ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 300 №4

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Э.И. ВЕЛИЕВ, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В различных краевых задачах прикладной математической физики [1, 2] возникают следующие парные интегральные (либо сумматорные) уравнения с ядром в виде тригонометрических функций:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)K(\alpha)e^{i\epsilon\alpha\eta}d\alpha = f(\eta), \quad |\eta|<1,\\ &\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)e^{i\epsilon\alpha\eta}d\alpha = 0, \quad |\eta|>1. \end{aligned}$$

Здесь искомая функция $h(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции

$$\mu(\eta) = \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)e^{-i\epsilon\alpha\eta}d\alpha,$$

которая продолжена нулем вне интервала $\eta\in[-1,1]$, т.е. $\mu(\eta)=0$ при $|\eta|>1$; $\epsilon\geqslant 0$ — вещественный параметр, $K(\alpha)$ и $f(\eta)$ — заданные комплекснозначные функции.

Предлагается общий подход в решении (1), основанный на применении метода моментов в пространстве преобразований Фурье [3].

Заметим, что $h(\alpha)$ должна принадлежать к классу функций

$$(2)\qquad \widetilde{L}_2(-\infty,\infty) = \left\{h(\alpha)\colon \int_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha)|^2(|\alpha|+1)\,d\alpha<\infty\right\},$$

который является естественным в задачах теории дифракции на ограниченных телах с ребрами, поскольку к нему приводит условие конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства (условие Мейкснера) [4].

1. Исследуем систему (2) при следующих предположениях:

а) искомая функция $h(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции $\mu(\eta)$, для которой

$$(3)\qquad \mu(\eta) = \begin{cases}(1-\eta^2)^{\nu}\varphi(\eta), & \eta\in[-1,1]; \quad ½\leqslant\nu<1,\\ 0, & \eta\notin[-1,1],\end{cases}$$

где $\varphi(\eta)$ — непрерывная функция, принадлежащая пространству $L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu}]$, которое является пространством регулярных функций со скалярным произведением, имеющим весовой множитель $(1-\eta^2)^{\nu}$ [5, 6];

б) функция $K(\alpha)$ представима в виде

$$(4)\qquad K(\alpha) = C|\alpha|\,[1-\gamma(\alpha)]; \quad \gamma(-\alpha)=\gamma(\alpha),$$

где C — постоянная, а функция $\gamma(\alpha) \underset{|\alpha|\to\infty}{\sim} O(|\alpha|^{-1-s})$, $0<s<1$;

в) заданная функция $f(\eta)$ непрерывна и принадлежит пространству $L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu}]$, т.е.

$$(5)\qquad f(\eta)\in L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu}].$$

Покажем, что при указанных предположениях существует единственное решение (1), принадлежащее пространству функций $\widetilde{L}_2(-\infty, \infty)$.

Отметим, что наложенное на функцию $\mu(\eta)$ условие (3) является естественным для задачи дифракции на телах с ребрами (следствие условия Мейкснера) [4].

Система (1) исследовалась в основном для класса функций $\mu(\eta)$ с условием (3) при $\nu = 1/2$. При этом различными методами удается эти уравнения свести к уравнениям Фредгольма 2-го рода [1, 7–10]. Ниже излагается более общий подход к решению (1) для класса функций $\mu(\eta)$ с условием (3), где $\frac{1}{2} \leqslant \nu < 1$, в котором как частный случай (при $\nu = 1/2$) содержатся ранее полученные результаты.

2. Учитывая, что непрерывная функция $\varphi(\eta)$ принадлежит пространству $L_2[-1, 1; (1-\eta^2)^\nu]$, в котором полиномы Гегенбауэра $\{C_n^{\nu+1/2}(\eta)\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис [5, 6], ее можно разложить в равномерно сходящиеся ряды по этим полиномам. Тогда согласно (3) для функции $\mu(\eta)$ запишем представление

$$(6)\qquad \mu(\eta) = (1-\eta^2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} x_n C_n^{\nu+1/2}(\eta).$$

Здесь $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты. Используя (6) для преобразования Фурье $h(\alpha)$ функции $\mu(\eta)$, можно получить следующее представление:

$$(7)\qquad h(\alpha) = \frac{2\pi}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n x_n \beta_n^{(\nu+\frac{1}{2})} \frac{J_{n+\nu+1/2}(\epsilon\alpha)}{(2\epsilon\alpha)^{\nu+1/2}}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \nu < 1,$$

где $J_\nu(x)$ – функции Бесселя, $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\beta_n^{(\nu+1/2)} = \Gamma(n+2\nu+1)/\Gamma(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} O(n^{2\nu})$.

Ряд в (7) сходится равномерно, поскольку он получен интегрированием равномерно сходящегося ряда (6). Следовательно, для функции $h(\alpha)$ имеет место асимптотика $h(\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} O(\alpha^{-1-\nu})$ и она принадлежит пространству $\widetilde{L}_2(-\infty, \infty)$.

Из представления (7) следует, что определение функции $h(\alpha)$ сводится к нахождению коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Причем последние должны принадлежать пространству числовых последовательностей $l_2(\nu+1/2)$, где

$$(8)\qquad l_2(\nu+\tfrac{1}{2}) = \left\{x_n:\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \beta_n^{(\nu+1/2)} < \infty\right\}.$$

Это следует из $h(\alpha) \in \widetilde{L}_2(-\infty, \infty)$ (см. (2)).

Для определения неизвестных $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ подставим в (1) представления (3) и (7). При этом учтем, что функции $f(\eta)$, $e^{i\epsilon\alpha\eta} \in L_2[-1, 1; (1-\eta^2)^\nu]$, и поэтому для них справедливы разложения [6]

$$(9)\qquad f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k C_k^{\nu+1/2}(\eta); \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \frac{\beta_k^{(\nu+1/2)}}{k+\nu+1/2} < \infty,$$

$$e^{i\epsilon\alpha\eta} = \left(\frac{2}{\epsilon\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} i^k (k+\nu+\tfrac{1}{2}) J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon\alpha) C_k^{\nu+\frac{1}{2}}(\eta).$$

Пользуясь теперь полнотой полиномов Гегендауэра и свойством разрывных интегралов Вебе́ра–Шафхейтлина [5], убедимся, что однородное уравнение в системе (1) удовлетворяется тождественно, а для нахождения коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

существует бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$(10)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n x_n \beta_n^{(\nu+1/2)}[C_{kn}^{(\nu+1/2)} - d_{kn}^{(\nu+1/2)}] = \Gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь введены обозначения

$$C_{kn}^{(\nu+1/2)} = \frac{[1+(-1)^{k+n}]\Gamma^2(\nu+1/2)\Gamma((n+k)/2+1)}{\Gamma(\nu+(1+k-n)/2)\Gamma(\nu+(1+n-k)/2)\Gamma((k+n)/2+2\nu+1)};$$

$$C_{kn}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & k = n, \\ 0, & k \neq n; \end{cases}$$

$$(11)\quad d_{kn}^{(\nu+1/2)} = [1+(-1)^{k+n}]\, K_{\nu+1/2}(\epsilon) \int_0^{\infty} \gamma(\alpha) J_{k+\nu+1/2}(\epsilon\alpha) J_{n+\nu+1/2}(\epsilon\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}},$$

$$\Gamma_k = \frac{\epsilon^{2\nu+1}K_{\nu+1/2}\, f_k}{2\pi C i^k (k+\nu+1/2)}; \qquad K_{\nu+1/2}(\epsilon) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}{\epsilon^{2\nu-1}\Gamma(\nu)}.$$

3. В (10) неизвестные $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in l_2(\nu + 1/2)$. Однако вопросы разрешимости (существование и единственность решения) этого уравнения удобно исследовать в пространстве l_2. Чтобы перейти к этому пространству, введем новые неизвестные $y_n = (-i)^n x_n \sqrt{\beta_n^{(\nu+1/2)}}$, которые согласно (8) уже будут принадлежать l_2. Тогда (10) относительно неизвестных y_n запишется в виде

$$(12)\quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n (A_{kn}^{\nu} - Q_{kn}^{\nu}) = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$A_{kn}^{\nu} = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)}\beta_n^{(\nu+1/2)}}\, C_{kn}^{(\nu+1/2)}, \quad Q_{kn}^{\nu} = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)}\beta_n^{(\nu+1/2)}}\, d_{kn}^{(\nu+1/2)},$$
$$b_k = \sqrt{\beta_k^{(\nu+1/2)}}\,\Gamma_k.$$

Уравнения (12) в пространстве l_2 представимы в операторной форме

$$(13)\quad y(A - Q) = b.$$

Здесь y и b — вектор-столбцы, порожденные коэффициентами $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, а операторам A и Q соответствуют матрицы $\{A_{kn}^{\nu}\}_{k,n=0}^{\infty}$ и $\{Q_{kn}^{\nu}\}_{k,n=0}^{\infty}$. Убедимся, что $b \in l_2$. Пользуясь определением b (см. (12) и (10)), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^{(\nu+1/2)} \left|\frac{f_k}{k+\nu+1/2}\right|^2.$$

Этот ряд сходится, поскольку для коэффициентов $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ существует неравенство (9), следовательно, $b \in l_2$. Далее, оператор A является симметричным, положительно определенным оператором и может быть представлен в l_2 в виде суммы единичного и вполне непрерывного операторов, т.е. $A = I + A_1$, где вполне непрерывному оператору A_1 соответствует матрица $\{A_{kn}^1\}_{k,n=0}^{\infty}$, для которой

$$A_{kn}^1 = \begin{cases} A_{kn}, \ k \neq n; & 1/2 < \nu < 1, \\ 0, & \nu = 1/2, \end{cases} \qquad A_{kk}^1 = 0.$$

Причем для матричных элементов A^1_{kn} имеет место асимптотика $A^1_{kn} \underset{k,n\to\infty}{\sim} O[(kn)^{-3\nu}]$.

Оператор Q в уравнении (13) является вполне непрерывным в l_2, поскольку для его нормы, пользуясь (4) и (11), на основе неравенства Коши-Буняковского может быть получена оценка

$$\|Q\| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |Q^{\nu}_{kn}|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \alpha(\epsilon,\nu,s) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+2\nu+1)\Gamma(k+(1-s)/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2\nu+(3+s)/2)} < \infty,$$

где $\alpha(\epsilon,\nu,s)$ – постоянная, зависящая от параметров ϵ, ν, s.

Таким образом, учитывая свойства операторов A и Q, операторное уравнение (13) может быть записано в виде

$$(14)\quad y[I+(A_1-Q)]=b,$$

которое является уравнением Фредгольма 2-го рода с вполне непрерывным матричным оператором. Следовательно, можно утверждать, что решение уравнения (14) существует и оно единственно [11]. Отсюда также следует, что приближенное решение (12) с любой наперед заданной точностью может быть получено на основе метода редукции [11].

Это позволяет утверждать, что существует и единственное решение системы (1), принадлежащее пространству $\widetilde{L}_2(-\infty,\infty)$, которое задается формулой (7).

4. Рассмотрим частный случай ($\nu = 1/2$). При дифракции плоской H-поляризованной волны $H = e^{ik(\alpha_0 x + \sqrt{1-\alpha_0^2}\, y)}$ ($\alpha_0 = \cos\vartheta$, ϑ – угол падения волны) на бесконечно тонкой и идеально проводящей плоской ленте возникает система (1) с $K(\alpha)$ и $f(\eta)$ вида

$$K(\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2}=i\,|\alpha|\,[1-\gamma(\alpha)],\qquad f(\eta)=-\frac{2\pi}{\epsilon}\sqrt{1-\alpha_0^2}\,e^{i\epsilon\alpha_0\eta}.$$

При этом бесконечная система линейных алгебраических уравнений, задающих решение этой задачи, примет вид

$$(15)\quad \begin{aligned} &(-1)^k x_{2k} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_{2n}(2n+1)\,d^{(1)}_{2k\,2n} = -2i\frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0^2}J_{2k+1}(\epsilon\alpha_0),\\ &(-1)^k x_{2k+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_{2n+1}(2n+2)\,d^{(1)}_{2k+1\,2n+1} =\\ &= 2\frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0^2}J_{2k+2}(\epsilon\alpha_0). \end{aligned}$$

Аналогичные уравнения получены в [8, 9].

Пользуясь представлением (7) для функции $h(\alpha)$ при $\nu = ½$, а также (15) для образцов Фурье $h(\alpha)$, можно получить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода вида

$$(16)\quad h^+(\alpha) = -u^+K^+(\alpha,\alpha_0)\sqrt{1-\alpha_0^2}\,\frac{4\pi}{\epsilon} + 2\int_0^{\infty}\beta h^{\pm}(\beta)K^{\pm}(\alpha,\beta)\gamma(\beta)\,d\beta;\quad u^{\pm}=\left\{\begin{matrix} i\\ 1\end{matrix}\right\}.$$

Здесь $h^{\pm}(\alpha) = h(\alpha) \pm h(-\alpha)$, а для функций $K^{\pm}(\alpha, \beta)$ запишем представления

$$K^{+}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\epsilon\alpha) J_{2k+1}(\epsilon\beta) =$$

$$= \frac{2}{\epsilon(\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha J_1(\epsilon\alpha) J_0(\epsilon\beta) - \beta J_0(\epsilon\alpha) J_1(\epsilon\beta)],$$

$$K^{-}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) J_{2k+2}(\epsilon\alpha) J_{2k+2}(\epsilon\beta) =$$

$$= \frac{2}{\epsilon(\alpha^2 - \beta^2)} [\beta J_1(\epsilon\alpha) J_0(\epsilon\beta) - \alpha J_0(\epsilon\alpha) J_1(\epsilon\beta)].$$

Интегральные уравнения типа (16) получены в [7] методом задачи Римана–Гильберта, а в [10] методом интегрального преобразования Абеля.

Заметим, что предложенный метод решения уравнений (1) можно обобщить для парных интегральных и сумматорных уравнений с другими ядрами.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
13 V 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с. 2. *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 252 с. 3. *Миттра Р., Гао В., Рахман-Самий Я.* – Тр. Ин-та инж. по электротехн. и радиоэлектр., 1979, т. 67, № 11, с. 20–40. 4. *Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с. 5. *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. т. 2. 296 с. 6. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 320 с. 7. *Сологуб В.Г.* ЖВМиМФ, 1971, т. 11, № 4, с. 837–853. 8. *Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л.* Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наук. думка, 1984. 240 с. 9. *Велиев Э.И., Ахмедов Т.М.* – Докл. АН УССР, 1983. Сер. А, № 3. с. 55–59. 10. *Виноградов С.С., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1982, т. 267, № 2, с. 330–334. 11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.