AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

«ELM» Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzi
Редакционно-Издательский и Полиграфический Центр «Элм»

MƏRUZƏLƏR

ДОКЛАДЫ

ТОМ LXI CİLD

№ 4

2005

«ELM» nəşriyyatı — Издательство «ЭЛМ»
Bakı - 2005 – Баку

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ MƏRUZƏLƏRİ

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

TOM LXI CİLD №4 2005

Математика

Э.И.ВЕЛИЕВ, Т.М.АХМЕДОВ

ДРОБНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА – НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

(Представлено академиком НАН Азербайджана А.Дж.Гаджиевым)

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десяти лет N.Engheta применял дробное исчисление для решения ряда краевых задач электродинамики, получив при этом ряд интересных результатов [1-7]. Его исследования показывают перспективность применения математического аппарата дробного исчисления как эффективного метода для решения краевых задач электромагнитной теории. Под дробным (фрактальным) исчислением понимают раздел математического анализа, где в операции дифференцирования (интегрирования) $\partial^{\nu} f(x)/\partial x^{\nu}$ порядок дифференцирования ν может принимать любые (вещественные и комплексные) значения [8, 9].

Одним из определений дробной производной для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, являются интегралы Римана-Лиувилля [8,9]:

$$ {}_{a+}D_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\nu}} \tag{1}$$

$$ {}_{b-}D_x^{\nu} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\nu}} \tag{2}$$

для $0<\nu<1$

где $\Gamma(1-\nu)$ - Гамма-функция.

Здесь ${}_{a+}D_x^{\nu}$ - левосторонний, а ${}_{b-}D_x^{\nu}$ - правосторонний операторы дифференцирования, a – нижний, а b – верхний пределы.

Далее будем считать, что функция $f(x) \in AC$ – классу абсолютно непрерывных функций. При этом, как показано в [9], ${}_{a+}D_x^{\nu} f(x) \in L_p(a,b)$, где $1 \le p < 1/\nu$.

Существуют еще несколько других определений дробных производных и интегралов, которые могу быть найдены в [8], [9]. В этих же монографиях имеется достаточно полный исторический обзор про дробное исчисление.

Определения (1) и (2) дробного дифференцирования типа Римана-Лиувилля играют важную роль в развитии самой теории дробного исчисления. Однако применение дробного исчисления к решению интегральных и дифференциальных уравнений, возникающих в различных задачах математической физики, приводит к новым определениям дробного интегродифференцирования [10,11].

В данной работе дано новое определение для дробных дифференциалов для функции $\psi\left(\vec{r}\right)$, которая удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца. Как будет показано ниже, к этому представлению мы пришли при попытке нахождения фрактального решения стандартного уравнения Гельмгольца.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим функцию $\psi\left(\vec{r}\right)$, удовлетворяющую неоднородному скалярному уравнению Гельмгольца, когда плотность источника задается функцией $\rho\left(\vec{r}\right)$ [12,13].

$$\nabla^2\psi\left(\vec{r}\right)+k^2\psi\left(\vec{r}\right)=-4\pi\rho\left(\vec{r}\right), \tag{3}$$

$G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)$ - функция Грина, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)+k^2 G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)=-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right), \tag{4}$$

В (3) и (4) $\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)\delta\left(z-z_0\right)$ - трехмерная дельта-функция Дирака, $\vec{r}=x\vec{a}_x+y\vec{a}_y+z\vec{a}_z$ и $\vec{r}_0=x_0\vec{a}_x+y_0\vec{a}_y+z_0\vec{a}_z$ - вектора наблюдения и источника соответственно, $\vec{a}_x,\vec{a}_y$ и $\vec{a}_z$ - единичные вектора в декартовой системе координат, ∇^2 - оператор Лапласа, который выражается как $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, k - скалярная константа.

Далее мы используем дробную производную Римана – Лиувилля на всей оси

$$ {}_{-\infty}D_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\nu}}, \tag{5}$$

$$ {}_{+\infty}D_x^{\nu} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\nu}}, \tag{6}$$

где $-\infty < x < \infty$, и $0 < \nu < 1$ - дробный порядок.

Дельта-функция Дирака определяется [12]

$$ \int_V F(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dv = F(\vec{r}_0), \tag{7}$$

Применим оператор дробной производной к уравнениям (1.3) и (1.4) по переменной x.

$$ \nabla^2 {}_{-\infty}D_x^{\mu}\psi(\vec{r}) + k^2 {}_{-\infty}D_x^{\mu}\psi(\vec{r}) = -4\pi {}_{-\infty}D_x^{\mu}\rho(\vec{r}), \tag{8}$$

$$ \nabla^2 {}_{-\infty}D_x^{\nu}G(\vec{r},\vec{r}_0) + k^2 {}_{-\infty}D_x^{\nu}G(\vec{r},\vec{r}_0) = -4\pi {}_{-\infty}D_x^{\nu}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \tag{9}$$

В (8) и (9) мы приняли во внимание, что оператор ${}_{-\infty}D_x^{\nu}$ и оператор Лапласа ∇^2 коммутируют, т.е. ${}_{-\infty}D_x^{\nu}\nabla^2 = \nabla^2 {}_{-\infty}D_x^{\nu}$ [9].

В (9) ${}_{-\infty}D_x^{\nu}G(\vec{r},\vec{r}_0)$ является функцией Грина дробного порядка (фрактальная функция Грина), которая достаточно подробно исследована в [3].

${}_{-\infty}D_x^{\nu}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ – дробная производная от дельта-функции Дирака, которая в частности в двумерном случае может быть представлена в виде

$$ \begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^{\nu}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) &= {}_{-\infty}D_x^{\nu}(\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)) = \\ &= U(x-x_0)\frac{1}{\Gamma(-\nu)}(x-x_0)^{-\nu-1}\delta(y-y_0) \end{aligned} \tag{10}$$

где $U(x-x_0) = \begin{cases} 0, x < x_0 \\ 1, x > x_0 \end{cases}$ - функция Хевисайда.

Эту функцию, как справедливо замечено в работах N.Engheta, можно назвать “промежуточным” источником между одно- и двух- мерным источниками, которые описываются одномерными и двумерными дельта-функциями Дирака $\delta(x)$ и $\delta(x)\delta(y)$ соответственно. Этот “промежуточный” источник и порождает фрактальную функцию Грина. В задачах рассеяния электромагнитных и акустических волн одномерной и двумерной функциям Грина соответствуют плоская и цилиндрическая волны (функция Ханкеля нулевого порядка). Фрактальная функция Грина описывает новую волну [3], которая по своим свойствам является “промежуточной” между плоской и цилиндрической волной.

Теперь домножим (8) на ${}_{-\infty}D_x^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)$, а (9) на ${}_{-\infty}D_x^{\mu}\psi\left(\vec{r}\right)$, вычтем одно из другого, потом поменяем местами $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ и проинтегрируем по всем координатам x_0, y_0, z_0 внутри S_0, и в итоге получаем:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r}_0,\vec{r}\right)\nabla_0^2\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r}_0\right)-{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r}_0\right)\nabla_0^2\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r}_0,\vec{r}\right)\right]dV_0=$$

$$\int\limits_{V_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r}_0\right){}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}\delta\left(\vec{r}_0-\vec{r}\right)-{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\rho\left(\vec{r}_0\right){}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r}_0,\vec{r}\right)\right]dv_0, \qquad (11)$$

Мы можем упростить уравнение (11). Для этого можно показать ,что для дробной производной дельта-функции Дирака справедливо:

$$\int\limits_{V_0}F\left(\vec{r}_0\right){}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}\delta\left(\vec{r}_0-\vec{r}\right)dv_0={}_{-\infty}D_x^{\nu}F\left(\vec{r}\right), \qquad (12)$$

Учитывая (12) в (11) и применяя теорему Грина [12,13], мы получим

$${}_{-\infty}D_x^{\mu+\nu}\psi\left(\vec{r}\right)=\int\limits_{V_0}{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right){}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\rho\left(\vec{r}_0\right)dV_0+$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r}_0\right)-{}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r}_0\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)\right]ds_0, \qquad (13)$$

если $\vec{r}$ внутри S.

Это соотношение можем трактовать как обобщение теоремы Грина на случай дробных производных.

Далее для простоты будем считать, что $\rho(\vec{r})=0$.

Обозначая $\mu+\nu=\beta$, получим представление для дробной производной:

$$
{}_{-\infty}D_x^{\beta}\psi\left(\vec{r}\right)=
$$
$$
\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta-\nu}\psi\left(\vec{r_0}\right)-{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta-\nu}\psi\left(\vec{r_0}\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)\right]ds_0, \qquad (14)
$$

если $\vec{r}$ внутри S .

Здесь β,ν - дробные порядки и $0<\beta<1$, $0<\nu<1$.

Если $\vec{r}$ вне S, тогда ${}_{-\infty}D_x^{\mu+\nu}\psi\left(\vec{r}\right)=0$.

Рассмотрим, несколько частных случаев, которые могут быть получены из (14).

1. Дробный порядок $\nu=\beta$. В этом случае учтем, что ${}_{-\infty}D_x^{0}f\left(x\right)=f\left(x\right)$, тогда из (14) получаем

$$
{}_{-\infty}D_x^{\beta}\psi\left(\vec{r}\right)=
$$
$$
=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)grad_0\psi\left(\vec{r_0}\right)-\psi\left(\vec{r_0}\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)\right]ds_0, \qquad (15)
$$

Из (15) мы видим, что дробная производная функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ представляется через значение функции и ее первой производной на границе и дробных производных функции Грина.

2. Дробный порядок $\nu=0$. Аналогичным образом из (14) получаем

$$
{}_{-\infty}D_x^{\beta}\psi\left(\vec{r}\right)=
$$
$$
=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left[G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)grad_0\,{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta}\psi\left(\vec{r_0}\right)-{}_{-\infty}D_{x_0}^{\beta}\psi\left(\vec{r_0}\right)grad_0G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)\right]ds_0, \qquad (16)
$$

В этом представлении дробная производная функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ выражается через дробные производные самой функции на границе и обычной функции Грина.

3. Случай $\nu = -\mu$, т.е. $\beta = 0$. Тогда имеем:

$$\psi\left(\vec{r}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_0}\left[{}_{-\infty}D_{x_0}^{-\mu}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right) grad_0\, {}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r_0}\right) - {}_{-\infty}D_{x_0}^{\mu}\psi\left(\vec{r_0}\right) grad_0\, {}_{-\infty}D_{x_0}^{-\mu}G\left(\vec{r},\vec{r_0}\right)\right] ds_0 \tag{17}$$

Здесь имеем представление для самой функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ через значения дробной производной функции на границе и дробной функции Грина.

Отметим, что уравнения (14), (15) и (16), (17) остаются в силе для двумерного случая ($\partial/\partial z = 0$), где функция Грина – это двумерная функции Грина $G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)$, $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y, \vec{r}_0 = x_0\vec{a}_x + y_0\vec{a}_y$, и поверхностные интегралы заменяются на контурные.

Если уравнения (14)-(17) дополнить соответствующими граничными условиями и условиями на бесконечности ($\vec{r} \to \infty$) для функций $\psi\left(\vec{r}\right), G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)$ и их производных ${}_{-\infty}D_x^{\nu}\psi\left(\vec{r}\right)$, ${}_{-\infty}D_x^{\nu}G\left(\vec{r},\vec{r}_0\right)$, то для ${}_{-\infty}D_x^{\nu}\psi(\vec{r})$ может быть получено представление, справедливое для внешней области. Такое представление может оказаться весьма полезным при решении внешних граничных задач рассеяния. Этому будет посвящена отдельная статья.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы ввели новое определение для дробной производной, используя дробное решение скалярного уравнения Гельмгольца.

Фактически нами получено три представления:

1. Представление для дробной производной функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ через значение самой функции и ее первой производной на границе и дробных производных функции Грина. (15)

2. Представление для дробной производной функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ через значения ее дробных производных на границе и обычной функции Грина. (16)

3. Представление для самой функции $\psi\left(\vec{r}\right)$ через значения ее дробной производной на границе и дробной функции Грина. (17)

Необходимо подчеркнуть, что соотношение (13) может рассматриваться как обобщение теоремы Грина на случай дробных производных.

Мы надеемся, что полученные представления найдут применение, в частности, для решения задач прикладной электродинамики.

Авторы выражают признательность N.Engheta за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Engheta N.* "On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnet isim", IEEE Trans. Antennas & Propagation, 44 (4), pp.554-566, April 1996.

2. *Engheta N.* "Electrostatic 'Fractional' Image Method for Perfectly Conductin Wedges and Cons", IEEE Trans. Antennas & Propagation, 44(12), pp.1565-1574, De cember 1996.

3. *Engheta N.* "Use of Fractional Integration to Propose Some 'Fractional' Solu tions for the Scalar Helmholtz Equation," a chapter in Progressin Electromagnetics Re search (PIER), Monograph Series, Vol.12, Jin A. Kong, ed.EMW Pub., Cambridge, MA pp.107-132, Chapter 5, 1996.

4. *Engheta N.* "On the Role of Fractional Calculus in Electromagnetic Theory," in IEEE Anntenas and Propagation Magazine, 39(4), pp.35-46, August 1997.

5. *Engheta N.* "Fractional Curl Operator in Electromagnetics," Microwave and Op tical Technology Letters," 17(2), p.86-91, February 5, 1998.

6. *Engheta N.* "Fractional Paradigm in Electromagnetic Theory", a chapter in ' ' IEEE Press, chapter 12, pp.523-553, 2000.

7. *Engheta N.* "Fractionalization Methods and their Applications to Radiation and Scattering Problems," a talk presented in the 2000 International Conference on Mathematical Methods In Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, September 10-13, 2000. The summary Appeared in Vol.1, pp.34-40 of the proceedings.

8. *Oldham K.B. and Spanier J.* The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

9. *Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Langhorne, PA, 1993. (Originally published in Russian by Nauka i Teknika, Minsk, 1987.)

10. *Caputo M.* "Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, Geophys. J. R. Astr. Soc., vol.13, 1967, pp.529-539.

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

12. *Morse P.M. and Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics, New York, McCraw-Hill, Two volumes, 1953.

13. *Ishimaru A.* Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice-Hall, Englewood, NJ, 1991.

ИРЭ НАН Украины
ИММ НАН Азербайджана

Поступило 26.VI.2006