ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Серия „А"

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1985

Физика

УДК 517.9.535.4

Э. И. ВЕЛИЕВ

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

(Представлено академиком АН УССР В. П. Шестопаловым)

Предлагается новая конструктивная методика решения парных сумматорных уравнений с ядром в виде тригонометрических функций

$$\begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \gamma_m e^{im\alpha\zeta} = f(\zeta), & |\zeta| < 1 \qquad (1) \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{im\alpha\zeta} = 0, & \zeta > 1, \qquad (2) \end{cases}$$

которые возникают при решении краевых задач теории дифракции на двумерных тонких металлических экранах [1, 2]. В уравнениях (1), (2) неизвестные $\{x_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье функции $x(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{im\alpha\zeta}$, $\zeta \in (-1, 1)$, $f(\zeta)$ — известная функция, γ_m — заданные комплексные величины, зависящие от поперечных размеров экранов и от длины волны, ζ — нормированная координата, параметр α характеризует геометрию экранов.

Системы парных сумматорных уравнений типа (1), (2) хорошо известны и для их решения предложены строгие методы, которые являются различными модификациями метода полуобращения [2]. Последний первоначальные парные уравнения сводит к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода. Предлагаемая методика также является одной из модификаций метода полуобращения и имеет свои существенные особенности. В частности, неизвестные Фурье-коэффициенты ищутся в таком виде, что для искомой функции $x(\zeta)$, $\zeta \in (-1, 1)$ удовлетворяется необходимое условие на концах интервала (т. е. выполняется условие Мейкснера). Более того, полученные СЛАУ второго рода имеют простые матричные элементы, которые с ростом индексов очень быстро убывают, и для них можно выписать эффективные вычислительные алгоритмы.

Ниже решение системы уравнений (1), (2) будем строить при следующих предположениях:

а) комплексные величины γ_m четные относительно индекса m ($\gamma_m = \gamma_{-m}$) и представимы в виде

$$\gamma_m = \frac{1}{mc}(\delta_m - 1), \quad m \neq 0; \qquad \delta_m \approx O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad m \to \infty \qquad (3)$$

$c = \mathrm{const}$, не зависящая от индекса m;

б) заданная правая часть уравнения (1) $f(\zeta)$, представима рядом Фурье $f(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\alpha\zeta}$, $\zeta \in (-1, 1)$;

в) искомая функция $x(\zeta)$ должна удовлетворять условию Мейкснера следующего типа [3]:

$$x(\zeta) \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \text{ при } |\zeta| \to 1. \tag{4}$$

Естественным следствием условия (4) является то, что решение системы уравнений (1), (2) надо искать в классе $\tilde{l}_2$

$$\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \tilde{l}_2; \qquad \tilde{l}_2 = \left\{x_n : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} < \infty\right\}.$$

Представим функции $x(\zeta)$ и $f(\zeta)$ в виде суммы четных и нечетных слагаемых

$$\begin{gathered} x(\zeta) = x_+(\zeta) + x_-(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m x_m^+ \cos(m\alpha\zeta) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} x_m^- \sin(m\alpha\zeta), \\ f(\zeta) = f_+(\zeta) + f_-(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m^+ \cos(m\alpha\zeta) + 2i \sum_{m=1}^{\infty} f_m^- \sin(m\alpha\zeta), \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$x_\pm(\zeta) = \frac{1}{2}[x(\zeta) \pm x(-\zeta)]; \qquad f_\pm(\zeta) = \frac{1}{2}[f(\zeta) \pm f(-\zeta)],$$

$$\begin{aligned} x_m^\pm &= x_m \pm x_{-m}; \qquad x_0 = \frac{1}{2} x_0^+, \\ f_m^\pm &= f_m \pm f_{-m}; \qquad f_0 = \frac{1}{2} f_0^+, \end{aligned} \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

При этом неизвестные $x_m^\pm$, как следует из (1), (2), определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m x_m^+ \gamma_m \cos(m\alpha\zeta) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m^+ \cos(m\alpha\zeta), & 0 \leqslant \zeta < 1, \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m x_m^+ \cos(m\alpha\zeta) = 0, & \zeta > 1; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m^- \gamma_m \sin(m\alpha\zeta) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m^- \sin(m\alpha\zeta), & 0 \leqslant \zeta < 1, \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m^- \sin(m\alpha\zeta) = 0, & \zeta > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Представим неизвестные $x_m^\pm$ в виде равномерносходящихся рядов Неймана [4, 5] с новыми неизвестными коэффициентами

$$x_m^+ = \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^+ J_{2s}(m\alpha); \qquad x_m^- = \sum_{s=1}^{\infty} b_{2s-1}^+ J_{2s-1}(m\alpha). \tag{8}$$

Здесь $J_s(x)$ — функции Бесселя первого рода.

Покажем, что при этом однородные уравнения в системах (6), (7) удовлетворяются тождественно, а для функции $x(\zeta)$ выполняется условие Мейкснера (4).

В самом деле, подставляя (8) в выражения для функций $x_1(\zeta)$ ($\zeta<1$) (5) и меняя порядки суммирования (закономерность этой операции следует из равномерной сходимости рассматриваемых рядов Фурье и Неймана), а также используя для возникающих рядов Шлемильха соотношение [6]

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_{2s}(m\alpha)\cos(m\alpha\zeta) = \frac{(-1)^s T_{2s}(\zeta)}{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{1}{2}\delta_{s0},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_{2s-1}(m\alpha)\sin(m\alpha\zeta) = \frac{(-1)^s T_{2s-1}(\zeta)}{\alpha\sqrt{1-\xi^2}}.$$

(δ_{s0} — символ Кронеккера), можно показать, что функция $x(\zeta)$ представляется следующим образом:

$$x(\zeta) = \frac{2}{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s b_{2s}^{+} T_{2s}(\zeta) + i\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s b_{2s-1}^{-} T_{2s-1}(\zeta)\right]. \quad (9)$$

Здесь $T_s(\zeta)$ — полиномы Чебышева первого рода.

Если теперь исходить из того, что для функции $x(\zeta)$ справедливо представление (9), то нетрудно убедиться, что ее коэффициенты Фурье выражаются через коэффициенты b^{+}_{2s}, b^{-}_{2s-1} формулами (8). Следовательно, по существу нами доказано следующее утверждение: для того, чтобы функция $x(\zeta)$ удовлетворяла условию Мейкснера типа (4), необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье с ростом индекса m убывали, как $O(m^{-\frac{1}{2}})$.

Подставляя $x_m^{\pm}$ из (8) в однородные уравнения системы (6), (7) и используя для функций Бесселя представление [4]

$$J_\nu(m\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_\nu(t\alpha)\frac{\sin\alpha(t-m)}{t-m}\,dt,$$

а также учитывая известные свойства разрывных интегралов Вебера — Шафхейтлина [4, 5], можно убедиться, что однородные уравнения удовлетворяются тождественно.

Приступим теперь к определению неизвестных b_{2s}^{+}, b_{2s-1}^{-}. Далее будем излагать схему нахождения неизвестных b_{2s}^{+}, а для коэффициентов b_{2s-1}^{-} приведем лишь окончательные результаты.

Учитывая (3) и (8) в неоднородном уравнении системы (6) и меняя порядки суммирования, получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^{+}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}J_{2s}(m\alpha)\cos(m\alpha\zeta) = -\frac{c}{2}b_0^{+}\gamma_0 +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^{+}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_m}{m}J_{2s}(m\alpha)\cos(m\alpha\zeta) + c\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m f_m^{+}\cos(m\alpha\zeta). \quad (10)$$

Если учесть, что

$$\cos(m\alpha\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon_k J_{2k}(m\alpha)T_{2k}(\zeta),$$

то (10) приобретает вид

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^{+}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon_k T_{2k}(\zeta)Q_{sk}^{+} = -\frac{c}{2}b_0^{+}\gamma_0 +$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^{+}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon_k T_{2k}(\zeta)P_{sk}^{+} + c\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon_k T_{2k}(\zeta)\Gamma_k^{+}. \quad (11)$$

Здесь

$$Q_{sk}^{+} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{2s}(m\alpha) J_{2k}(m\alpha); \qquad \Gamma_k^{+} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m^{+} J_{2k}(m\alpha),$$

$$P_{sk}^{+} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m}{m} J_{2s}(m\alpha) J_{2k}(m\alpha). \tag{12}$$

Можно показать, что для величин Q_{sk}^{+} имеет место представление [7]

$$Q_{sk}^{+} = \begin{cases} Q_{00}^{+} = -\ln\dfrac{\alpha}{2} + d_{00}^{+}, & s = k = 0; \\ \dfrac{\delta_{sk}}{4(s+k)} + d_{sk}^{+}, & s \neq 0, \quad k \neq 0; \end{cases} \qquad d_{sk}^{+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{sk\nu}^{+}\alpha^{2\nu}. \tag{13}$$

Величины $F^{+}_{sk\nu}$ приведены в [7]. Особенностью этих величин является то, что они с ростом индексов очень быстро убывают.

Используя (13), а также соотношение ортогональности для полиномов Чебышева $T_{2n}(\zeta)$ [5], из (11) для нахождения коэффициентов b_{2s}^{+} получим систему линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$\begin{gathered} b_0^{+}\left(Q_{00}^{+} + \frac{c}{2}\gamma_0\right) = \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s}^{+} P_{s0}^{+} + c\Gamma_0^{+}, \\ b_{2s}^{+} = 4s \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{+}(P_{ks}^{+} - d_{ks}^{+}) + 4sc\Gamma_s^{+}, \quad s = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{14}$$

Аналогично для нахождения коэффициентов b_{2k-1}^{-} получим следующую СЛАУ второго рода:

$$\frac{b_{2k-1}^{-}}{2(2k-1)} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{2s-1}^{-}(P_{sk}^{-} - d_{sk}^{-}) + c\Gamma_k^{-}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Здесь

$$P_{sk}^{-} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m}{m} J_{2s-1}(m\alpha) J_{2k-1}(m\alpha); \qquad \Gamma_k^{-} = 2\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{-} J_{2k-1}(m\alpha). \tag{16}$$

Величины d_{sk}^{-} подобны величинам d_{sk}^{+}. Заметим, что величины $d_{sk}^{\pm}$, как показали оценки, с ростом индексов настолько быстро убывают, что при практических расчетах в рядах с этими величинами достаточно учитывать первые два слагаемых.

Можно показать, что для матричных элементов $P_{sk}^{\pm}$ имеют место оценки

$$|P_{sk}^{\pm}| < \frac{c_1}{(s^3k^3)^{\frac{1}{2}}}; \qquad \sum_s \sum_k |P_{sk}^{\pm} - d_{sk}^{\pm}|^2 < \infty; \qquad c_1 = \text{const}.$$

Это показывает, что матрицы СЛАУ второго рода (14) и (15) порождают в гильбертовом пространстве $\tilde{l}_2$ вполне непрерывные операторы. Следовательно, эти системы уравнений можно решать методом редукции.

Системы линейных алгебраических уравнений второго рода для неизвестных b_{2s}^{+}, b_{2s-1}^{-} (14), (15) позволяют получить также СЛАУ второго рода для коэффициентов Фурье $x_m^{\pm}$. Действительно, подставляя b_{2s}^{+}, b_{2s-1}^{-} из (14), (15) в (8), а также учитывая (12), (16) и меняя порядки суммирования, получим

$$x_m^+ = b_0^+ J_0(m\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k} K_{mk}^+ x_m - 4 \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^+ N_k^+(m) + c \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k f_k^+ K_{km}^+,$$

$$b_0^+ = \frac{1}{Q_{00}^+ + \frac{c}{2}\gamma_0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k} x_k^+ J_0(k\alpha) + c\Gamma_0^+ \right], \tag{17}$$

$$x_m^- = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k} K_{km}^- x_k^- - 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}^- N_k^-(m) + 2c \sum_{k=1}^{\infty} f_k^- K_{km}^-,$$

где введены следующие обозначения:

$$K_{km}^+ = \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu J_{2\nu}(m\alpha) J_{2\nu}(k\alpha); \qquad K_{km}^- = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) J_{2\nu-1}(m\alpha) J_{2\nu-1}(k\alpha),$$

$$N_k^+(m) = \sum_{s=1}^{\infty} s d_{sk}^+ J_{2s}(m\alpha); \qquad N_k^-(m) = \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) d_{ks}^- J_{2s-1}(m\alpha). \tag{18}$$

Для величин $K_{km}^{\pm}$ можно получить простые представления на основе суммирования рядов (18) [4, 1]

$$K_{mk}^+ = \frac{\alpha mk}{k^2 - m^2} [m J_0(\alpha m) J_1(\alpha k) - k J_1(\alpha m) J_0(\alpha k)],$$

$$K_{mk}^- = \frac{\alpha mk}{m^2 - k^2} [m J_0(\alpha k) J_1(\alpha m) - k J_1(\alpha k) J_0(\alpha m)],$$

$$K_{mm}^+ = \frac{(\alpha m)^2}{2} \left[J_0^2(\alpha m) + J_1^2(\alpha m) - \frac{2}{\alpha m} J_0(\alpha m) J_1(\alpha m) \right],$$

$$K_{mm}^- = \frac{(\alpha m)^2}{2} [J_0^2(\alpha m) + J_1^2(\alpha m)].$$

Нетрудно показать, что для матричных элементов системы уравнений (17) имеет место

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{\delta_p}{p} K_{pm}^{\pm} \right| < \infty.$$

Следовательно, СЛАУ (17), как и (14), (15), также можно решать методом редукции.

SUMMARY. The constructive technique is suggested for solving dual summatory equations with the kernel as trigonometric functions appearing in many diffraction problems on thin metal screens. The main point of the technique is that the summatory equations are considered as an operator 1st order equation and after extraction of the main (singular) part and inversion of the operator the first equation is reduced to the 2d order equation. The latter has the operator compact in some functional space, determined by the Meixner condition. The unknown coefficients are found in the form that provides the fulfilment of necessary conditions for the unknown function on the ends of the interval.

1. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.—400 с.
2. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции.— Киев : Наук. думка, 1983.—252 с.
3. *Хенл X., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.— М. : Мир., 1964.—428 с.
4. *Ватсон Д. Н.* Теория бесселевых функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949. Т. 1.— 1000 с.

5. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1974. Т. 2.— 295 с.
6. *Tversky V.* Elementary function representation of Schlomilch series.— Arch. for Rational Mechanics and Analysis. 1961, 8, p. 323—332.
7. *Ямпольский В. Г.* Дифракция плоской электромагнитной волны на системе металлических полосок.— Радиотехника и электроника. 1964, 8, № 4, с. 564—577.

Ин-т радиофизики и электроники
АН УССР, Харьков

Поступило 26.12.83