

**ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР**

1988

ТОМ 301 № 3

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

основе кинетической теории разрушения и метода акустической эмиссии регистрации трещин подход к оценке прочности и долговечности адгезионных соединений является достаточно перспективным. Тем самым открывается возможность неразрушающей экспресс-диагностики и индивидуального контроля качества полимерных покрытий. Предлагаемый метод может оказаться также полезным при подборе состава полимерных композиций и параметров технологического режима, ведущих к созданию соединений с заданными свойствами.

Благодарим С.Н. Журкова за интерес к работе и обсуждение результатов.

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффа
Академии наук СССР, Ленинград
Ленинградский политехнический институт
им. М.И. Калинина

Поступило
30 IV 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухарева Л.А. Долговечность полимерных покрытий. М.: Химия, 1984. 284 с.
2. Фрейд А.С. Прочность и долговечность клееных соединений. М.: Химия, 1971. 256 с.
3. Сахаровский А.Т. Физико-механические свойства полимерных и лакокрасочных покрытий. М.: Химия, 1978.
4. Журков С.Н. — Вестн. АН СССР, 1968, № 3, с. 46—52.
5. Журков С.Н., Куксенко В.С., Петров В.А. — ДАН, 1981, т. 259, № 6, с. 1350—1353.
6. Генель С.В., Белый В.А., Булгаков В.Я., Гехтман Г.А. Применение полимерных материалов в качестве покрытий. М.: Химия, 1968.
7. Moyle H.G., Hansmann H. — Farbe u. Lack, 1983, Bd. 89, № 10, S. 772—780.
8. Strivens T.A., Bahra M.S. — J. Oil and Colour Chem. Assoc., 1983, vol. 66, № 11, p. 341—344.
9. Кривопап Б.А. В кн.: Надежность и долговечность полимерных материалов и изделий из них. М., 1969.

УДК 517.946.43:535.42

ФИЗИКА

Э.И. ВЕЛИЕВ, В.В. ВЕРЕМЕЙ, академик АН УССР В.Л. ШЕСТОПАЛОВ

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ЛЕНТЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Практическое применение проводящих экранов в радиофизике и электронике предъявляет более жесткие требования к математическим моделям. При исследовании электродинамических свойств различных препятствий используется модель бесконечно тонкого и идеального проводящего экрана, что позволяет решение граничной задачи существенно упростить. Отказ от модели бесконечно тонкого экрана приводит к качественно новым трудностям при построении строгого в математическом отношении решения задачи дифракции даже в случае плоской ленты конечной толщины. Правильный учет толщины экрана, а также установление границ справедливости модели бесконечно тонкого экрана особенно актуальны при исследованиях в миллиметровом диапазоне длин волн.

1. Пусть на идеально проводящий цилиндр с прямоугольным поперечным сечением падает под углом θ_0 к оси OX плоская H -поляризованная волна* $H_z^0 = e^{i(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}$ (см. рис. 1). Размеры сторон прямоугольника попарно равны $2a_1$ и $2a_2$. Введем главную систему координат xoy , связанную с центром цилиндра, а также локальные системы координат $x'o'y'$, начала которых связаны с центрами граней.

* Временная зависимость $e^{-i\omega t}$ всюду опускается.

Требуется определить рассеянное поле. Для решения поставленной задачи дифракции воспользуемся гибридным методом, предложенным в [1,2]. В его основе лежат идеи методов моментов и полуобращения. Сперва, следуя [1,2], функции плотностей поверхностных токов $\{\mu_s\}_{s=1}^4$, наведенных на гранях цилиндра, представим в виде ряда по системе базисных функций с соответствующим весовым множителем, обеспечивающим заданное поведение токов вблизи ребра. В рассматриваемом случае функции $\{\mu_s\}_{s=1}^4$ при приближении к ребрам (вершинам прямоугольника) стремятся к некоторым постоянным как $O(\rho^{2/3})$, где $\rho \rightarrow 0$ — расстояние до ребра. Чтобы это выполнялось, функции $\{\mu_s\}_{s=1}^4$ в локальных системах координат $x'o'y'$ будем искать в виде

$$(1) \quad \mu_s(\eta_s) = C_s(1 - \eta_s) + C_{s+1}(1 + \eta_s) + (1 - \eta_s^2)^\nu \varphi_s(\eta_s),$$

где $\{C_s\}_{s=1}^4$ — неизвестные постоянные, $\{\eta_s = x_s/a_s\}_{s=1}^4 \in [-1, 1]$ — нормированная координата, $\nu = 2/3$, $\{\varphi_s(\eta_s)\}_{s=1}^4$ — некоторые регулярные функции, принадлежащие пространству функций $L_2(-1, 1; (1 - \eta^2)^\nu)$, в котором скалярное произведение определено с весовым множителем $(1 - \eta^2)^\nu$. В этом пространстве функции $\{\varphi_s(\eta_s)\}_{s=1}^4$ могут быть разложены в равномерно сходящиеся ряды по полиномам Гегенбауэра $\{C_n^{\nu+1/2}(\eta_s)\}_{n=0}^\infty$:

$$(2) \quad \varphi_s(\eta_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^s C_n^{\nu+1/2}(\eta_s), \quad \nu = 2/3,$$

где $\{\mu_n^s\}_{n=0}^\infty$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для функций $\{\mu_s(\eta_s)\}_{s=1}^4$ справедливо условие непрерывности на ребрах, когда $\eta_s = \pm 1$,

$$(3) \quad \mu_1(+1) = \mu_2(-1) = 2C_2, \dots, \mu_4(+1) = \mu_3(-1) = 2C_1.$$

Поле дифракции при этом представляется в виде суперпозиции полей, рассеянных каждой из граней цилиндра, т.е. $H_z^P = \sum_{s=1}^4 H_z^s$. В свою очередь рассеянные поля $\{H_z^s\}_{s=1}^4$ могут быть определены в виде потенциала двойного слоя с плотностью, совпадающей с функцией плотности тока $\mu_s(\eta_s)$ [3]:

$$(4) \quad H_z^s = \frac{i}{4} \int_{-1}^1 \mu_s(\eta_s') \frac{\partial}{\partial \xi_s} H_0^{(1)}(\epsilon_s \sqrt{(\eta_s - \eta_s')^2 + \xi_s^2}) d\eta_s'.$$

Здесь $\xi_s = y_s/a_s$, $\epsilon_s = ka_s$ — частотный параметр, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля нулевого порядка (двумерная функция Грина свободного пространства). Напомним, что функция тока $\mu_s(\eta_s)$ с точностью до постоянного множителя совпадает со значением z -й составляющей полного магнитного поля на поверхности грани цилиндра.

Переходя к образам фурье-функций $\mu^s(\eta_s)$, после подчинения полного поля граничного условию Неймана на поверхности цилиндра получаем связанные системы парных интегральных уравнений [1,2]. Воспользовавшись свойством разрывных интегралов Вебера—Шафхейлиана и производя частичное обращение оператора задачи, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $\{C_s\}_{s=1}^4$ и $\{\mu_n^s\}_{n=0}^\infty$:

$$(5) \quad C_{j+1} [C_k^{(-j)} - d_k^{(-j)}] - C_j [C_k^{(+j)} - d_k^{(+j)}] + \sum_{m=0}^{\infty} x_m^{(j)} [C_{km}^{(j)} - d_{km}^{(j)}] = \\ = f_k^{(j)} - \sum_{q=1, q \neq j}^4 \left\{ C_{q+1} P_k^{-j,q} - C_q P_k^{+j,q} + \sum_{m=0}^{\infty} x_m^{(q)} P_{km}^{j,q} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь введены обозначения:

$$x_m^{(l)} = (-i)^m \mu_m^{(l)} \beta_m^\nu; \quad \beta_m^\nu = \Gamma(m+2\nu+1)/\Gamma(m+1);$$

$$C_k^{(\pm l)} = \frac{i}{\pi} k_{\nu}^{jl} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha|}{\alpha} K_j(\pm \alpha) J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}; \quad k_{\nu}(\epsilon_j) = 2 \left(\frac{2}{\epsilon_j} \right)^{2\nu-1} \frac{\Gamma^2(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu)};$$

$$d_k^{(\pm l)} = \frac{l}{\pi} k_{\nu}^{jl} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha|}{\alpha} \gamma(\alpha) K_j(\pm \alpha) J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}; \quad k_{\nu}^{jq} = \\ = 2(2\epsilon_q)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+\frac{1}{2}) k_{\nu}(\epsilon_j);$$

$$C_{km}^{(\nu)} = \frac{\Gamma^2(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma((k+m)/2+1)}{\Gamma(\nu+(1+k-m)/2) \Gamma(\nu+(1+m-k)/2) \Gamma((k+m)/2+2\nu+1)} \times$$

$$\times [1 + (-1)^{k+m}];$$

$$(6) \quad Q_{km}^{(\nu)} = k_{\nu}(\epsilon_j) \int_0^{\infty} \gamma(\alpha) J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j \alpha) J_{m+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}} [1 + (-1)^{k+m}];$$

$$P_k^{z/jq} = \frac{i}{\pi} k_{\nu}^{jq} \left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_q} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{jq}(\alpha) K_q(\pm \alpha) \frac{e^{ikljq D_{jq}(\alpha)}}{[B_{jq}(\alpha)]^{\nu+\frac{1}{2}}} J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j B_{jq}(\alpha)) \frac{d\alpha}{\alpha};$$

$$P_{km}^{jq} = k_{\nu}(\epsilon_j) \left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_q} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{jq}(\alpha) J_{m+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_q \alpha) J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j B_{jq}(\alpha)) \frac{e^{ikljq D_{jq}(\alpha)}}{[\alpha B_{jq}(\alpha)]^{\nu+\frac{1}{2}}} d\alpha;$$

$$f_k^{(l)} = k_{\nu}(\epsilon_j) 2^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+\frac{1}{2}) e^{ikr_{0j} D_j(\alpha_0)} A_j(\alpha_0) \frac{J_{k+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_j B_j(\alpha_0))}{[B_j(\alpha_0)]^{\nu+\frac{1}{2}}};$$

$K_j(\pm \alpha) = e^{\pm i\epsilon_j \alpha} - \frac{\sin(\epsilon_j \alpha)}{\epsilon_j \alpha}$; $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя, а

величины $A_{jq}(\alpha)$, $B_{jq}(\alpha)$, $D_{jq}(\alpha)$, $A_j(\alpha_0)$, $B_j(\alpha_0)$, $D_j(\alpha_0)$ вычислены в [1,2].

Для определения коэффициентов $\{C_j | j=1$ в СЛАУ имеют место дополнительные соотношения:

$$(7) \quad e^{-i\epsilon_j B_j(\alpha_0) + ikr_{0j} D_j(\alpha_0)} + \sum_{q=1, q \neq j, j+1}^4 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x_m^{(q)} E_m^{jq} + \right.$$

$$\left. + i(C_{q+1} E_{jq}^{(-)} - C_q E_{jq}^{(+)}) \right\} = -C_j,$$

$$j = 1, 2, 3, 4,$$

которые следуют из определения функций тока на гранях цилиндра и из условия на ребре (1), (3). В (7) величины $\{E_m^{jq}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{E_{jq}^{(\pm)}\}_{j \neq q=1}^4$ определены следующим образом:

$$E_{jq}^{(\pm)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\pm \alpha) e^{-i\epsilon_j B_{jq}(\alpha) + ikljq D_{jq}(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$E_m^{jq} = \frac{\epsilon_q}{(2\epsilon_q)^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} J_{m+\nu+\frac{1}{2}}(\epsilon_q \alpha) e^{-i\epsilon_j B_{jq}(\alpha) + ikljq D_{jq}(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$

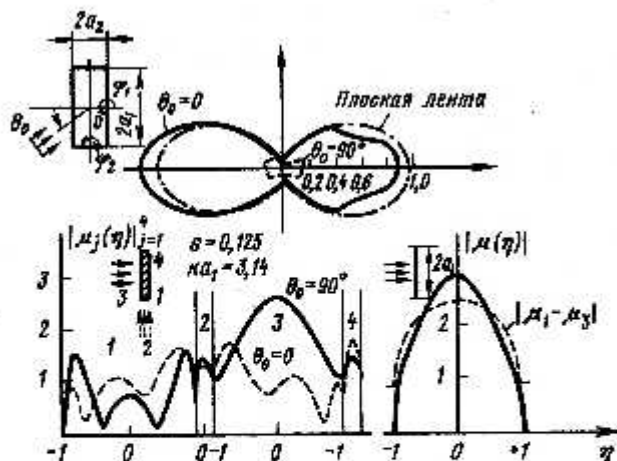


Рис. 1

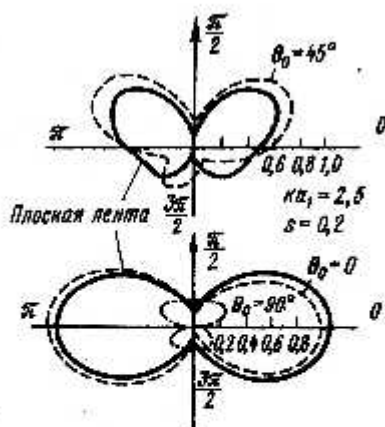


Рис. 2

Пользуясь условием ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства, можно показать, что неизвестных $\{\mu_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежат к классу числовых последовательностей

$$(8) \quad l_2(\nu) = \left\{ \mu_n^{(j)} : \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n^{(j)}|^2 \beta_n^{\nu} < \infty, \quad \beta_n^{\nu} = O(n^{2\nu}) \right\}.$$

При переходе к новым неизвестным $y_n^{(j)} = \mu_n^{(j)} \sqrt{\beta_n^{\nu}}$, которые согласно (8) уже принадлежат к классу числовых последовательностей l_2 , доказано, что бесконечная СПАУ (5) относительно неизвестных $\{y_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ является уравнением Фредгольма 2-го рода с вполне непрерывным оператором в l_2 . Следовательно, приближенное решение такой СПАУ с любой наперед заданной точностью может быть получено методом редукции.

2. В рамках развитого подхода можно получить и эффективное решение задачи дифракции волны на плоской ленте в приближении бесконечно тонкого экрана. Поскольку в этом случае плотность тока на ленте определяется как скачок H_x компоненты магнитного поля, то она с приближением к ребру стремится к нулю как $O(\rho^{1/2})$, где $\rho \rightarrow 0$ [3]. Поэтому для бесконечно тонкой ленты функция плотности тока $\mu(\eta)$ разлагается в следующий ряд:

$$(9) \quad \mu(\eta) = (1 - \eta^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n U_n(\eta).$$

Здесь $U_n(\eta)$ — полиномы Чебышева 2-го рода. Можно показать, что неизвестные коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ могут быть определены из решения бесконечной СПАУ 2-го рода:

$$(10) \quad x_k - \sum_{n=0}^{\infty} d_{kn}^{(1/2)} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\{d_{kn}^{(1/2)}\}_{k,n=0}^{\infty}$, f_k определены соотношениями (6), в которых значение параметра ν полагается равным $1/2$.

3. Для численного решения поставленной задачи создан набор достаточно эффективных алгоритмов вычисления матричных элементов СПАУ (5), матрицы

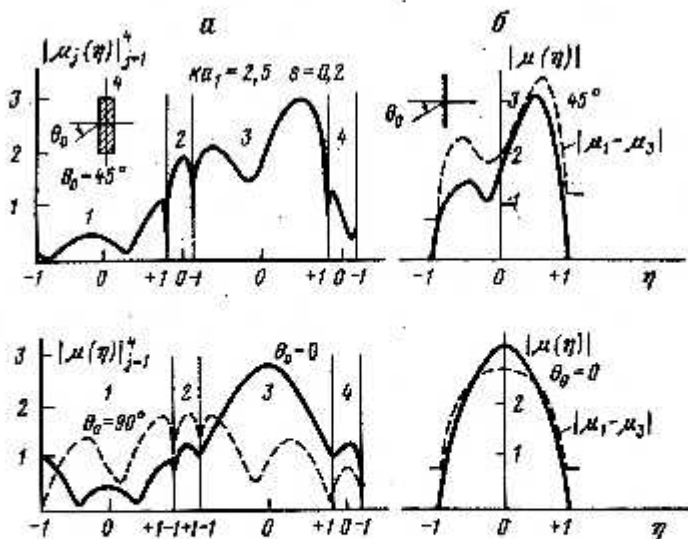


Рис. 3

дополнительной системы из четырех уравнений (7), а также расчета плотностей поверхностных токов и диаграммы направленности (ДН) рассеянного поля.

На рис. 1–3 представлены ДН полей и распределения поверхностных токов для бесконечно тонкой ленты и цилиндра с прямоугольным сечением при различных значениях частотного параметра, угла падения и параметра $s = a_2/a_1$, который определяет "толщину" цилиндра. Из анализа результатов, приведенных на этих рисунках, можно сделать следующие выводы.

При нормальном падении волны ($\theta_0 = 0^\circ$; рис. 1,2) на широкую грань прямоугольного цилиндра с толщиной $0,1 \leq s \leq 0,5$ ДН поля близка ДН плоской ленты. Различие проявляется в том, что амплитуда поля в данной зоне со стороны освещенной грани несколько превышает амплитуду поля в теневой области и ДН в направлении $\varphi = 90^\circ$ и $\varphi = 270^\circ$ не обращается в ноль (боковые грани дают свой вклад в ДН). Однако если на широкую грань прямоугольного цилиндра укладывается целое число полудлин волн, то различие в ДН плоской ленты и цилиндра уменьшается.

При наклонном падении волны (рис. 2,3) на прямоугольный цилиндр малой высоты (на плоскую ленту конечной толщины) ДН поля по сравнению с ДН бесконечно тонкой ленты становится несимметричной. Толщина ленты заметно сказывается на ДН поля и на распределении плотности тока. Амплитуда тока на боковой грани значительна. Это связано с тем, что при дифракции H -поляризованной волны функция, определяющая плотность тока на гранях цилиндра, является кусочно-непрерывной. Иными словами, в рассматриваемом случае поверхностный ток может эффективно проникать, минуя ребро, в теневую область через боковые грани. Для более наглядного сравнения полученных результатов на графиках распределения плотности тока на бесконечно тонкой ленте — скачка H_2 -компоненты поля — приведена разность плотностей поверхностных токов, наведенных на сторонах ленты конечной толщины $|\mu_1(\eta) - \mu_2(\eta)|$.

Во многих задачах СВЧ-техники возникает необходимость оценить омические потери в металлических жранных. Они пропорциональны интегралу от квадрата тока по поверхности экрана. Известно, что для оценки этой величины в рамках метода возмущений (при сильном скин-эффекте в металлах) для H -поляризации можно воспользоваться результатами, которые получены строгими методами для бесконеч-

но тонких и идеально проводящих экранов [4]. Проведенное исследование распределения тока по поверхности ленты конечной толщины показывает, что модель бесконечно тонкого экрана может дать значительную погрешность при определении омических потерь.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Получило
23 IV 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Велиев Э.И. — ДАН, 1985, т. 282, № 5.
2. Велиев Э.И., Вергей В.В. Тез. докл. IX Всес. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985, т. 1, с. 511.
3. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964, с. 428.
4. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.