики. М., „Наука", 1967.
6. Скурлов В. Н., Шестопалов В. П. „Дифференциальные уравнения", т. 5, № 12, 1969.
7. Сологуб В. Г. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ"., т. 11, № 4, 1971.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР
Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступило 20. VI 1983

Т. М. Әһмәдов, Е. И. Вәлијев

Е-ПОЛЈАРИЗАСИЈА ОЛУНМУШ ЕЛЕКТРОМАГНИТ ДАЛҒАСЫНЫН МУСТӘВИ ЛЕНТ ҮЗӘРИНДӘ ДИФРАКСИЈАСЫНДА ГОША ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИЈИН ҺӘЛЛИ

Е-полјаризасија олунмуш електромагнит далғасынын мустәви лент үзәриндә дифраксијасы мәсәләси гоша интеграл тәнлијин һәлли илә әлагәдардыр. Сонунчу тәнлик интеграл операторун баш һиссәсинин чевирмәклә 2-чи нөв хәтти чәбри тәнлијин һәллинә кәтирилир. Бу тәнлик бахылан дифраксија мәсәләсинин һәллини истәнилән дәгигликлә алмаға имкан верир. Ејни заманда мәгаләдә чәбри тәнлик әсасында намә'лум функсија үчүн 2-чи нөв Фредһолм интеграл тәнлији алыныб.

T. M. Ahmedov, E. I. Veliev

SOLUTION OF DUAL INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION OF *E*-POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVE ON THE PLANE STRIP

The dual integral equations with unlimited intervals of integration corresponding to the problem of the plane *E*-polarized wave diffraction on the strip are reduced to the solution of the Fredholm linear algebraic equations of the system of the 2-nd kind by means of integral operator partial inversion. These equations enable one to find the solution with any fixed accuracy. Basing on these equations the Fredholm integral equations of the 2-nd kind are also derived for determining the functions to find.