1990 ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР № 1
СЕРИЯ А. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ФИЗИКА

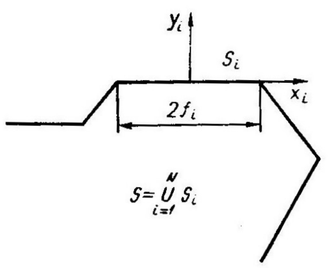
УДК 517.9.536.4

Э. И. ВЕЛИЕВ, В. П. ЧУМАЧЕНКО

МЕТОД ПОЛУОБРАЩЕНИЯ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА МНОГОУГОЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

(Представлено академиком АН УССР В. П. Шестопаловым)

Явления дифракции волн на многоугольных цилиндрических телах эффективно исследуются методом полуобращения оператора задачи [1—3]. В работах [4—6] предложен подход, названный методом произведения областей, позволяющий алгоритмизировать решение широкого класса двумерных задач дифракции волн на многоугольных объектах и использующий разложение по функциям Матье. Ниже показано, что основные уравнения, следующие из этого метода, могут быть также получены путем обращения частей оператора дифракционной задачи, отвечающих отдельным прямолинейным звеньям контура поверхности.



Пусть на идеально проводящую многоугольную цилиндрическую поверхность S (замкнутую либо разомкнутую) (рисунок) падает E- либо H-поляризованная волна $u^*{}_0$. Требуется найти поле u, удовлетворяющее однородному уравнению Гельмгольца вне контура, граничным условиям Дирихле или Неймана на контуре поверхности, условию на ребре и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. Если частота возбуждающего поля не совпадает ни с одной из собственных частот замкнутых частей поверхности, такая задача имеет единственное решение [7].

Предположим, что поверхность S разомкнута. Считая, что искомое поле удовлетворяет условию на ребре

$$\lim_{\rho\to 0} \rho \operatorname{grad} u = 0$$

(ρ — радиус малой окружности, охватывающей угловую точку), представим u вне контура σ, описанного вокруг S, при помощи второй формулы Грина и стянем контур интегрирования к S. В результате получим

$$u = \int\limits_S \left\{ [u] \frac{\partial G}{\partial n'} - \left[\frac{\partial u}{\partial n'} \right] G \right\} dS' + u_0, \qquad (1)$$

где $G = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k\,|\,r - r'\,|)$ — двумерная функция Грина свободного пространства; $[u]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]$ — скачки решения и его нормальной производной. В

* Здесь и далее временная зависимость $e^{i\omega t}$ опущена

случае замкнутой поверхности, если считать, что u определено внутри S, представление (1) сохранит свой вид.

Рассмотрим задачу дифракции волн E-поляризации. Положим $u=0$ на обеих сторонах поверхности. Тогда $[u]=0$ и

$$u = -\sum_{i=1}^{N} \int_{-f_i}^{f_i} \left[\frac{\partial u}{\partial y_i'}\right] G dx_i' + u_0, \tag{2}$$

где (x_i, y_i) — система локальных прямоугольных координат с началом в центре i-го звена контура (если S замкнута, сторона $y_i = +0$ обращена к области определения поля), f_i — половина длины i-го звена (см. рисунок), N — число звеньев контура поверхности. Введем также локальные эллиптические координаты

$$x_i = f_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \quad y_i = f_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i$$

и рассмотрим интегральный оператор A

$$A\varphi = \frac{i}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} H_0^{(2)}(\varepsilon|\zeta - \zeta'|)\, d\zeta, \quad \zeta' \in [-1, 1], \tag{3}$$

где $\varepsilon = kf$; $\zeta = \frac{x}{f}$ — нормированная координата. Можно показать, что для функции $H_0^{(2)}(\varepsilon|\zeta - \zeta'|)$ имеет место следующее представление по функциям Матье [8]:

$$\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\varepsilon|\zeta - \zeta'|) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q)} \mathrm{ce}_n(\arccos \zeta, q)\, \mathrm{ce}_n(\arccos \zeta', q),$$
$$\zeta, \zeta' \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $q = \varepsilon^2/4$.

Подставляя (4) в (3) и используя соотношение ортогональности для функций Матье, можно показать, что

$$\frac{i}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{ce}_n(\arccos \zeta, q)}{\sqrt{1-\zeta^2}} H_0^{(2)}(\varepsilon|\zeta - \zeta'|)\, d\zeta = \frac{\mathrm{Me}_n^{(2)'}(0,q)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q)} \mathrm{ce}_n(\arccos \zeta', q). \tag{5}$$

Формула (5) является спектральным соотношением для оператора A [9], поскольку она показывает, что функции Матье $\{\mathrm{ce}_n(\arccos \zeta, q)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными функциями этого интегрального оператора, $\left\{\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q)}{\mathrm{Me}_n^{(2)'}(0,q)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ — его собственными числами, т. е.

$$A\varphi = \frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q)}{\mathrm{Me}_n^{(2)'}(0,q)} \varphi, \quad \varphi = \mathrm{ce}_n(\arccos \zeta, q). \tag{6}$$

Спектральное соотношение (5), (6) имеет важное значение, поскольку с его помощью можно легко построить явное решение интегрального уравнения типа

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} H_0^{(2)}(\varepsilon|\zeta - \zeta'|)\, d\zeta = f(\zeta'), \quad \zeta' \in [-1, 1]. \tag{7}$$

Покажем это на примере рассматриваемой задачи дифракции. С этой целью опустим точку наблюдения на i-е звено и потребуем, чтобы

$u|_S=0$. Тогда с учетом (2) получим

$$-\int_{-f_i}^{f_i}\left[\frac{\partial y}{\partial y_i'}\right]Gdx_i' = \sum_{i\neq j}^{N}\int_{-f_j}^{f_j}\left[\frac{\partial u}{\partial y_j'}\right]Gdx_j' - u_0,\ y_i=0,\ |x_i|\leqslant f_i,\quad i=\overline{1,N}. \quad (8)$$

Будем искать продольный «ток» $\left[\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]$ в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора A, т. е.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y_i}\right] = \frac{2}{f_i\sqrt{1-\left(\frac{x_i}{f_i}\right)^2}}\sum_{n=0}^{\infty}D_n^i\,\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)'}(0,q_i)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q_i)}\,\mathrm{ce}_n(\eta_i,q_i), \quad (9)$$

где $\eta_i=\arccos(x_i/f_i)$, $q_i=\frac{\varepsilon_i^2}{4}=\frac{(kf_i)^2}{4}$.

Подставляя (9) в (8) и учитывая спектральное соотношение (5), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n^i\,\mathrm{ce}_n(\eta_i,q_i)+\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}D_n^j\left[\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_j,q_j)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q_j)}\,\mathrm{ce}_n(\eta_j,q_j)\right]\Bigg|_{\xi_i=0} = -u_0|_{\xi_i=0}. \quad (10)$$

Отсюда с учетом свойств ортогональности функций Матье следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов разложения $D^i{}_n$

$$D_m^i+\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}^{ij}D_n^j=b_m^i,\quad i,j=\overline{1,N},\quad m=\overline{0,\infty}, \quad (11)$$

$$a_{mn}^{ij}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_j,q_j)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q_j)}\,\mathrm{ce}_n(\eta_j,q_j)\right]\Bigg|_{\xi_i=0}\mathrm{ce}_m(\eta_i,q_i)\,d\eta_i,\quad (\xi_j,\eta_j)\in S_i, \quad (12)$$

$$b_m^i=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0|_{\xi_i=0}\,\mathrm{ce}_m(\eta_i,q_i)\,d\eta_i.$$

Как видно из СЛАУ (11), часть оператора краевой задачи, которая связана с отдельным звеном многоугольной цилиндрической поверхности, полностью обращена с помощью спектрального соотношения (5). Как следствие, можно утверждать, что интегральное уравнение (7) имеет явное решение.

Заметим, что искомая функция u представима в виде разложения по коэффициентам $\{D_n^i\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$u=\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}D_n^i\,\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_i,q_i)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q_i)}\,\mathrm{ce}_n(\eta_i,q_i)+u_0. \quad (13)$$

В случае задачи дифракции волн H-поляризации на замкнутой поверхности определим u во внутренней области так, чтобы $[u]=0$. Тогда снова придем к представлению (2) и далее (13), из которых после наложения требования $\frac{\partial u}{\partial n}|_S=0$ на внешней стороне S следует СЛАУ (11) с матричными коэффициентами

$$a_{mn}^{ij}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{Me}_m^{(2)}(0,q_i)}{\mathrm{Me}_m^{(2)'}(0,q_i)}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left[\frac{\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi_j,q_j)}{\mathrm{Me}_n^{(2)}(0,q_j)}\mathrm{ce}_n(\eta_j,q_j)\right]\Bigg|_{\xi_i=0}\mathrm{ce}_m(\eta_i,q_i)\,d\eta_i, \quad (14)$$

$$b_m^i = -\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{Me}_m^{(2)}(0, q_i)}{\mathrm{Me}_m^{(2)\prime}(0, q_i)}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial u_0}{\partial \xi_i}\bigg|_{y_i=+0}\mathrm{ce}_m(\eta_i, q_i)\,d\eta_i. \qquad (15)$$

Система линейных алгебраических уравнений (11), (12) и (14), (15) совпадают с формулами, полученными методом произведения областей [4—6]. Можно показать, что СЛАУ (11) разрешима методом редукции [10].

Как видно, решающую роль в изложенной схеме решения интегрального уравнения (8) сыграло спектральное соотношение (5), (6). Это соотношение имеет важное значение, поскольку функция $H^{(2)}_0(\varepsilon|\zeta-\zeta'|)$ является ядром интегральных уравнений, к которым сводятся многочисленные задачи теории дифракции.

SUMMARY. A problem on diffraction of *E*- or *H*-polarised electromagnetic waves on the polygonal conducting cylindrical surface has been reduced to the solution of the infinite algebraic linear Fredholm second-kind system. The reduction has been made by inversion of the integral operator corresponding to certain link of the contour. The system permits obtaining a solution with any desired accuracy and agrees well with that derived by the method of multiplication of domains.

1. *Велиев Э. И.* К теории двумерной дифракции волн на многоугольном цилиндре // Докл. АН СССР.— 1985.— 285, № 2.— С. 319—323.
2. *Велиев Э. И., Шестопалов В. П.* Дифракция волн на пересекаемых круговых цилиндрических телах // Там же.— 282, № 5.— С. 1094—1098.
3. *Велиев Э. И., Веремей В. В., Шестопалов В. П.* Дифракция волн на прямоугольном цилиндре // Радиотехника и электроника.— 1988.— 33, № 3.— С. 478—490.
4. *Чумаченко В. П.* К вопросу о дифракции электромагнитных волн на ребристых цилиндрических поверхностях // Изв. вузов. Радиофизика.— 1979.— 22, № 12.— С. 1480—1484.
5. *Засовенко В. Г., Чумаченко В. П.* Дифракция волн *E*-типа на цилиндрах с многоугольным поперечным сечением // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1984.— 27, № 1.— С. 59—62.
6. *Чумаченко В. П.* О расчете *H*-плоскостных волноводных узлов с многоугольной границей // Радиоэлектроника и электроника.— 1986.— 31, № 12.— С. 2335—2341.
7. *Хенл X., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.— М. : Мир, 1964.— 428 с.
8. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах.— Минск : Наука и техника, 1968.— 528 с.
9. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.— М. : Наука, 1986.— 336 с.
10. *Чумаченко В. П.* К обоснованию одного метода решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн на многоугольных идеально проводящих структурах // Радиотехника и электроника.— 1988.— 33, № 8.— С. 1600—1609.

Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, Харьков
Запорожск. машиностроит. ин-т

Поступило 03.07.89