АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXXIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1988

УДК 537.874.6.01

# ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

*Велиев Э. И., Веремей В. В., Шестопалов В. П.*

Предложен строгий метод решения задачи дифракции волн на идеально проводящем прямоугольном цилиндре, который рассматривается как составное тело, образованное «склеиванием» плоских лент. В основе метода лежат идеи метода частичного обращения оператора и метода моментов. В результате задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Показано, что к решению этих систем применим метод редукции. Неизвестными в них являются коэффициенты разложения функций плотности поверхностных токов на гранях цилиндра по полной системе полиномов Гегенбауэра с весовым множителем, учитывающим характер поведения токов на ребрах. В предложенном методе как частный случай содержится и новое строгое решение задачи дифракции волн на совокупности плоских лент с параллельными образующими. На основе численного счета исследованы особенности распределения токов на гранях прямоугольного цилиндра, поперечник полного рассеяния и диаграммы направленности (ДН) рассеянного поля.

1. Основным подходом к решению задач дифракции волн на идеально проводящих многоугольных цилиндрах (МЦ) является сведение этих задач к интегральным уравнениям 1-го рода относительно плотности тока, наводимого падающей волной на поверхности цилиндра. Для решения этих интегральных уравнений применяют численные методы, которые сводят интегральные уравнения к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1—5]. Однако наличие угловых точек (ребер) на контуре интегрирования заметно ухудшает точность определения функций тока из этих интегральных уравнений. Чтобы в какой-то степени улучшить ситуацию, предложены подходы, учитывающие различными способами условия на ребре в явном виде [3—5]. В этих же работах частично исследованы особенности распределения токов на гранях цилиндров и поведение полей в дальней зоне. Асимптотическому решению рассматриваемой задачи в коротковолновой области посвящены работы [6, 7], в которых решение получено на основе геометрической теории дифракции (ГТД).

Ниже для решения рассматриваемой задачи предлагается строгий метод, который позволяет определять искомые величины с любой наперед заданной точностью. Идея метода состоит в следующем: идеально проводя-

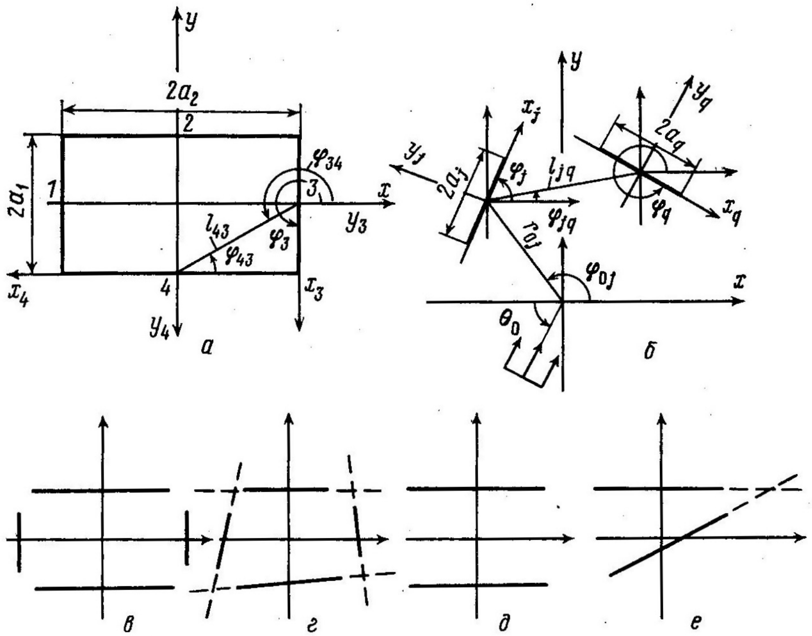


Рис. 1. Рассматриваемые структуры

щий МЦ рассматривается как составное тело, образованное «склеиванием» ключевых элементов, таких, как плоская лента (см. рис. 1, *б*). При таком рассмотрении задачи дифракции волн на МЦ тесно примыкают к задачам дифракции волн на N телах. В частности, поле, рассеянное МЦ, можно представить в виде суперпозиции полей, рассеянных каждой гранью цилиндра (т. е. в виде суперпозиции полей, порожденных соответствующими токами на гранях); рассеянные поля выражаются через преобразования Фурье функций плотности поверхностных токов на гранях цилиндра. Такие представления для рассеянных полей дают ряд важных преимуществ при построении решения задачи. Граничные условия и используемое представление для рассеянных полей приводят к системе парных интегральных уравнений (с ядром в виде тригонометрических функций) относительно неизвестных преобразований Фурье. Далее к решению этих парных интегральных уравнений применяется гибридный (смешанный) [8] подход, использующий идеи метода частичного обращения оператора [9] и метода моментов [7, 9].

От известных методов, используемых при решении задачи дифракции волн на МЦ, предлагаемый метод существенно отличается также тем, что в нем как частный случай содержится и решение задачи дифракции волн на совокупности «ключевых» элементов (например на системе из $N=4$ лент (см. рис. 1, *в*, *г*)).

Ниже основное внимание уделяется задаче дифракции плоской $H$-поляризованной электромагнитной волны на МЦ, поскольку именно этот случай является наиболее сложным для исследования [1]. Учитывая, что основные идеи предлагаемого метода решения, применительно к правильным МЦ, опубликованы в [10, 11], в данной работе на примере прямоугольного

[1] Случай $E$-поляризованной волны может быть рассмотрен аналогичным образом.

цилиндра подробно исследуется бесконечная СЛАУ, к которой сводится поставленная задача, на предмет существования и единственности решения и применимости к ее решению метода редукции. Подробно анализируются также результаты счета при исследовании распределения токов на гранях цилиндра, поперечника полного рассеяния и диаграммы направленности (ДН) поля.

2. Пусть на рассматриваемый идеально проводящий цилиндр под углом $\vartheta_0$ (см. рис. 1, *а*, *б*) падает плоская $H$-поляризованная электромагнитная волна $H_z^0=\exp[ik(\alpha_0 x+\sqrt{1-\alpha_0^2}y)]$ ($k=2\pi/\lambda$, $\lambda$ — длина волны, $\alpha_0=\cos\vartheta_0$), изменяющаяся во времени как $e^{-i\omega t}$. Цилиндр в направлении $oz$ неограничен и имеет прямоугольное поперечное сечение в плоскости $xoy$. Введем следующие обозначения (см. рис. 1, *а*, *б*): $\{x_jo_jy_j\}_{j=1}^4$ — локальные системы координат, связанные с центрами граней цилиндра; $\{2a_j\}_{j=1}^4$ — ширины граней; $\{\varphi_j\}_{j=1}^4$ — углы, задающие ориентацию граней.

Задача заключается в определении $H_z$-компоненты поля, рассеянного цилиндром. Искомая функция должна удовлетворять уравнению Гельмгольца вне поверхности цилиндра, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности, условию конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства (условию Мейкснера на ребрах) и граничному условию Неймана на поверхности цилиндра.

Исходя из рассматриваемой модели МЦ полное поле можно представить в виде $H_z=H_z^0+\sum_{j=1}^4 H_z^{(j)}$, где $H_z^{(j)}$ описывает рассеянное поле, порождаемое поверхностным током на $j$-й грани. Эти поля в локальных системах координат, как и в задаче дифракции на плоской ленте в случае $H$-поляризованного возбуждения, можно представить в виде [12]

$$H_z^{(j)}=-\frac{\varepsilon_j}{2\pi}\frac{|y_j|}{y_j}\int_{-\infty}^{\infty}h_j(\alpha)\exp\{ik[\alpha x_j+\sqrt{1-\alpha^2}\,|y_j|]\}d\alpha, \tag{1}$$

где $\varepsilon_j=ka_j$, а $\{h_j(\alpha)\}_{j=1}^4$ является преобразованием Фурье функций

$$\{\mu_j(x_j)\}_{j=1}^4=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h_j(\alpha)\exp(ik\alpha x_j)d\alpha,$$

описывающих плотности поверхностных токов на гранях МЦ, причем $\mu_j(x_j)=0$ при $|x_j|>a_j$; т. е. эти функции продолжены нулем вне интервала $x_j\in[-a_j, a_j]$. В (1) выбрана та ветвь функции $\sqrt{1-\alpha^2}$, для которой $\operatorname{Im}\sqrt{1-\alpha^2}>0$ при $|\alpha|\to\infty$. Заметим, что если для бесконечно тонких экранов функции тока $\mu_j(x_j)$ определяется как скачок $H_z$-компоненты полного магнитного поля, то для МЦ под функцией $\mu_j(x_j)$ будем понимать предельное значение $H_z$-компоненты поля на гранях МЦ, т. е. $\mu_j(x_j)=$ $=H_z(x_j, +0)$, $x_j\in[-a_j, a_j]$.

3. Для определения неизвестных $\{h_j(\alpha)\}_{j=}^4$ подчиним полное поле граничному условию Неймана на поверхности цилиндра

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(H_z^0+\sum_{j=1}^4 H_z^{(j)}\right)\Big|_L=0,\qquad L=\bigcup_{j=1}^4 L_j. \tag{2}$$

Здесь $L_j$ — контур грани в плоскости $x_jo_jy_j$, а нормаль **n** ориентирована вдоль оси $o_jy_j>0$.

Чтобы удовлетворить уравнению (2), необходимо поля $H_z^0$ и $H_z^{(q)}$ записать в системе координат, связанной с $j$-й гранью (см. рис. 1, *б*). Пользуясь связью между системами координат, в системе координат $x_jo_jy_j$ получаем следующие представления для этих полей:

$$H_z^0=\exp\{i\varepsilon_j[\eta_jB_j(\alpha_0)+\zeta_jA_j(\alpha_0)]+ikr_{0j}D_j(\alpha_0)\},$$

(3)

$$H_z^{(q)}=\frac{\varepsilon_q}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_q(\alpha)\exp\{i\varepsilon_j[B_{jq}(\alpha)\eta_j+\zeta_jA_{jq}(\alpha)]+ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)\}\,d\alpha,$$

$$\zeta_j<0.$$

Здесь введены обозначения:

$$A_{jq}(\alpha)=-\alpha\sin(\varphi_j-\varphi_q)-\sqrt{1-\alpha^2}\cos(\varphi_j-\varphi_q);$$

$$A_j(\alpha_0)=-\alpha_0\sin\varphi_j+\sqrt{1-\alpha_0^2}\cos\varphi_j,$$

$$B_{jq}(\alpha)=\alpha\cos(\varphi_j-\varphi_q)-\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\varphi_j-\varphi_q);$$

(4)

$$B_j(\alpha_0)=\alpha_0\cos\varphi_j+\sqrt{1-\alpha_0^2}\sin\varphi_j,$$

$$D_{jq}(\alpha)=-\alpha\cos(\varphi_q-\varphi_{jq})-\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\varphi_q-\varphi_{jq});$$

$$D_j(\alpha_0)=\alpha_0\cos\varphi_{0j}+\sqrt{1-\alpha_0^2}\sin\varphi_{0j},$$

$\eta_j=x_j/a_j$, $\zeta_j=y_j/a_j$ — безразмерные координаты, а параметры $l_{jq}$, $r_{0j}$ и $\varphi_{jq}$ определены на рис. 1, *а*, *б*.

Пользуясь теперь представлениями (3) для полей и имея в виду, что функции $\mu_j(x_j)$ продолжены нулем вне интервала $[-a_j, a_j]$, из (2) для определения неизвестных $\{h_j(\alpha)\}_{j=1}^4$ получаем следующую систему парных интегральных уравнений с ядром в виде тригонометрических функций:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_j(\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\exp(i\varepsilon_j\alpha\eta_j)\,d\alpha=\frac{2\pi}{\varepsilon_j}A_j(\alpha_0)\times$$

$$\times\exp[i\varepsilon_jB_j(\alpha_0)\eta_j+ikr_{0j}D_j(\alpha_0)]+\frac{1}{\varepsilon_j}\sum_{q=1,q\neq j}^{4}\varepsilon_q\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_q(\alpha)A_{jq}(\alpha)\times$$

(5)

$$\times\exp[i\varepsilon_jB_{jq}(\alpha)\eta_j+ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)]\,d\alpha,\qquad|\eta_j|<1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_j(\alpha)\exp(i\varepsilon_j\alpha\eta_j)\,d\alpha=0,\qquad|\eta_j|>1.$$

Функции $\{h_j(\alpha)\}_{j=1}^4$ кроме системы уравнений (5) должны удовлетворять соотношениям

(6)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|\alpha|+1)|h_j(\alpha)|^2\,d\alpha<\infty,\qquad j=1,\ldots,4,$$

которые следуют из условия конечности энергии рассеянных волн в любой ограниченной части пространства. Можно показать, что это условие в форме Мейкснера для функций токов вблизи ребер (на вершинах многоугольника) приводит к следующим ограничениям:

(7) $$\mu_j(\eta) \underset{\eta\to\pm1}{\approx} C_j(1-\eta)+C_{j+1}(1+\eta)+(1-\eta^2)^\nu,$$

где $\{C_j\}_{j=1}^4$ — постоянные, подлежащие определению.

Причем функции $\{\mu_j(\eta\}_{j=1}^4$ должны удовлетворять условию непрерывности:

(8) $$\mu_j(+1)=\mu_{j+1}(-1),\ \dots,\ \mu_{N+1}(+1)=\mu_1(-1);\quad C_{N+1}=C_1;\quad N=4.$$

Условие на ребре (7) при переходе от МЦ к совокупности плоских лент путем «расстыковки» граней МЦ запишется в виде $\mu_j(\eta)_{\eta\pm1}\sim(1-\eta^2)^{1/2}$, т. е. коэффициенты $\{C_j\}_{j=1}^4$ полагаются равными нулю, а параметр $\nu={}^1/_2$.

Чтобы удовлетворить условию (7), представим функции $\{\mu_j(\eta)\}_{j=1}^4$ в виде равномерно сходящихся рядов по полной и ортогональной системе полиномов Гегенбауэра $\{C_m^{\nu+1/2}(\eta)\}_{m=0}^\infty$ [13] с весовым множителем $(1-\eta^2)^\nu$:

(9) $$\mu_j(\eta)=C_j(1-\eta)+C_{j+1}(1+\eta)+(1-\eta^2)^\nu\sum_{m=0}^\infty \mu_m^{(j)}C_m^{\nu+1/2}(\eta),$$

где $\{\mu_m^{(j)}\}_{m=0}^\infty$ — новые неизвестные коэффициенты.

Соотношения (9) приводят к новым представлениям для преобразований Фурье функций $\mu_j(\eta)$. Можно убедиться, что они будут иметь следующий вид:

(10) $$h_j(\alpha)=\frac{2i}{\varepsilon_j\alpha}\left[C_{j+1}K_j(-\alpha)-C_jK_j(+\alpha)\right]+$$

$$+\frac{2\pi}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{m=0}^\infty(-i)^m\beta_m^{(\nu)}\mu_m^{(j)}\frac{J_{m+\nu+1/2}(\varepsilon_{j\alpha})}{(2\varepsilon_{j\alpha})^{\nu+1/2}}.$$

Здесь

$$K_j(\pm\alpha)=\exp(\pm i\varepsilon_j\alpha)-\frac{\sin(\varepsilon_j\alpha)}{\varepsilon_j\alpha},$$

$$\beta_m^{(\nu)}=\frac{\Gamma(m+2\nu+1)}{\Gamma(m+1)}$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя.

4. Для решения системы парных интегральных уравнений (5) воспользуемся идеями метода частичного обращения оператора [8]. С этой целью необходимо провести разбиение операторов, порождаемых левыми частями неоднородных уравнений в системе (5) на главные [2] и вполне непрерывные части. Эта процедура реализуется введением величины $\gamma$ по формуле

(11) $$\sqrt{1-\alpha^2}=i|\alpha|\,[1-\gamma(\alpha)];\quad \gamma(\alpha)\underset{|\alpha|\to\infty}{\sim}O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

---

[2] Главная часть интегрального оператора соответствует случаю, когда волновое число $k=0$, т. е. соответствует статике.

Подставляя (10) и (11) в (5), а также пользуясь полнотой и ортогональностью (в интервале $\eta\in[-1, 1]$) полиномов Гегенбауэра и используя разрывные интегралы Вебера — Шафхейтлина [13], для нахождения коэффициентов $\{\mu_m^{(j)}\}_{m=0}^{\infty}$ получаем связанную бесконечную СЛАУ вида

$$(12)\qquad C_{j+1}[C_k^{(-j)}-d_k^{(-j)}]-C_j[C_k^{(+j)}-d_k^{(+j)}]+$$
$$+i\sum_{m=0}^{\infty}[1+(-1)^{k+m}]x_m^{(j)}[C_{km}^{(\nu)}-Q_{km}^{(\nu)}]=$$
$$=f_k^{(j)}-\sum_{q=1,q\neq j}^{4}\left[C_{q+1}P_k^{-jq}-C_qP_k^{+jq}+\sum_{m=0}^{\infty}x_m^{(q)}P_{km}^{jq}\right],\qquad j=1,\dots,4.$$

Здесь введены обозначения:

$$x_m^{(j)}=(-i)^m\mu_m^{(j)}\beta_m^{(\nu)};$$

$$C_k^{(\pm j)}=\frac{i}{\pi}K_\nu^{jj}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha|}{\alpha}K_j(\pm\alpha)J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_j\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+1/2}},$$

$$d_k^{(\pm j)}=\frac{i}{\pi}K_\nu^{jj}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha|}{\alpha}\gamma(\alpha)K_j(\pm\alpha)J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_j\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+1/2}}$$

$$C_{ym}^{(\nu)}=\frac{\Gamma^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1+k-m}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1+m-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+m}{2}+2\nu+1\right)}$$

$$Q_{km}=K_\nu(\varepsilon_j)\int_0^{\infty}\gamma(\alpha)J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_j\alpha)J_{m+\nu+1/2}(\varepsilon_j\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}},$$

$$P_k^{\pm jq}=\frac{i}{\pi}K_\nu^{jq}\left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_q}\right)^{\nu-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jq}(\alpha)K_q(\pm\alpha)\times$$
$$\times\frac{\exp[ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)]}{[B_{jq}(\alpha)]^{\nu+1/2}}J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_jB_{jq}(\alpha))\frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$P_{km}^{jq}=K_\nu^{jq}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jq}(\alpha)J_{m+\nu+1/2}(\varepsilon_q\alpha)\times$$
$$\times J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_jB_{jq}(\alpha))\frac{\exp[ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)]}{[\alpha B_{jq}(\alpha)]^{\nu+1/2}}d\alpha,$$

$$f_k^{(j)}=K_\nu(\varepsilon_j)2^{\nu+1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\exp[ikr_{0j}D_j(\alpha_0)]A_j(\alpha_0)\times$$
$$\times\frac{J_{k+\nu+1/2}(\varepsilon_jB_j(\alpha_0))}{[B_j(\alpha_0)]^{\nu+1/2}},\qquad K_\nu(\varepsilon_j)=\left(\frac{2}{\varepsilon_j}\right)^{2\nu-1}\frac{2\Gamma^2(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu)}.$$
$$K_\nu^{jq}=2(2\varepsilon_q)^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+1/2)K_\nu(\varepsilon_j).$$

Коэффициенты $\{C_j\}_{j=1}^4$ в СЛАУ (12) определяются соотношениями

$$\exp[-i\varepsilon_j B_j(\alpha_0)+ikr_{0j}D_j(\alpha_0)]+\sum_{q=1,q\neq j,j=1}^{4}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}x_m^{(q)}e_m^{jq}+\right. \tag{13}$$

$$\left.+i[C_{q+1}e_{jq}^{(-)}-C_q e_{jq}^{(+)}]\right\}=-C_j;\qquad j=1,\ldots,4,$$

которые следуют из определения функций тока на гранях МЦ и из условий на ребре (7), (8). В (13) величины $\{e_m^{jq}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{e_{jq}^{(\pm)}\}_{j\neq q=1}^{4}$ определены следующим образом:

$$e_{jq}^{(\pm)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_q(\pm\alpha)\exp[-i\varepsilon_j B_{jq}(\alpha)+ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)]\,\frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$e_m^{jq}=\frac{\varepsilon_q}{(2\varepsilon_q)^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-\infty}^{\infty}J_{m+\nu+1/2}(\varepsilon_q\alpha)\exp[-i\varepsilon_j B_{jq}(\alpha)+$$

$$+ikl_{jq}D_{jq}(\alpha)]\,\frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+1/2}}.$$

Доказано, что для бесконечных СЛАУ (12) справедлива альтернатива Фредгольма. Доказательство основано на том, что, во-первых, установлена ограниченность норм в гильбертовом пространстве $l_2$ матричных операторов $\{C^{(j)}\}_{j=1}^4$, $\{Q_j\}_{j=1}^4$, $\{P_{jq}\}_{j\neq q=1}^4$, которым соответствуют матрицы $\{C_{km}^{(\nu)}\}_{k,\,m=0}^{\infty}$, $\{Q_{km}^{(\nu)}\}_{k,\,m=0}^{\infty}$ и $\{P_{km}^{jq}\}_{k,\,m=0}^{\infty}$ соответственно, а, во-вторых, показана положительная определенность операторов $\{C^{(j)}\}_{j=1}^4$. Иными словами, в пространстве $l_2$ матричные операторы $\{Q_j\}_{j=1}^4$, $\{P_{jq}\}_{j\neq q=1}^4$ являются вполне непрерывными операторами, а операторы $\{C^{(j)}\}_{j=1}^4$ имеют двухсторонний непрерывный обратный оператор. Также показано, что числовые последовательности $\{f_k^{(j)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{C_k^{(\pm j)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{d_k^{(\pm j)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{P_k^{\pm jq}\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежат пространству $l_2$. Следовательно, можно утверждать, что бесконечная СЛАУ (12) принадлежит к классу операторных уравнений (см. [14]), для которых справедлива альтернатива Фредгольма.

В качестве примера приведем следующие оценки для норм операторов $\{P_{jq}\}_{j\neq q=1}^4$, которые описывают взаимодействие граней МЦ:

$$\|P_{12}\|=\|P_{21}\|\leqslant\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\nu-1/2}\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left[\frac{1}{\Gamma(1+2\nu)}+\zeta(2\nu)-\right.$$

$$\left.-\nu(2\nu+1)\zeta(2\nu+1)+\ldots\right]<\infty,$$

$$\frac{1}{2}<\nu<1, \tag{14}$$

$$\|P_{24}\|^2=\|P_{42}\|^2\leqslant\frac{2^{4\nu}}{\pi}\,\varepsilon_2^{\,3}\alpha_\nu^{(1)}\left\{\frac{d_\nu}{\varepsilon_1^{\,\nu/2}}K_{\nu/2}(2\varepsilon_1)+\alpha_\nu^{(2)}\,(\varepsilon_2)-\right.$$

$$-2^{3/2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_2^{2m}\frac{(-1)^n\Gamma(n+m+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+m+\nu+{}^3/_2)\Gamma(2m+n+2\nu+2)}\times$$
$$\times\frac{\partial^{2n+2m-1}}{\partial(2\varepsilon_1)^{2m+2m-1}}\left[\frac{K_{5/2}(2\varepsilon_1)}{(2\varepsilon_1)}\right]\Bigg\}<\infty.$$

Здесь $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, $K_{n/2}(x)$ — сферическая функция Макдональда, а $\alpha_\nu^{(1)}$, $d_\nu$, $\alpha_\nu^{(2)}(\varepsilon_2)$ — величины, зависящие от параметров $\nu$ и $\varepsilon_2$ соответственно.

Приближенные решения бесконечных СЛАУ (12) могут быть получены методом редукции. Действительно, поскольку положительно определенные операторы $\{C^{(j)}\}_{j=1}^4$ могут быть представлены в форме (см. [15]) $C^{(j)}=T_j+\alpha I$, где $T_j$ — некоторый положительный оператор, $I$ — единичный оператор, а $\alpha$ — действительное число, то с учетом того, что операторы $\{Q_j\}_{j=1}^4$ и $\{P_{jq}\}_{j\neq q=1}^4$ вполне непрерывны, приходим к выводу (см. [16]) о применимости метода редукции к решению бесконечных СЛАУ (12).

5. Выше во всех формулах не подставлялось конкретное значение параметра $\nu$, который определяется условием на ребре (в рассматриваемом случае $\nu=\frac{2}{3}$). Это вызвано необходимостью иметь возможность в частном случае получить и новое строгое решение задачи дифракции волн на совокупности ключевых элементов. Ясно, что если полагать $\nu={}^1/_2$ и считать, что размеры плоских лент $\{a_j\}_{j=1}^4$ таковы, что они не касаются друг друга (грани прямоугольника расстыкованы), то с помощью бесконечных СЛАУ из (12) можно получить строгое решение задачи дифракции волн на системе из четырех лент. (При этом, как отмечалось в разд. 3, необходимо коэффициенты $\{C_j\}_{j=1}^4$ в СЛАУ (12) полагать равными нулю.) Причем при таких значениях параметров $\nu$ и $\{a_j\}_{j=1}^4$ система уравнений (12) переходит в СЛАУ Фредгольма 2-го рода относительно коэффициентов $\{\mu_m^{(j)}\}_{m=0}^{\infty}$. Это следует из того, что матрица $[1+(-1)^{k+m}]C_{km}^{(1/2)}\beta_{km}^{1/2}=\delta_{km}$ становится диагональной ($\delta_{km}$ — символ Кронекера). Таким образом, полученное решение носит общий характер для структур, состоящих из конечного числа плоских лент с параллельными образующими (ленточные резонаторы (рис. 1, *в* — *д*), отражатели, близкие к уголковым (рис. 1, *е*), и др.). Множество таких структур ограничено лишь тем, что поверхности лент, а также их продолжения не должны пересекать поверхности соседних лент.

6. При численной реализации данного подхода основным моментом является расчет матричных элементов СЛАУ (12), которые представляют собой несобственные интегралы. Установлено, что с ростом переменной интегрирования подынтегральная функция в величинах $Q_{km}^{(\nu)}$ и $P_{km}^{iq}$ убывает соответственно как $O\left(\frac{1}{\alpha^{3+2\nu}}\right)$ и $O\left(\frac{1}{\alpha^{2\nu+1}}\right)$. Такое убывание подынтегральных функций приводит к тому, что величины $Q_{km}^{(\nu)}$ и $P_{km}^{12}$ с ростом индексов убывают как

$$(15)\qquad Q_{km}^{(\nu)}\underset{k,\,m\to\infty}{\sim}O\left[\frac{1}{(km)^{1+\nu}}\right];\quad P_{km}^{12}\underset{k,\,m\to\infty}{\sim}O\left[\frac{1}{(km)^{\nu}}\right];\quad \nu>\frac{1}{2}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что интегралы в величинах $Q_{km}^{(\nu)}$ могут быть вычислены, например, методом Симпсона. Что касается интегралов в $P_{km}{}^{12}$, то для получения надежных численных результатов необходимо провести улучшения сходимости подынтегральной функции. Самый простой путь в этом направлении заключается в том, что надо отнять и прибавить асимптотику подынтегральной функции.

Здесь же отметим, что асимптотика (15) для матричных элементов $P_{km}{}^{12}$ и оценка нормы операторов, порождаемых этими матрицами (см. (14)), позволяют сделать два очень важных вывода: *во-первых*, данный подход не позволяет сделать непрерывный предельный переход от прямоугольника к плоской ленте, т. е., например, нельзя высоту прямоугольника $a_1$ устремлять к нулю, так как норма оператора $\|P_{24}\|$ неограниченно возрастает (что следует из (14)). Переход к ленте и другим структурам из лент можно проводить так, как это указано в разд. 5; *во-вторых*, невозможно стыковать бесконечно тонкие ленты, не изменив условия на ребре (в точке стыка), поскольку, если в СЛАУ (12) полагать $\nu={}^1/_2$, то оператор $P_{12}$ не будет вполне непрерывным.

Разработан комплекс программ на языке АЛГОЛ-ГДР для ЭВМ БЭСМ-6. Приводимые ниже результаты получены на их основе.

По найденным коэффициентам $\{x_m^{(j)}\}_{m=0}^{\infty}$ из СЛАУ (12) плотности поверхностных токов рассчитывались по формуле (9), а поперечник полного рассеяния и ДН рассеянного поля по формулам

$$\sigma_s{}^H=-\frac{4}{k}\operatorname{Re}\Phi(\vartheta_0),$$

$$\Phi(\varphi)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j\sin(\varphi-\varphi_j)\exp[ikr_{0j}\cos(\varphi-\varphi_{0j})]\times$$

$$\times\left\{\frac{2i}{\varepsilon_j\cos(\varphi-\varphi_j)}\Big[C_{j+1}K_j(-\cos(\varphi-\varphi_j))-C_jK_j(\cos(\varphi-\varphi_j))+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi}{\Gamma(\nu+{}^1/_2)}\sum_{m=0}^{\infty}x_m^{(j)}\frac{J_{m+\nu+{}^1/_2}(\varepsilon_j\cos(\varphi-\varphi_j))}{[2\varepsilon_j\cos(\varphi-\varphi_j)]^{\nu+{}^1/_2}}\Big]\right\},$$

которые можно получить, пользуясь выражением рассеянных полей в дальней зоне и оптической теоремой [12]. На рис. 2 приведены распределения плотности поверхностных токов на гранях цилиндра с квадратным сечениемм при различных значениях частотного параметра $\varepsilon=ka$ и угла падения $\vartheta_0$. Из этих рисунков видно, что при нормальном падении волны ($\vartheta_0=90°$) значение амплитуды тока на грани в области тени значительно меньше, чем в освещенной области, и с ростом $\varepsilon$ в теневой области число осцилляций тока заметно увеличивается. При угле падения $\vartheta_0=45°$ две боковые грани цилиндра освещаются равномерно, поэтому токи на них по амплитуде заметно превосходят токи на неосвещенных гранях. Такое распределение токов приводит к появлению в ДН поля (см. рис. 2) боковых лепестков, сравнимых с основным и тенеобразующими лепестками. ДН при $\vartheta_0=90°$ и $ka>1$ напоминает ДН плоской ленты (изрезанность ДН вблизи нуля связана с влиянием боковых граней), а при $ka<1$ – ДН кругового цилиндра.

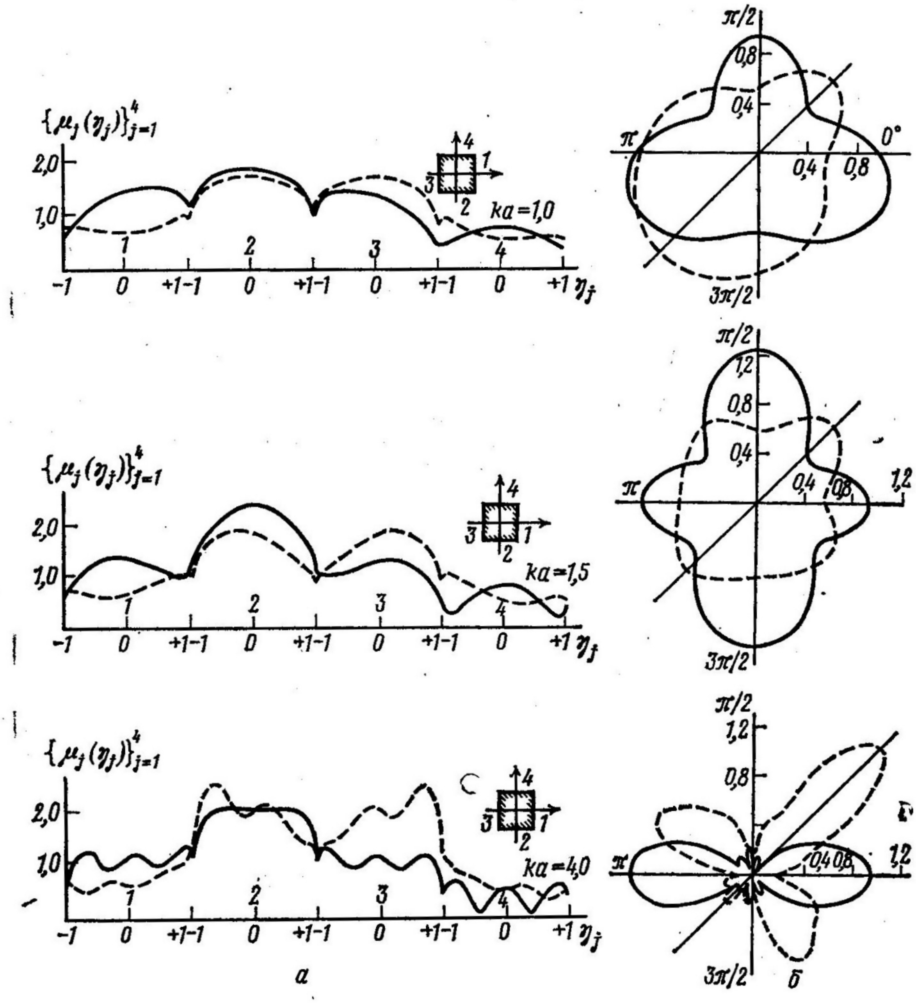

Рис. 2. Распределение функции плотности тока $|\mu_j(\eta)|_{j=1}^4$ на гранях квадратного цилиндра при различных $\varepsilon = ka$; ДН поля при $\vartheta_0 = 90°$ (сплошная линия); 45° (штриховая линия)

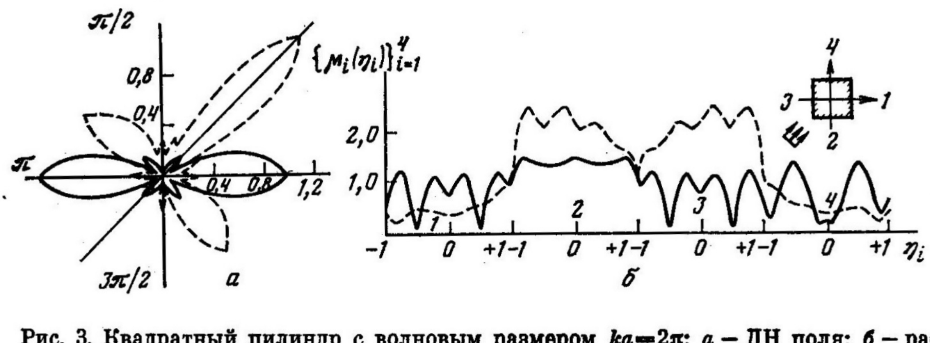

Рис. 3. Квадратный цилиндр с волновым размером $ka = 2\pi$; *а* — ДН поля; *б* — распределение функции плотности тока при $\vartheta_0 = 90°$ (сплошная линия); 45° (штриховая линия)

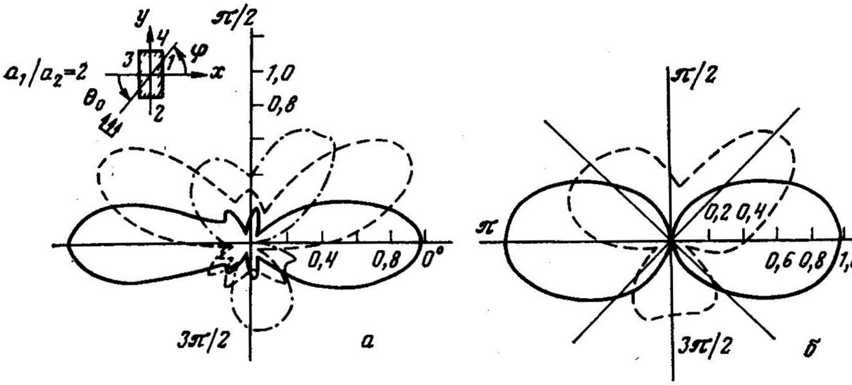


Рис. 4. ДН поля для прямоугольного цилиндра при различных $ka$ и $\vartheta_0$; *а* — $ka_1=4$ при $\vartheta_0=0$ (сплошная линия); 30° (штриховая линия); 60° (штрихпунктирная); *б* — $ka_1=3$ при $\vartheta_0=0$ (сплошная линия); 45° (штриховая)

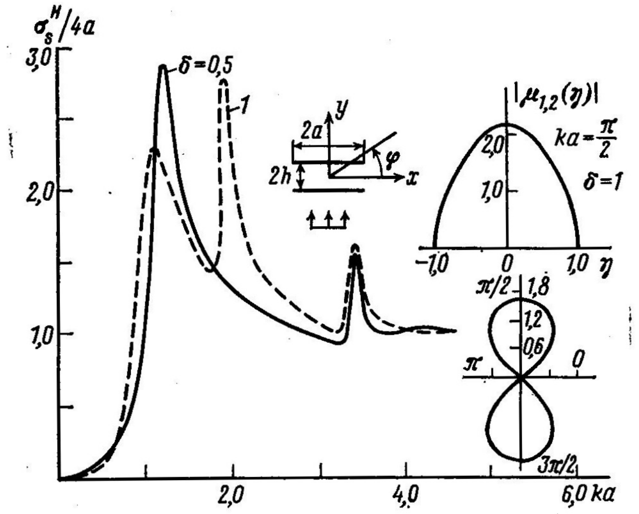


Рис. 5. Частотные зависимости поперечника полного рассеяния $\sigma_s^н/4a$ при $\delta=h/a=0{,}5$; 1, а также распределение функции плотности тока $|\mu_j(\eta)|^2_{j=1}$ на поверхности лент резонатора и ДН поля при $ka=\pi/2$, $\delta=1$, $\vartheta_0=90°$

На рис. 3 приведены распределения токов и ДН поля для цилиндра с квадратным сечением при $ka=2\pi$. ДН поля для цилиндров с прямоугольным сечением при различных $ka_1$ и $\vartheta_0$ представлены на рис. 4. Заметим, что ДН поля на рис. 3 совпадает с графической точностью с ДН, приведенной в [7].

В таблице выписаны значения $\sigma_s^н$ для различных $ka$ и $\vartheta_0$. На рис. 5 в качестве примера показаны частотные зависимости $\sigma_s^н$ для плоского ленточного резонатора при значениях параметра $\delta=h/a=0{,}5$; 1, а также распределения токов на лентах и ДН. Эти результаты полностью совпадают с данными работы [17]. Как следует из рис. 5, зависимости $\sigma_s^н$ от $ka$ носят резонансный характер. Резонансы связаны с возбуждением квазисобственных колебаний ленточного резонатора [17].

| $ka$ | $\sigma_s^H$ $\theta_0$, град 90 | $\sigma_s^H$ $\theta_0$, град 45 | $ka$ | $\sigma_s^H$ $\theta_0$, град 90 | $\sigma_s^H$ $\theta_0$, град 45 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,4 | 0,13835 | 0,14117 | 3 | 0,97857 | 1,12862 |
| 0,8 | 0,60643 | 0,63168 | 4 | 0,96065 | 1,35398 |
| 1,2 | 0,89496 | 0,69736 | 5 | 1,03665 | 1,47678 |
| 1,5 | 1,14448 | 0,71475 | $2\pi$ | 0,98557 | 1,5233 |

В заключение отметим, что на основе предложенного метода решены и задачи дифракции на многоугольных цилиндрах с более сложным поперечным сечением [18, 19].

Авторы признательны проф. А. С. Ильинскому за обсуждение результатов работы и высказанные при этом ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Mei K. K., Van Bladle J. G.* // IEEE Trans. 1963. V. AP-11. No 2. P. 185.
2. *Izuka K., Yen J. L.* // IEEE Trans. 1967. V. AP-15. No 6. P. 795.
3. *Abdelmessih S., Sinclar G.* // Canad. J. Phys. 1967. V. 45. No 3. P. 1305.
4. *Shafai L.* // Canad. J. Phys. 1970. V. 48. No 8. P. 954.
5. *Hunter J. D.* // Canad. J. Phys. 1972. V. 50. No 2. P. 139.
6. *Morse B. J.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. No 2. P. 199.
7. *Митра Р., Гао В., Рахмат-Самий.* // ТИИЭР. 1979. Т. 67. № 11. С. 20.
8. Новое в зарубежной науке: Численные методы теории дифракции. М.: Мир, 1982. № 29.
9. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983.
10. *Велиев Э. И.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 2. С. 319.
11. *Велиев Э. И., Веремей В. В.* // Тез. докл. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1. С. 511.
12. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
13. *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
14. *Конторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
16. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
17. *Борзенков А. В., Сологуб В. Г.* // РЭ. 1975. Т. 20. № 5. С. 925.
18. *Велиев Э. И., Шестопалов В. П.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1094.
19. *Велиев Э. И.* // Докл. АН УССР. 1985. Сер. А. № 10. С. 43.


Поступила в редакцию
27.II.1986