ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1985

ТОМ 285 № 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук
1985. Том № 285, № 2

УДК 517.946.43 : 535.42 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э.И. ВЕЛИЕВ

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА МНОГОУГОЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 11 I 1985)

В данной заметке предлагается строгий эффективный численный метод решения задачи дифракции волн на идеально проводящем многоугольном цилиндре. Сущность этого метода заключается в том, что нахождение рассеянного поля каждой гранью многоугольного цилиндра (полное рассеянное поле есть суперпозиция этих полей) сводится к решению системы связанных парных интегральных уравнений относительно преобразований Фурье функций, описывающих плотности поверхностных токов на гранях. К решению этих уравнений применяется метод моментов в сочетании с методом полуобращения. В результате задача сводится к связанной системе линейных алгебраических уравнений, к решению которых применим метод редукции. Неизвестными в этих уравнениях являются коэффициенты, через которые представляется плотность поверхностного тока на гранях по полной системе полиномов Гегенбауэра с весовым множителем, учитывающим характер поведения функции тока на вершинах многоугольника (на ребрах).

Заметим, что отдельные вопросы, рассматриваемые в данной статье, затрагивались и в ряде других работ (в частности [1–5]).

1. Пусть на многоугольный цилиндр под углом ϑ_0 падает плоская H-поляризованная электромагнитная волна* $H_z^0 = e^{ik(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha_0^2}\, y)}$ ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, $\alpha_0 = \cos\vartheta_0$), изменяющаяся во времени как $e^{-i\omega t}$. Будем считать, что цилиндр в направлении oz является неограниченным и имеет поперечное сечение в виде правильного многоугольника с равными углами на вершинах.

Введем следующие обозначения (см. рис. 1): N — число граней цилиндра; $X_n O_n Y_n$ — локальные системы координат, связанные с гранями ($n = 1, 2, \ldots, N$); углы $(\varphi_j)_{j=1}^N$ задают ориентацию граней относительно осей $O_n Y_n$; $(2a_j)_{j=1}^N$ — их ширина; $(\vartheta_j)_{j=1}^N$ - углы падения в системах координат $X_n O_n Y_n$.

Рассматриваемая задача заключается в нахождении H_z-компоненты рассеянного поля многоугольным цилиндром, которая должна удовлетворять волновому уравнению вне поверхности цилиндра, условию излучения на бесконечности, условию конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства (условие Мейкснера) и граничному условию Неймана на поверхности цилиндра.

Полное поле представим в виде $H_z = H_z^0 + \sum_{s=1}^{N} H_z^s$, где H_z^s описывает рассеянное поле, порождаемое поверхностным током на s-й грани. Эти поля в локальных системах координат будем искать в виде [6]

$$(1)\qquad H_z^s = \frac{|y_s'|}{y_s'} \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\alpha) e^{ik(\alpha x_s' + \sqrt{1-\alpha^2}\,|y_s'|)} d\alpha.$$

* Случай E-поляризации рассматривается аналогично.

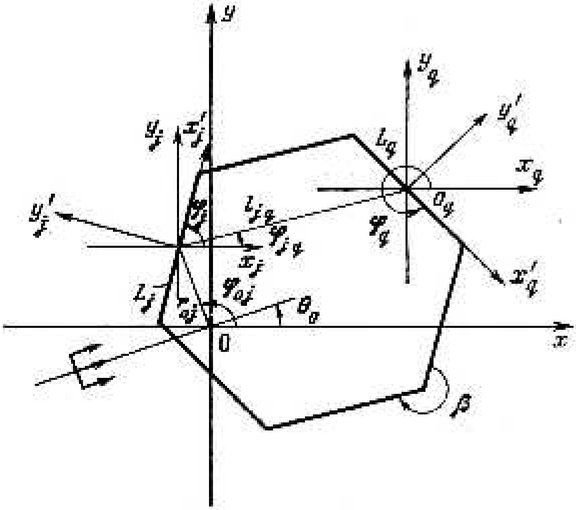

Рис. 1

Здесь неизвестные $\{h_s(\alpha)\}_{s=1}^N$ являются преобразованием Фурье функций $\{\mu_s(x_s')\}_{s=1}^N$, описывающих плотности поверхностных токов на гранях $\mu_s(x_s') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_s(\alpha) e^{ik\alpha x_s'} d\alpha$, $x_s' \in (-a_s, a_s)$.

Заметим, что в (1) выбрана та ветвь функции $\sqrt{1-\alpha^2}$, для которой $\operatorname{Im}\sqrt{1-\alpha^2} > 0$ при $|\alpha| \to \infty$ вдоль вещественной оси.

2. Для определения неизвестных $\{h_s(\alpha)\}_{s=1}^N$ подчиним полное поле граничному условию Неймана на поверхности цилиндра

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(H_z^0 + \sum_{s=1}^N H_z^s \right) \Big|_L = 0, \qquad L = \bigcup_{s=1}^N L_s.$$

Здесь L_s – контур грани в плоскости $X_s O_s Y_s$, а нормаль $\mathbf{n}$ ориентирована вдоль положительного направления оси $O_s Y_s$.

Уравнению (2) можно удовлетворить, если записать поля H_z^s в выделенной системе координат, связанной с гранью с номером j (см. рис. 1). При этом из (2) для нахождения неизвестных $\{h_j(\alpha)\}_{j=1}^N$ получим связанную систему парных интегральных уравнений

$$(3) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_j(\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\, e^{i\epsilon_j \alpha \eta_j} d\alpha = -\frac{2\pi}{k} A_j(\alpha_0) e^{i\epsilon_j \eta_j B_j(\alpha)} -$$

$$- \sum_{q=1, q\neq j}^N \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_q(\alpha) A_{jq}(\alpha) e^{i\epsilon_j \alpha \eta_j B_{jq}(\alpha) + ikl_{jq} D_{jq}(\alpha)} d\alpha, \qquad |\eta_j| < 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_j(\alpha) e^{i\epsilon_j \alpha \eta_j} d\alpha = 0, \qquad |\eta_j| > 1.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\epsilon_j = ka_j$; $\eta_j = x_j/a_j$ – безразмерная координата, L_{jq} – расстояние между центрами граней с номерами j и q,

$$A_{jq} = -\alpha \sin(\varphi_j - \varphi_q) + \sqrt{1-\alpha^2} \cos(\varphi_j - \varphi_q); \qquad A_j(\alpha_0) = \alpha_0 \cos\varphi_j + \sqrt{1-\alpha_0^2} \sin\varphi_j,$$

$$B_{jq} = \alpha\cos(\varphi_j - \varphi_q) + \sqrt{1-\alpha^2}\sin(\varphi_j - \varphi_q); \quad B_j(\alpha_0) = -\alpha_0\sin\varphi_j + \sqrt{1-\alpha_0^2}\cos\varphi_j,$$

$$D_{jq}(\alpha) = -\alpha\cos(\varphi_q - \varphi_{jq}) + \sqrt{1-\alpha^2}\sin(\varphi_q - \varphi_{jq}).$$

Заметим, что однородные уравнения в системе (3) получены продолжением функций $\mu_j(x_j)$ нулем вне интервала $(-a_j, a_j)$.

Функции $\{h_j(\alpha)\}_{j=1}^N$, кроме системы уравнений (3), должны удовлетворять соотношениям $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha|h_j(\alpha)|^2 d\alpha < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, N$, которые следуют из условия конечности энергии рассеянных волн в любой ограниченной части пространства. Можно показать [7], что решение системы уравнений (3) существует и единственно в классе функций, удовлетворяющих этому условию. Последнее также обеспечивает законность проводимых ниже преобразований.

3. Для решения системы уравнений (3) представим функции $\{\mu_j(\eta_j)\}_{j=1}^N$ в виде равномерно сходящихся рядов по полной и ортогональной системе полиномов Гегенбауэра $\{C_m^{\nu+1/2}(\eta_j)\}_{m=0}^\infty$ [8] с весовым множителем, учитывающим характер поведения функций $\{\mu_j(\eta_j)\}_{j=1}^N$ на концах интервала $\eta_j \in [-1, 1]$ (на ребре):

$$\mu_j(\eta_j) = (1-\eta_j^2)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^j C_m^{\nu+1/2}(\eta_j). \tag{4}$$

Здесь $\{\mu_m^j\}_{m=0}^\infty$ — новые неизвестные коэффициенты, а $\nu = \pi/\beta$, где угол β задает значение угла на вершинах многоугольника (см. рис. 1).

Представляя преобразования Фурье функций $\{\mu_j(\eta_j)\}_{j=1}^N$ в виде суммы четных и нечетных слагаемых $h_j(\pm\alpha) = 1/2[h_j^+(\alpha) \pm h_j^-(\alpha)]$ и используя (4), для функций $\{h_j^\pm(\alpha)\}_{j=1}^N$ можно получить представления в виде равномерно сходящихся рядов по бесселевым функциям:

$$\begin{aligned} h_j^+(\alpha) &= \frac{4a_j\pi}{\Gamma(\nu+1/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{2m}^j \frac{(-1)^m}{(2m)!}\Gamma(2\nu+2m+1)\frac{J_{2m+\nu+1/2}(\epsilon_j\alpha)}{(2\epsilon_j\alpha)^{\nu+1/2}}, \\ h_j^-(\alpha) &= -i\frac{4a_j\pi}{\Gamma(\nu+1/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{2m+1}^j \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\Gamma(2\nu+2m+2)\frac{J_{2m+1+\nu+1/2}(\epsilon_j\alpha)}{(2\epsilon_j\alpha)^{\nu+1/2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $J_\nu(x)$ — функции Бесселя, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Из представлений (5) видно, что при $\alpha \to \infty$ функции $h_j^\pm(\alpha) \sim O(\alpha^{-(\nu+1)})$. Следовательно, такой порядок убывания преобразований Фурье $h_j(\alpha)$ обеспечивает выполнение условия на ребре для самих функций $\{\mu_j(\eta_j)\}_{j=1}^N$.

Записывая вместо системы уравнений (3) систему двух парных интегральных уравнений относительно функций $h_j^\pm(\alpha)$ с пределами интегрирования $(0, \infty)$ и используя (5), нетрудно убедиться, что при этом однородные уравнения в этих системах удовлетворяются тождественно. Для определения неизвестных $\{\mu_m^j\}_{m=0}^\infty$ подставим представления (5) в неоднородные уравнения для функции $\{h_j^\pm(\alpha)\}_{j=1}^N$. Далее, вводя величину $\gamma(\alpha)$ по формуле

$$\sqrt{1-\alpha^2} = i\alpha[\gamma(\alpha)-1], \quad \gamma(\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{=} O(\alpha^{-2}), \tag{6}$$

что соответствует разбиению операторов, порождаемых левыми частями неоднородных уравнений в системе (3), на главную (сингулярную) и вполне непрерывные части, а также воспользовавшись разрывными интегралами Сонина — Вебера — Шафхейтлина [8], для нахождения неизвестных $\{\mu^j_{2m}\}^{\infty}_{m=0}$, $\{\mu^j_{2m+1}\}^{\infty}_{m=0}$ получим систему связанных линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mu^j_{2m}\beta_{\nu,2m}(C^{\nu}_{2k,2m}-Q^{\nu j}_{2k,2m})=d^{\nu}_{2k,j}+ \tag{7}$$

$$+\sum_{q=1,q\neq j}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\mu^q_{2m}\beta_{\nu,2m})P^{jq}_{2m,2k}-i\mu^q_{2m+1}\beta_{\nu,2m+1}P^{jq}_{2m+1,2k}),$$

$j=1,2,\ldots,N,\quad k=0,1,2,\ldots$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mu^j_{2m+1}\beta_{\nu,2m+1}(C^{\nu}_{2k+1,2m+1}-Q^{\nu j}_{2k+1,2m+1})=d^{\nu}_{2k+1,j}+ \tag{8}$$

$$+\sum_{q=1,q\neq j}^{N}\sum_{m=0}(-1)^m(\mu^q_{2m}\beta_{\nu,2m}P^{jq}_{2m,2k+1}-i\mu^q_{2m+1}\beta_{\nu,2m+1}P^{jq}_{2m+1,2k+1}),$$

$j=1,2,\ldots,N,\quad k=0,1,2,\ldots$

Здесь

$$\beta_{\nu,m}=\frac{\Gamma(2\nu+m+1)}{m!};$$

$$C^{\nu}_{k,m}=\frac{\Gamma(2\nu)\Gamma(½(m+k)+1)}{\Gamma(\nu+¼+½(k-m))\Gamma(\nu+½+½(m-k))\Gamma(½(m+k)+2\nu+1)},$$

$$Q^{\nu j}_{k,m}=\epsilon_j\left(\frac{2}{\epsilon_j}\right)^{2\nu}\int_0^{\infty}J_{k+\nu+½}(\epsilon_j\alpha)J_{m+\nu+½}(\epsilon_j\alpha)\gamma(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}}, \tag{9}$$

$$P^{jq}_{m,k}=\frac{a_q}{a_j}\;\frac{\epsilon_j^2\cdot 2^{2\nu-1}}{(\epsilon_j\epsilon_q)^{\nu+½}}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jq}(\alpha)J_{m+\nu+½}(\epsilon_q\alpha)J_{k+\nu+½}(\epsilon_jB_{jq}(\alpha))\times$$

$$\times\frac{e^{ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)}}{[B_{jq}(\alpha)]^{\nu+½}}\;\frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+½}},$$

$$d^{\nu}_{k,j}=(-1)^k i^{k+1}\epsilon_j 2^{2\nu-1}\left(\frac{2}{\epsilon_j}\right)^{\nu+½}\Gamma(\nu+½)\;\frac{A_j(\alpha_0)}{[B_j(\alpha_0)]^{\nu+½}}\;J_{k+\nu+½}(\epsilon_jB_j(\alpha_0)).$$

Можно показать, что системы линейных алгебраических уравнений (7), (8) единственным образом разрешимы в пространстве числовых последовательностей

$$l_2(\nu)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}m^{2\nu}|\mu^j_m|^2<\infty\right\},\quad j=1,2,\ldots,N.$$

Заметим, что в системах уравнений (7), (8) конечная сумма по индексу q описывает электродинамическое взаимодействие j-й грани цилиндра со всеми остальными гранями.

Как видно из (9), матричные элементы $C^{\nu}_{k,m}$ не зависят от индекса j и от частотного параметра ϵ_j. Причем $\beta_{\nu,k}C^{\nu}_{k,k}=\dfrac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu+½)}$. Это связано с тем, что разбиение (6) соответствует выделению статической части интегрального оператора в системах уравнений (3). При решении системы уравнений (7), (8) методом редукции на ЭВМ учет этого обстоятельства является весьма существенным. С этой точки зрения очень важным является и тот факт, что для всех матричных элементов имеет место простое рекуррентное соотношение

$$L_{nm} = \frac{m-1}{n}\,(L_{m-1,n-1} + L_{m-1,n+1}) - L_{m-2,n},$$

где под L_{nm} понимается любая из величин $C^{v}_{k,m}$, $Q^{vj}_{k,m}$, $P^{jq}_{m,k}$.

Определением неизвестных $\{\mu^{j}_{2m}\}^{\infty}_{m=0}$ и $\{\mu^{j}_{2m+1}\}^{\infty}_{m=0}$ из системы линейных алгебраических уравнений (7), (8) полностью решается задача нахождения рассеянных полей H^{j}_{z}.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
22 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровиков В.А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 456 с. 2. *Mei K.K., Van Bladel I.G.* – IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1963, vol. AP-11, № 3, p. 185–192. 3. *Abdelmessih S.T., Sinclair G.* – Canad. J. Phys., 1967, vol. 45, № 3, p. 1305–1318. 4. *Hunter J.D.* – Ibid., 1972, vol. 50, № 1, p. 139–150. 5. *Чумаченко В.П.* – Изв. вузов. Радиофизика, 1982, т. 25, № 8, с. 925–932. 6. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфоль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с. 7. *Сологуб В.Г.* – ЖВМиМФ, 1971, т. 11, № 4, с. 837–854. 8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т. 2. 296 с.